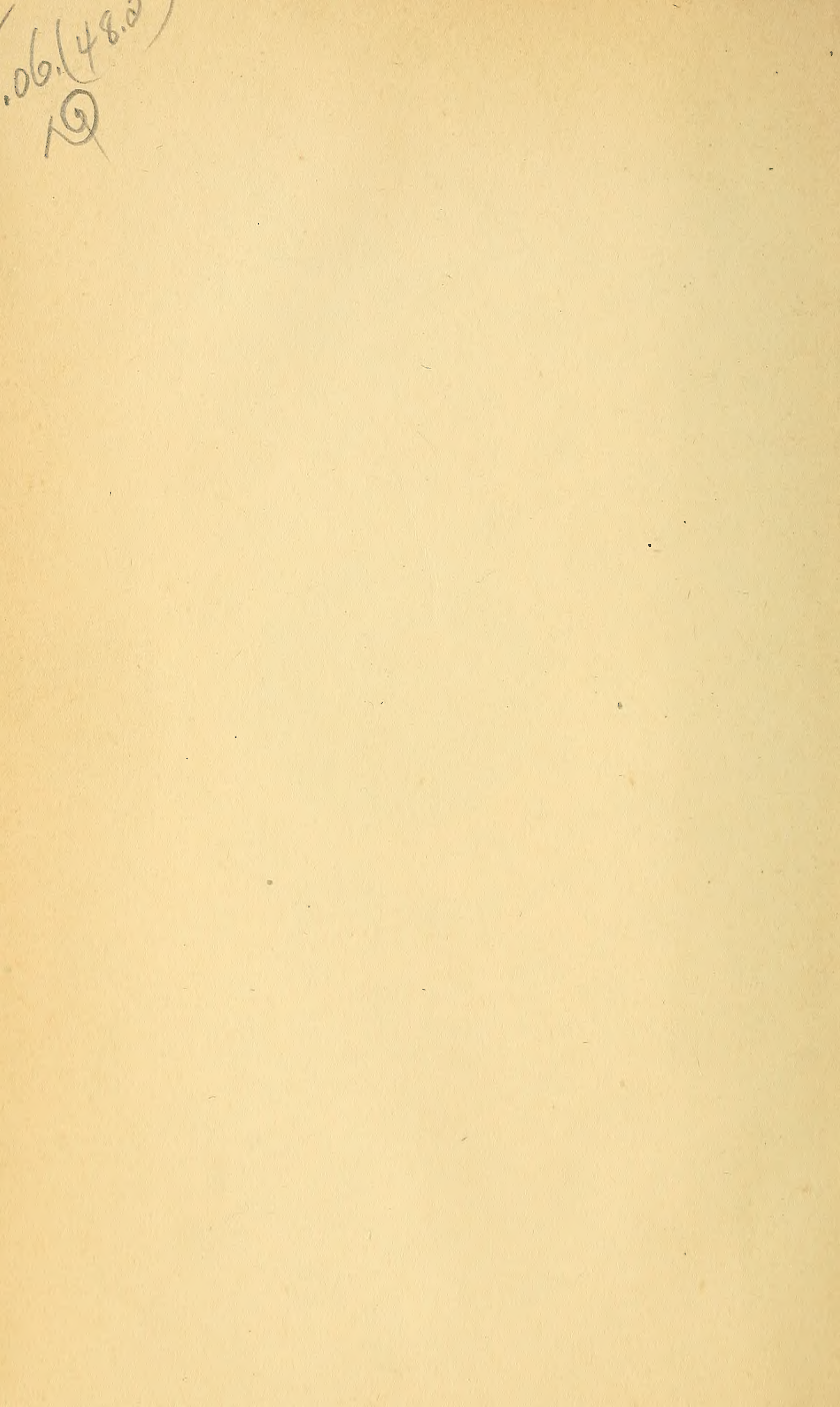






ÖFVERSIGT

AF

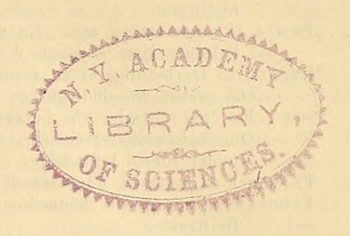
KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS

FÖRHANDLINGAR.

FYRTIÅTTONDE ÅRGÅNGEN.

1891.

STOCKHOLM, 1891, 1892.
KUNGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER.



INNEHÅLL.

Utförliga uppsatser äro betecknade med en asterisk.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS
FÖRHANDLINGAR.

Årg. 48. 1891. № 1.

Onsdagen den 14 Januari.

INNEHÅLL:

Hr Frih. NORDENSKIÖLD redogjorde för af honom fortsatta undersökningar öfver Gadolinitjordens molekularvigt, samt inlemnade en derom handlande uppsats (se Bihang till K. Vet.-Akad. Handl.).

Hr RETZIUS meddelade resultaten af sina under senaste tiden utförda undersökningar öfver den tvärstrimmiga muskeltrådens byggnad.

Hr HILDEBRANDSSON dels öfverlemnade på författarnes, Fil. Licentiaten L. HAGSTRÖMS och Fil. Kandidaten A. FALKS vägnar en uppsats med titel: »Mesures de nuages faites dans les montagnes de Jemtland pendant l'été 1887»*, dels meddelade i sammanhang dermed de vigtigaste resultaten som vunnits genom de i Upsala utförda undersökningarne öfver de högre luftströmmarnes rörelser.

Hr HASSELBERG förevisade några fotografier af jernets spectrum, tagna på Akademiens fysiska kabinet medelst voltabågen och ett Rowlands gitter.

Hr MITTAG-LEFFLER öfverlemnade 13:de bandet af tidskriften »Acta mathematica».

Sekreteraren meddelade på författarnes vägnar följande inlemnade uppsatser: 1:o) »Några iakttagelser öfver Gullmarfjordens vatten», af Doktor A. STUXBERG*; 2:o) »Om m-Dinitrodifenyldisulfin», af Fil. Kandidaten A. EKBOM*; 3:o) »Kurzer Bericht über eine in letztem Sommer vorgenommene zoologische Reise nach Nordgrönland», af Docenten D. BERGENDAL (se Bihang etc.).

Från K. Landtbruks-Akademien hade meddelande ingått derom, att till Letterstedtsk stipendiat blifvit utsedd läraren vid Ultuna landtbruksinstitut Fil. D:r A. WESTERBERG.

Berättelser om resor, som med understöd af Akademien blifvit under sistlidne sommar utförda, hade blifvit afgifna af Docenten CARL AURIVILLIUS samt Filos. Kandidaterne O. CARLGREN, C. O. ANDERSSON och L. ROMELL.

Genom anstäldt val kallades Riksantiqvarien D:r H. O. HILDEBRAND till ledamot af Akademien.

Följande skänker anmäldes:

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

Stockholm. *K. Statistiska centralbyrån.*
Bidrag till Sveriges officiella statistik. 25 Band. 1889—90. 4:o.
— *K. Generalstaben.*
Karta öfver Sverige. $^1/_{100'000}$. Bl. 54. 1890. Tvf.
» » Norrbottens län. $^1/_{200'000}$. Bl. 12—13, 18, 20—21, 23—24. 1890. Tvqv.
— *K. Sjökarteverket.*
Sjökort. $^1/_{200'000}$. Lit. K, L. 1890. F.
— *Sveriges geologiska undersökning.*
Sveriges geologiska undersökning. Ser. Aa. N:o 84, 100, 103—107: Kartor och text; Bb. N:o 4, 6; C. N:o 92—111, 113—115. 1888—90. 8:o 4:o & F.
Systematisk förteckning öfver offentliggjorda arbeten 1862—1890. 1890. 8:o.
LÖFSTRAND, G., Om apatitens förekomstsätt i Norrbottens län. 1890. 8:o.
— *K. Generalstaben.*
Astronomisch-geodätische Arbeiten. Bd. 1: H. 3. 1890. 4:o.
— *Stadsfullmäktige.*
Berättelse angående Stockholms kommunalförvaltning. Årg. 21 (1888); Register Årg. 1 (1868)—20 (1887). 1890. 8:o.

(Forts. å sid. 37.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1891. N:o 1.
Stockholm.

Mesures de nuages faites dans les montagnes de Jemtland pendant l'été de 1887.

Par K. L. Hagström et A. Falk.

[Note communiquée le 14 Janvier 1891 par H. H. Hildebrandsson.]

Les mesures des hauteurs et des mouvements des nuages exécutées par l'un de nous avec M. Ekholm à Upsal[1]) ont donné des résultats nouveaux et en partie inattendus. Cependant, il serait d'une grande importance de savoir si ces résultats sont les mêmes à d'autres endroits différents d'Upsal, et par leur situation topographique, et par leur climat. Pour contribuer à la solution de ce problème nous avons fait, grâce à une subvention de l'université d'Upsal, des mesures au nord de la Suède dans la partie ouest de la province de Jemtland dans le voisinage des Alpes scandinaves.

Comme lieu d'observation nous avons choisi Storlien, station du chemin de fer de Stockholm à Drontheim, situé à la frontière de la Norvège à 600 mètres environ au dessus de la mer.

Le bâtiment de la gare de Storlien est situé à 63° 18′ Lat. N. et 5° 54′ Long. W. de Stockholm d'après la carte de l'état-major.

Cet endroit se trouve sur le versant SW de la colline allongée de Storlien, qui cache la vue à une hauteur de quelques degrés. Le reste de l'horizon est libre et la place fort favorable pour des mesures de nuages. A une distance de 4 km du coté

---

[1]) N. Ekholm et K. L. Hagström. Mesures des hauteurs et des mouvements des nuages. Nova Acta Reg. Soc. Sc. Ups. 1885.

de l'ouest s'élèvent en Norvège le Stenfjäll à 1200 m et du côté du SSE les Snasahögarne à 1600 m au dessus de la mer.

Grâce aux prévenances bienveillantes de la direction Royale des chemins de fer à Stockholm et de l'Intendant de la ligne, Mr le directeur C. F. SUNDBERG à Östersund, on mit à notre disposition le terrain du chemin de fer pour placer les théodolites et on nous a permis de nous servir d'une ligne de téléphone qui se trouvait sur la place.

Nous avons choisi comme extrémités de la base de nos mesures projetées deux points au NW et au SE du bâtiment de la gare, éloignés à peu près de 2,5 km l'un de l'autre. Pour placer les théodolites nous avons élevé deux piliers d'ardoise sur de petites hauteurs près de la ligne. Mais voyant que cette base était trop longue pour la mesure des nuages bas, on fit venir d'Upsal encore un théodolite qui fut placé tout près du bâtiment de la gare du côté du SE. Pour la petite base nous avons employé la distance des deux théodolites placés au SE du bâtiment de la gare.

Les longueurs des bases furent fixées facilement et avec une assez grande exactitude par les cartes de niveau et de profil du chemin de fer qui se trouvaient là sur place et qu'on nous fournit obligeamment au bureau des ingénieurs de Storlien. Il ne nous restait plus qu'à joindre, par une triangulation faite aux extrémités de la base, les théodolites et l'indicateur de pente le plus rapproché de la ligne du chemin de fer. Ces mesures furent prises avec un ruban d'acier d'une longueur de 10 mètres. Ces mêmes cartes nous ont donné aussi la hauteur des théodolites au-dessus de la mer. Pour l'installation des théodolites nous avons employé comme points de mire des indicateurs éloignés de la ligne.

Soit T_1 le théodolite placé au NW du bâtiment de la gare, T_2 le théodolite tout près au SE, et T_3 le théodolite plus au SE du bâtiment de la gare, nous avons trouvé pour la base la plus longue

$$T_1 T_3 = 2447{,}7 \text{ m},$$

et pour la base la plus courte

$$T_2\,T_3 = 652{,}0 \text{ m.}$$

La hauteur des théodolites au-dessus de la mer est

$$T_1 = 588{,}2 \text{ m},$$
$$T_2 = 594{,}7 \text{ m},$$
$$T_3 = 600{,}9 \text{ m}.$$

Le théodolite T_3 se trouvait au point le plus haut de la ligne du chemin de fer au-dessus de la mer.

Le méridien de l'endroit fut déterminé en observant les hauteurs correspondantes du soleil. Pour la base $T_1\,T_3$ nous avons obtenu l'azimut

$$S\ 71^\circ{,}20\ E$$

et pour la base $T_2\,T_3$

$$S\ 81^\circ{,}26\ E.$$

Du reste, pour contrôler les azimuts des points de mire relativement aux bases nous avons fait des deux extrémités de la base $T_1\,T_3$ des observations simultanées du soleil, et nous avons trouvé comme moyenne de 7 observations:

	à T_1	à T_3
hauteur du soleil:	19°,43.	19°,43.
angle azimutal entre base et soleil:	172°,15.	172°,09.

Pour la base la plus courte $T_2\,T_3$ nous avons trouvé comme moyenne de 7 observations:

	à T_2	à T_3
hauteur du soleil:	42°,11.	42°,12.
angle azimutal entre base et soleil:	48°,56.	48°,51.

Les theodolites employés étaient les mêmes qui furent employés par M. M. EKHOLM et HAGSTRÖM pour les mesures de nuages à Upsal.[1]) Pour mesurer la vitesse du vent nous avions apporté avec nous un anémomètre de Negretti et Zambra, le même instrument qui avait servi à l'expédition de la Vega.[2])

[1]) l. c. pag. 2—6.

[2]) H. H. HILDEBRANDSSON. Observations faites par l'expédition de la Vega, p. 594.

L'instrument, placé dans un endroit bien découvert à 3 m au-dessus du sol sur une hauteur près de l'hôtel où nous avions notre logis, fut consulté avant et après chaque série d'observations. La direction du vent fut determinée en observant la fumée, toutes les fois que c'était possible; il variait ordinairement entre SE quand il faisait beau et NW quand il faisait mauvais temps, comme partout dans cette partie de la province.

Le temps était peu favorable pour les mesures. Il pleuvait continuellement et il a même neigé parfois pendant les neuf premiers jours; plus tard même nous avons été souvent obligés d'interrompre nos mesures à cause de la pluie. Aussi le nombre de nos mesures n'est il que de 382 sur 45 jours et 332 seulement se prêtent au calcul.

On trouve dans les Tab. I et II un résumé de ces mesures. L'heure est le temps civil moyen suédois, lequel est en retard de 10^m 16^s sur le temps moyen d'Upsal. L'heure est comptée *de minuit à minuit.* La nomenclature des nuages est celle employée à l'observatoire d'Upsal. Les coordonnées des nuages, dont on n'a noté que la hauteur dans les tableaux ainsi que les erreurs moyennes sont calculées d'après les règles et les formules qu'on trouve dans le travail déjà cité de M. M. EKHOLM et HAGSTRÖM. Mais chaque fois que plusieurs mesures ont été faites sur le même point d'un nuage, les hauteurs ont été réduites à une valeur moyenne en donnant à chaque observation un poids en raison inverse du carré de l'erreur moyenne. Ensuite on a calculé d'après la même loi l'erreur moyenne de la hauteur moyenne. Par conséquent, si $m_1, m_2, \ldots$ designent les valeurs moyennes dans les hauteurs z_1, $z_2, \ldots$, dont on veut calculer la valeur moyenne, nous donnerons aux observations les poids g_1, $g_2, \ldots$ et nous mettrons

$$g_1 m_1^2 = g_2 m_2^2 = \ldots = GM^2,$$

où, de la même manière, M et G sont l'erreur moyenne et le poids de la hauteur moyenne. La hauteur moyenne est donc calculée d'après l'équation

$$z = \frac{g_1 z_1 + g_2 z_2 + \ldots}{g_1 + g_2 + \ldots}$$

et l'erreur moyenne d'après une des équations

$$M = m_1 \sqrt{\frac{g_1}{G}} = m_2 \sqrt{\frac{g_2}{G}} = \ldots$$

Quand plusieurs observations successives ont été faites sur le même point d'un nuage nous avons calculé la marche et la vitesse horizontale du nuage d'après les coordonnées de x et de y. Dans ce but les cordonnées ont été corrigées d'après les règles données dans le travail de M. M. EKHOLM et HAGSTRÖM pag. 20, seconde métode. Dans les tableaux I et II la direction du mouvement est comptée du meridien en sens direct. Selon notre avis il ne valait pas la peine d'essayer de calculer la vitesse verticale des nuages d'après les observations faites.

Dans les dernières colonnes des tableaux nous avons noté la direction et la vitesse du vent près de la terre.

Les indications de l'anémomètre ont été réduites en mètres par seconde et de plus réduites à l'échelle de l'anémomètre d'Upsal par la multiplication du facteur

$$1{,}112 \left(= \frac{548}{493}\right)$$ [1]

A Upsal M. M. EKHOLM et HAGSTRÖM ont trouvé, pour les hauteurs des différentes formes des nuages des variations diurnes assez marquées. Celà nous a amenés à diviser le jour en trois parties, de $7^h 30^m$ à $10^h 30^m$, de $10^h 30^m$ à $15^h 30^m$ et de $16^h 30^m$ à $22^h 30^m$. Dans le tableau III on trouve pour chacune de ces parties les hauteurs moyennes de chaque espèce de nuages. Ces moyennes sont calculées en donnant à chaque hauteur un poids égal au nombre des mesures. De plus les tableaux contiennent des observations sur le maximum et le mini-

[1] Voy. l'ouvrage cité de M. H. H. HILDEBRANDSSON. Observations de la Vega, p. 594.

mum des hauteurs. Enfin nous avons noté les hauteurs moyennes des nuages à Upsal, pour pouvoir fair la comparaison.[1])

Excepté les *Nb* et les *cr* le nombre des différentes espèces de nuages est trop petit pour qu'on puisse en tirer des résultats positifs. Cependant, on voit par les tableaux que la hauteur moyenne est plus grande aux heures du milieu du jour que la hauteur moyenne de toute la journée, ce qui indique *un maximum dans la hauteur des nuages au milieu du jour;* ce résultat diffère de ce qu'on a trouvé à Upsal, où la hauteur des nuages semble augmenter du matin jusqu'au soir. Seulement les hauts *Al-Cm* et les *cr-Cm*, qui sont des formes de nuages très variables et qui se confondent souvent, semblent faire une exception à cette loi.

Une comparaison entre les hauteurs moyennes à Storlien et à Upsal nous montre que *les nuages les plus bas à Storlien ont une plus grande hauteur et les nuages les plus hauts une moindre hauteur au dessus du sol qu'à Upsal.* Pour les *cr* la différence se monte à 600 mètres, ce qui est justement la différence de hauteur au-dessus de la mer entre les deux stations. Par conséquent *les cr ont la même hauteur au-dessus de la mer à Storlien qu'à Upsal.*

---

[1]) N. EKHOLM och K. L. HAGSTRÖM. Molnens höjd i Upsala under sommaren. Bih. till Kongl. Vet. Ak. Handl. B. 12, I, 10, pag. 11.

Voy. aussi: Die Höhe der Wolken im Sommer zu Upsala. Von N. EKHOLM et K. L. HAGSTRÖM in Upsala. Met. Zeitschrift. März 1887.

Tableau I. **Liste des observations faites de la base de 2447,7 m.**

Date.	Heure.	Espèce de nuage.	Nombre des observations.	Hauteur en mètres.	Erreur moyenne, mètres.	Direction du mouvement.	Vitesse, mètres p. sec.	Direction du vent.	Vitesse du vent, mèt. p. sec.
Juillet.	h. m.					S—W			
9	11.49	Cm, sommet, de grandeur moyenne	2	2126	40	65°	5.0	SE	—
»	12.15	Cm, flocon, en dissolution	3	1723	6	7	6.3		
»	12.19	Cm, sommet	2	2148	6	20	3.7		
»	12.21	Cm, le même, autre point	1	2172	2	—	—		
»	12.25	Cm, flocon	2	1975	6	0	6.4		
»	12.29	Cm, sommet	2	2222	14	33	3.5		
»	12.32	Cm, base d'un nuage sombre	2	1901	14	9	6.9		
»	12.56	Cm, bras en dissolution	3	1791	13	355	6.8		
»	19. 6	Str-Cm, grand nuage sombre	1	1750	6	—	—		
»	19. 8	Str-Cm, le même, autre point	1	1751	89	—	—		
»	19.22	Al-Cm, petit flocon clair	3	4548	48	315	10.4		
»	19.26	Al-Cm, partie plus grande	1	4529	26	—	—		
»	19.30	cr-Cm, petites conglomerations claires	1	5765	115	—	—		
11	10. 0	Nb, Str-Cm, Al-Cm, cr-Cm, cr 8 [1])	—	—	—	—	—	SE	—
»	10.14	cr, pointe	1	8110	419	—	—		

[1]) De cette manière nous indiquons les espèces et la quantité des nuages au commencement de chaque série d'observations.

Date.	Heure.	Espèce de nuage.	Nombre des observations.	Hauteur en mètres.	Erreur moyenne, mètres.	Direction du mouvement.	Vitesse, mètres p. sec.	Direction du vent.	Vitesse du vent, mèt. p. sec.
Juillet.	h. m.					S—W			
11	10.16	cr, pointe	1	7463	202	—	—		
	10.24	cr, cr-Cm-forme	2	7309	105	318°	11.3		
	10.28	cr, d:o d:o	1	7897	254	—	—		
»	10.34	cr-Cm ou Al-Cm, masse claire	1	6512	152	—	—		
	10.36	cr-Cm ou Al-Cm, le même, autre point	1	6227	166	—	—		
	10.40	Al-Cm, petits flocons, ciel moutonné, bien irisant	1	3844	90	—	—		
	13. 0	Str-Cm, Al-Cm, cr 8; cr gris, nébuleux	—	—	—	—	—	SE	—
	13.39	cr, fin, bien marqué	3	6548	70	352	3.7		
»	13.43	Al-Cm ou cr-Cm	2	6404	49	342	4.4		
	13.47	Al-Cm ou cr-Cm, flocon	1	6397	57	—	—		
»	13.59	Str-Cm, sombre avec des contours marqués	1	2830	44	—	—		
»	14. 4	Str-Cm, formation nouvelle	1	2711	29	—	—		
»	14.13	cr, raie diffuse, rectiligne	1	9082	166	—	—		
»	14.24	cr, mince, diffus	2	8738	190	342	10.3		
»	14.27	cr, point voisin	1	8808	317	—	—		
»	14.34	cr, diffus	1	6554	135	—	—		
»	14.39	cr, d:o	1	6438	154	—	—		
	17. 0	Str-Cm, Cm, Al-Cm, cr-Str	—	—	—	—	—		
»	17.54	cr, typique	1	8765	95	—	—		
»	17.57	Le même, autre point	1	8252	176	—	—		

11	18. 7	cr	1	8300	114	—	—		
»	18.11	Le même, autre point	2	8212	78	354	16.4		
»	18.26	cr-Cm, petits grains ou bandes en rangées parallèles	2	7140	108	341	6.4		
»	18.31	cr-Cm, un autre dans la même groupe	3	7358	59	326	6.8		
»	21. 0	Str-Cm, Al-Cm, cr-Cm 3	—	—	—	—	—		
»	21.32	Al-Cm, en dissolution	1	2070	27	—	—		
»	21.36	Al-Cm, d:o	1	2143	5	—	—		
»	21.40	Al-Cm, formation nouvelle	2	4862	26	12	1.8		
13	18. 0	Str-Cm, Al-Cm 10	—	—	—	—	—	—	3.2
»	18. 2	Str-Cm, grand nuage bleu d'acier	3	1665	42	117	4.5		
»	18. 6	Str-Cm, formation nouvelle, voisine	1	1679	53	—	—		
14	12	Nb, Al-Cm, cr-Str 10	—	—	—	—	—	SW	3.3
»	12.50	Nb, bleu d'acier	1	5741	46	—	—		
	12.55	Nb	2	3056	37	66	15.0		
»	12.59	Nb, sombre, se dissout	2	2683	26	41	15.0		
»	13. 6	Nb, pareil, plus grand que le précédent	1	2794	98	—	—		
15	8	Cm, Al-Cm, cr-Str 9	—	—	—	—	—	SW	0.9
»	8.42	Cm (Cm-Str), point au milieu du nuage	1	2343	13	—	—		
»	8.46	Cm, le même, le point suprême	1	2989	24	—	—		
»	8.53	Cm, la base du même nuage	2	929	3	343	4.8		
»	9. 7	cr, raie, typique	1	7993	83	—	—		
»	9. 8	cr, autre point du même	1	8216	144	—	—		
»	9.11	cr, autre point du même	1	8054	113	—	—		
»	13	Tonnerre deux heures avant midi	—	—	—	—	—	SW	1.9
»	13.45	cr, ressemblant à un buisson, typique [1]	2	8041	59	343	35.2		

[1]) Coups de tonnerre par les téléphones.

Date.	Heure.	Espèce de nuage.	Nombre des observations.	Hauteur en mètres.	Erreur moyenne, mètres.	Direction du mouvement.	Vitesse, mètres p. sec.	Direction du vent.	Vitesse du vent, mètres p. sec.
Juillet.	h. m.					S—W			
15	18.22	Al-Cm, haut, en dissolution	3	2987	9	35°	4.1	SW	0.8
»	18.26	Al-Cm, de la même espèce	1	3074	43	—	—		
»	18.31	Al-Cm, d:o d:o	1	2772	68	—	—		
»	18.34	Al-Cm, d:o d:o	1	2921	127	—	—		
16	9. 0	Le temps s'éclaircit: Nb, Cm, Cr-Cm, cr 8	—	—	—	—	—	SE	0.3
»	9.46	cr, typique	1	7765	170	—	—		
»	13. 0	Cm, Al-Cm, Str-Cm 4, cr minces paraissent de temps en temps	—	—	—	—	—	W	0.5
»	13. 6	cr-Cm, petits grains	2	5285	31	25	13.3		
»	13.14	cr-Cm, masse feutrée	2	5268	34	21	13.7		
»	13.16	cr-Cm, le même nuage, autre point	1	5233	245	—	—		
	13.19	cr-Cm, raie, formation nouvelle	1	5409	56	—	—		
»	13.22	Al-Cm	1	2508	14	—	—		
»	13.29	Al-Cm, très-variable	1	2567	14	—	—		
»	13.32	cr, raie typique	2	8561	116	18	35.8		
18	16. 0	Str-Cm, Cm, cr-Cm 2	—	—	—	—	—	SE	0.9
»	16.43	Cm, petit flocon	1	1345	7	—	—		
»	16.45	Cm, d:o d:o	1	1458	4	—	—		
»	16.46	Cm, d:o d:o	1	1210	3	—	—		
»	16.48	Cm, d:o d:o	1	1264	3	—	—		
»	16.49	Cm, d:o d:o	1	1300	2	—	—		

»	16.53	Cm, d:o d:o	1	1381	8	—	—		
»	16.55	cr, petit, extrêmement diffus	1	6148	87	—	—		
»	17. 5	cr, d:o d:o d:o	1	6240	81	—	—		
23	18. 0	Nb, Str-Cm, cr, cr-Str 8	—	—	—	—	—	S	0.2
»	18.33	cr, typique, masse très-claire	3	8085	66	55	23.8		
»	18.42	cr, d:o d:o	1	6846	94	—	—		
»	18.50	cr, grand, typique	1	7420	47	—	—		
»	18.51	cr, le même, autre point	1	7372	48	—	—		
»	18.54	cr, le même, autre point	1	7599	145	—	—		
»	19.10	cr-Cm ou Al-Cm, petites concrétions de nuages blancs	2	2989	36	48	14.6		
»	19.21	Al-Cm ou Str-Cm	1	2837	127	—	—		
24	10. 0	Al-Cm, cr-Cm, cr, cr-Str 7	—	—	—	—	—	SE	0.2
»	10. 3	cr, raie typique	2	8373	90	55	27.0		
»	10.10	cr, raie diffuse	3	7376	44	55	23.7		
»	10.50	cr, d:o d:o	1	6723	142	—	—		
»	14. 0	Al-Cm, cr 9	—	—	—	—	—	SE	2.2
»	14.18	cr, masse laiteuse	1	7537	112	—	—		
»	14.22	Al-Cm, nœud blanc, ressemblant à cr	1	3571	124	—	—		
»	14.26	cr, laiteux	1	8771	307	—	—		
»	14.31	cr, flocon clair	1	7479	243	—	—		
25	18. 0	Nb, cr 6	—	—	—	—	—	NW	3.4
»	18.32	cr, diffus	1	7019	59	—	—		
»	18.36	cr, typique	2	7184	62	30	23.0		
»	18.40	cr, typique, diffus	2	7591	120	35	25.7		
»	18.43	cr. d:o plus clair	2	7013	216	35	22.9		
»	18.55	cr, d:o grand, beau nuage	1	7128	54	—	—		

Date.	Heure.	Espèce de nuage.	Nombre des observations.	Hauteur en mètres.	Erreur moyenne, mètres.	Direction du mouvement.	Vitesse, mètres p. sec.	Direction du vent.	Vitesse du vent, mètres p. sec.
Juillet.	h. m.					S—W			
25	18.58	cr, d:o	1	6588	61	—	—		
»	19. 3	cr, d:o belles raies	5	7275	95	34°	23.5		
27	8. 0	cr-Cm, cr, cr-Str 5	—	—	—	—	—	S	7.1
»	8. 2	cr, typique	2	7537	91	63	16.0		
»	8. 5	cr, autre point de la même partie du nuage	2	7205	208	74	19.3		
»	8.10	cr, pointe d'une raie dans une grande collection typique	6	7775	62	72	20.3		
»	8.22	cr, cr-Cm-forme, très variable	3	8738	67	81	23.5		
»	8.30	cr, cr-Cm-forme, grande masse	3	8653	52	81	24.6		
»	8.34	cr, d:o	1	8879	160	—	—		
»	12. 0	Nb, Al-Cm 9	—	—	—	—	—	S	10.8
»	12.46	Al-Cm, flocon	1	3161	17	—	—		
»	12.49	Al-Cm, d:o	1	3732	28	—	—		
29	11. 0	Al-Cm, cr 7	—	—	—	—	—	—	3.8
»	11.23	cr, raies typiques	1	9904	93	—	—		
»	11.25	cr, plus diffus	1	9197	297	—	—		
»	11.31	cr, raie large, claire	1	8763	220	—	—		
»	11.39	Al-Cm, flocon	1	2453	138	—	—		
»	11.42	Al-Cm, d:o	1	2488	70	—	—		
»	12.26	cr, laiteux	1	7091	427	—	—		
»	21. 0	cr-Cm, cr 5, éclairés par le soleil	—	—	—	—	—	—	0.0

»	21.20	cr, cr-Cm-forme	2	8377	113	58	33.3		
»	21.23	cr, d:o	2	7961	48	57	31.8		
»	21.28	cr, collection de nuages diffus	1	7862	92	—	—		
»	21.32	cr, masse diffuse	2	8030	64	60	32.9		
»	21.37	cr, d:o	2	7875	95	59	37.7		
Août.									
5	14. 0	cr 1	—	—	—	—	—	NW	0.3
»	14. 5	cr, typique	3	8362	161	163	14.5		
»	14.12	cr-Str, grande collection	5	9514	189	149	18.2		
»	14.20	cr, typique	7	9349	95	152	17.4		
»	17. 0	cr 3; collections laiteuses avec des raies en toutes directions	—	—	—	—	—	NW	0.3
»	17.38	cr	2	8402	52	127	10.0		
»	17.42	cr, point très-voisin	2	8415	63	129	11.0		
»	17.48	cr, point voisin	4	8335	51	135	11.3		
»	18. 0	cr, la même, raie nouvelle	2	7820	56	135	9.8		
»	18. 7	cr, raie	2	9635	74	146	15.2		
»	18.20	cr, point voisin	2	9773	78	147	16.8		
»	18.36	cr, pointe diffuse	2	9785	165	154	18.0		
»	18.41	cr, petites collections granuleuses voisines	3	9818	210	148	14.4		
6	9. 0	Raies de cr par tout le ciel. Direction N—S, avec des raies de travers SE—NW	—	—	—	—	—	SE	0.7
»	9.13	cr, grisâtre, sur le bord d'une grande collection	1	9813	113	—	—		
»	9.18	cr, raie seule, diffuse	2	9210	162	119	15.1		
»	9.26	cr, raie très-claire au milieu de la masse	2	9513	97	110	15.7		
»	9.31	cr, point voisin	1	9101	85	—	—		
»	13. 0	Cm, cr-Cm, cr, cr-Str 9	—	—	—	—	—	SE	0.9

Date.	Heure.	Espèce de nuage.	Nombre des observations.	Hauteur en mètres.	Erreur moyenne, mètres.	Direction du mouvement.	Vitesse, mètres p. sec.	Direction du vent.	Vitesse du vent, mètres p. sec.
Août.	h. m.					S—W			
6	13.14	cr, raie diffuse	1	10419	149	—	—		
	13.20	Cm, sommet	1	1805	15	—	—		
	13.23	cr-Cm, beau, irisant	1	6600	80	—	—		
»	13.32	cr, typique, d:o	5	10271	100	139°	15.3		
»	13.38	cr-Cm, petits grains	1	7287	254	—	—		
»	13.40	cr-Cm, d:o	1	6402	95	—	—		
»	13.45	cr-Cm, d:o	1	6223	35	—	—		
»	13.47	cr-Cm, d:o	1	6225	89	—	—		
»	13.49	cr-Cm, raies longues parallèles	1	6751	177	—	—		
7	9.30	cr-Cm, cr 4	—	—	—	—	—	SE	0.7
»	9.45	cr, raie, typique	4	7819	87	71	13.0		
»	9.50	cr, raie	2	7855	85	63	13.4		
		Somme	231						

Tableau II. **Liste des observations faites de la base de 652,0 m.**

Date.	Heure.	Espèce de nuage.	Nombre des observations.	Hauteur en mètres.	Erreur moyenne, mètres.	Direction du mouvement.	Vitesse, mètres par seconde.	Direction du vent.	Vitesse du vent, mètres par sec.
Juillet	h. m.					S – W			
22	10. 0	Nb, Al-Cm 10	—	—	—	—	—	S	1.9
»	10.41	Nb, clair	1	1701	130	—	—		
»	10.44	Nb, plus sombre	1	2960	115	—	—		
»	10.48	Nb	2	1341	32	221°.4	2.3		
»	10.54	Al-Cm, collection de grains	1	4174	76	—	—		
»	10.57	Le même, point voisin	2	4427	64	131.4	2.8		
»	11. 1	Le même, autre point	1	4341	113	—	—		
»	11. 8	Al-Cm, diffus	1	1182	228	—	—		
»	11.10	Al-Cm, bande, s'évanouit bientôt	1	2414	117	—	—		
»	14. 0	Voile bas de cr-Str	—	—	—	—	—	S	1.6
»	14.28	Nb	1	1231	12	—	—		
»	14.30	Le même, autre point, très-variable	1	1213	12	—	—		
»	16. 0	Nb, Al-Cm, cr-Str 10	—	—	—	—	—	SE	0.3
»	16.52	Nb	1	1384	39	—	—		
»	16.56	Nb	1	2520	63	—	—		

Date.	Heure.	Espèce de nuage.	Nombre des observations.	Hauteur en mètres.	Erreur moyenne, mètres.	Direction du mouvement.	Vitesse, mètres par seconde.	Direction du vent.	Vitesse du vent, mètres par sec.
Juillet	h. m.					S – W			
22	16.59	Nb, petit flocon	1	2496	63	—	—		
»	17. 2	Nb, flocon	1	3023	236	—	—		
»	17. 5	cr, bande, très-clair	1	7212	755	—	—		
»	17. 8	Nb	1	1420	34	—	—		
»	21. 0		—	—	—	—	—	SE	0.3
»	21.22	Nb, grand, sombre, avec des contours distincts	1	1488	103	—	—		
»	21.23	Le même, point voisin, se dissout	1	1950	162	—	—		
»	21.26	Nb, grand, sombre, bien pointé	1	1823	20	—	—		
»	21.29	Nb, sombre	2	2425	66	124°.4	7.2		
25	8. 0	Nb, 3	—	—	—	—	—	—	0.0
»	8.44	Nb, sommet	1	1002	89	—	—		
»	8.46	Le même, sommet voisin	1	875	241	—	—		
»	8.47	Nb, très-déchiré	2	1206	8	108.1	7.0		
»	8.56	Nb, flocon clair, mince	1	686	8	—	—		
»	9. 0	Nb, pareil	1	1619	38	—	—		
»	14. 0	Nb, très-sombres 10	—	—	—	—	—	NW	1.8
»	14.29	Nb, flocon dans le bord d'un grand Nb	1	3436	124	—	—		
»	14.36	Nb, grand, gris blanc	1	2606	172	—	—		
»	14.40	Al-Cm, point dans le bord d'une masse blanche	1	3172	97	—	—		
»	14.42	Al-Cm, flocon clair	2	3293	74	45.9	10.7		

26	10. 0	Nb, 9	—	—	—	—	—	NW	3.3
»	10. 0	Nb, déchiré	2	977	9	114.4	5.5		
»	10. 6	Nb, Cm-forme, grande masse	1	2055	42	—	—		
»	10. 9	Nb	2	1349	10	137.0	5.9		
»	10.12	Nb, Cm-forme	1	1256	11	—	—	NW	3.2
»	13. 0	Nb, Str-Cm 8	—	—	—	—	—		
»	13.35	Nb, point sur le bord du nuage	1	1851	92	—	—		
»	13.45	Nb	1	1255	15	—	—		
»	13.48	Nb	1	1100	197	—	—		
»	13.49	Nb	1	1079	42	—	—		
»	13.52	Str-Cm, clair	1	2597	35	—	—		
»	13.58	Nb, déchiré	2	1162	31	86.0	5.9		
»	19. 0	Cm 3	—	—	—	—	—	NW	0.8
»	19. 6	Cm, le point suprême	1	1289	17	—	—		
»	19.10	Le même, agrandi, autre point	1	1356	28	—	—		
»	19.14	Cm, sommet	1	1774	21	—	—		
»	19.16	Le même, autre point	1	1146	15	—	—		
»	19.18	Al-Cm en mouvement rapide	1	2488	34	—	—		
»	19.20	Le même, autre point	1	2376	55	—	—		
28	9. 0	Nb, Al-Cm 7	—	—	—	—	—	S	6.1
»	9.59	cr-Cm, haut, mince, en bandes	1	6106	783	—	—		
»	10. 2	Le même, autre point	1	6438	500	—	—		
»	10. 5	Cm-Str, sommet	1	3515	143	—	—		
»	10. 7	Le même, autre point, s'agrandit	2	2998	65	109.8	11.8		
»	10.13	cr-Cm, irisant	1	6918	357	—	—		
»	10.15	Al-Cm, plus bas en mouvement lent	1	1695	394	—	—		

Date.	Heure.	Espèce de nuage.	Nombre des observations.	Hauteur en mètres.	Erreur moyenne, mètres.	Direction du mouvement.	Vitesse, mètres par seconde.	Direction du vent.	Vitesse du vent, mètres par sec.
Juillet	h. m.					S—W			
28	10.22	Al-Cm, bas	1	2906	57	—	—		
»	10.24	Le même, autre point, très-variable	1	2944	57	—	—		
»	10.26	Le même, le sommet	1	2839	53	—	—		
»	10.27	Nb, déchiré, très-sombre	1	1455	188	—	—		
»	10.29	Nb, pareil, se dissout	1	1058	12	—	—		
30	10. 0	Nb, Cm 8	—	—	—	—	—	SW	5.5
»	10.50	Al-Cm, flocon	1	3379	26	—	—		
»	10.55	Al-Cm	1	2174	22	—	—		
»	10.59	Al-Cm, très-variable	1	2888	247	—	—		
»	11. 4	Al-Cm	1	2352	75	—	—		
»	11. 8	Cm, typique, sommet	2	2840	63	85°.9	8.9		
»	11.10	Le même, autre point	2	2997	62	113.1	7.1		
»	18. 0	Al-Cm, 5	—	—	—	—	—	E	0.2
»	18.18	Al-Cm, flocon	1	4918	933	—	—		
»	18.23	Al-Cm, pareil	1	2216	34	—	—		
	18.31	Str	1	998	76	—	—		
»	18.33	Al-Cm	1	2710	91	—	—		
»	18.35	Al-Cm	1	2143	15	—	—		
31	14. 0	Cm, cr-Cm, cr-Str 8	—	—	—	—	—	NW	0.3
»	14.20	Cm, sommet	1	2062	35	—	—		

31	14.23	Cm, flocon	1	2040	26	—	—		
»	14.26	Cm, base, sombre	1	1428	35	—	—		
»	14.31	Le même, base, autre point	1	1316	24	—	—		
»	21. 0	Str-Cm 7	—	—	—	—	—		
»	21.11	Str-Cm, sombre	2	2267	19	347.9	6.0	NW	—
»	21.14	Le même, autre point	3	2200	18	351.1	5.8		
Août 3	19. 0	Nb, Al-Cm 10	—	—	—	—	—	—	—
»	19.18	Nb, sombre, déchiré	2	617	12	114.8	8.5		
»	19.22	Nb	2	772	12	106.8	5.3		
5	9. 0	Nb, Str-Cm, Cm, cr-Str 4	—	—	—	—	—	NW	3.5
»	9.27	Str-Cm, flocon	1	638	3	—	—		
»	9.32	Str-Cm, pareil	1	689	28	—	—		
»	9.34	Str-Cm, pareil	2	710	3	108.9	3.0		
8	9. 0	Nb, Str-Cm 10	—	—	—	—	—	E	4.2
»	9.17	Nb	1	940	31	—	—		
»	9.24	Nb, sombre, déchiré	1	1110	53	—	—		
»	9.26	Nb, déchiré	1	950	302	—	—		
»	9.33	Nb, pareil	1	1019	53	—	—		
»	9.34	Nb, »	1	753	12	—	—		
»	9.36	Nb, »	1	786	5	—	—		
		Somme	101						

Tableau III. **Hauteurs moyennes des nuages, hauteurs maxima et minima.**

Espèce de nuage.	Matin $7^h 30^m$ — $10^h 30^m$.			Milieu du jour $10^h 30^m$ — $15^h 30^m$.			Soir $16^h 30^m$ — $22^h 30^m$.			Toute la journée.			Hauteur max. mètres.	Hauteur min. mètres.	Hauteur moyenne à Upsal.
	Hauteur moyenne, mètres.	Nombre des mesures.	Nombre des nuages.	Hauteur moyenne, mètres.	Nombres des mesures.	Nombres des nuages.	Hauteur moyenne, mètres.	Nombre des mesures.	Nombre des nuages.	Hauteur moyenne, mètres.	Nombre des mesures.	Nombre des nuages.			
Stratus	—	—	—	—	—	—	998	1	1	998	1	1	—	—	623
Nimbus	1131	20	17	2175	20	16	1688	14	11	1664	54	44	5741	617	1527
Cumulus, sommet	2989	1	1	2362	13	8	1391	4	4	2181	18	13	2997	1146	1855
Cumulus, base	929	2	1	1637	4	3	—	—	—	1401	6	4	1901	929	1386
Cm, vers le milieu	2343	1	1	1837	9	4	1326	6	6	1677	16	11	2343	1210	1507
Cumulo-Stratus	2504	3	2	—	—	—	—	—	—	2504	3	2	3515	2998	2848
Strato-Cumulus	687	4	3	2707	3	3	1937	11	6	1788	18	12	2830	638	2331
Alto-Cumulus bas (au-dessous de 4000 m)	2595	4	4	2849	17	16	2668	16	13	2744	37	33	3844	1182	2771
Alto-Cumulus hauts (au delà de 4000 m)	—	—	—	4342	4	3	4688	7	4	4562	11	7	4918	4174	5586
Cirro-Cumulus	6487	3	3	6069	17	14	7020	6	3	6337	26	20	7358	5233	6465
Cirrus (+ 1 cr-Str)	8097	44	23	8776	41	20	8042	57	32	8271	142	75	10419	6148	8878
										Somme	**332**	**222**			

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1891. N:o 1.
Stockholm.

Några iakttagelser öfver Gullmarfjordens vatten.

Af Anton Stuxberg.

(Meddeladt den 14 januari 1891 genom A. E. Nordenskiöld.)

Somrarne 1887 och 1888 hade jag tillfälle att anställa några iakttagelser öfver Gullmarfjordsvattnets temperatur och salthalt från ytan till bottnen, d. v. s. från 0 till 195 meters djup. Iakttagelserna gjordes vid sidan af rent zoologiska undersökningar och i zoologiskt syfte. Men då de sannolikt ega något intresse äfven för hydrografen, synes det mig passande att icke längre dröja med deras offentliggörande.

1. Temperaturiakttagelser

(utförda med en Negretti & Zambras omvändningstermometer, hvars korrektion var ± 0°).

A. Utanför Alsbäck, ungefär i fjordens midt.

Djup i meter.	Tid, 1887				
	10 juni.	1 juli.	12 juli.	28 juli.	10 aug.
0	+14°,2	+16°,0	+16°,4	+17°,95	—
2	14°,2	16°,0	—	—	—
4	—	16°,2	—	—	—
5	—	—	16°,2	17°,9	—
6	14°,2	15°,1	—	—	—
8	—	14°,5	—	—	—
10	14°,2	14°,2	16°,1	16°,8	—

Djup i meter.	Tid, 1887				
	10 juni.	1 juli.	12 juli.	28 juli.	10 aug.
12	+12°,9	+14°,0	—	—	—
14	9°,3	14°,0	—	—	—
15	—	—	+15°,9	+16°,8	—
16	8°,5	13°,8	—	—	—
18	6°,7	13°,6	—	—	—
20	6°,7	13°,3	15°,9	14°,5	—
22	—	12°,9	—	—	—
24	—	12°,8	—	—	—
25	—	—	15°,0	13°,5	—
26	—	12°,8	—	—	—
28	—	12°,2	—	—	—
30	6°,2	10°,0	14°,0	12°,7	—
32	—	8°,2	—	—	—
34	—	6°,5	—	—	—
35	—	—	9°,2	11°,8	—
36	—	6°,2	—	—	—
38	—	6°,0	—	—	—
40	6°,2	5°,8	6°,4	10°,1	—
45	—	5°,8	—	—	—
50	6°,35	6°,9	6°,3	5°,95	—
55	—	—	—	5°,95	—
60	5°,0	—	5°,7	5°,65	—
65	—	—	—	5°,2	+5°,3
70	4°,9	—	4°,9	5°,0	5°,1
80	4°,9	—	4°,9	4°,9	5°,0
90	4°,9	—	4°,9	4°,9	5°,0
94,5	—	—	—	—	5°,7
100	4°,9	—	—	4°,9	—
110	—	—	4°,9	—	—
116,5	—	—	5°,1	—	—
117	—	—	—	5°,2	—
195	5°,0	—	—	—	—

B. I Saltkällevikens mynning.

Djup i meter.	Tid, 1887 13 juli.
0	+17°,0
5	17°,1
10	16°,7
15	16°,4
20	16°,6
25	15°,0
30	13°,1
35	9°,0
40	6°,2

C och D.

Djup i meter.	*I Gullmarsbergsvikens mynning* 3 aug. 1888.	*I Saltkällefjordens inre hälft* 4 aug. 1888.
0	+16°,7	+17°,9
2,5	15°,4	15°,8
5	15°,3	15°,5
7,5	15°,3	14°,5
10	13°,2	13°,2
15	12°,8	12°,7
20	12°,2	12°,2
25	12°,0	11°,8
30	11°,4	10°,9
35	10°,2	9°,2
40	9°,4	—
45	6°,8	—
50	5°,5	—
55	5°,4	—

E. Mellan Släggbådan och Långegap, innanför fjordmynningen.

Djup i meter.	Tid, 1888			
	6 juli.	14 juli.	20 juli.	6 aug.
0	+15°,3	+15°,7	+16°,6	+15°,7
2,5	15°,2	15,°6	16°,5	15°,8
5	14°,7	14°,9	15°,9	15°,7
7,5	14°,0	12°,3	14°,3	15°,1
10	12°,7	11°,8	13°,85	13°,8
15	9°,9	12°,0	12°,4	13°,3
20	8°,4	10°,2	11°,0	13°,2
25	7°,6	8°,4	9°,8	12°,7
30	7°,1	7°,2	6°,9	12°,3
35	8°,4	6°,3	6°,1	11°,25
40	6°,8	6°,4	6°,3	9°,8
45	6°,7	6°,6	6°,4	8°,0
50	5°,4	6°,3	—	6°,2
53,3	—	8°,2	—	—

2. Salthalt.

(Salthalten är funnen genom titrering af vattenprof, som togos med en af kommendör T. A. ARWIDSSON konstruerad vattenhämtare.)

F. Utanför Alsbäck.

Djup i meter.	Tid.			
	12 juli 1887.		28 juli 1887.	
	Gram klor per 100 cm³.	Motsvarande gram klornatrium.	Gram klor per 100 cm³.	Motsvarande gram klornatrium.
0	1,56	2,57	1,54	2,54
10	1,57	2,59	1,55	2,55
20	1,71	2,82	1,79	2,95
30	1,82	3,00	1,83	3,01
40	1,87	3,09	1,85	3,04
50	—	—	1,85	3,05
60	1,58	2,61	1,57	2,59
70	—	—	1,93	3,18
80	—	—	1,92	3,17
90	1,60	2,63	1,89	3,11
100	1,74	2,87	1,93	3,18
110	—	—	1,85	3,04
115,5	1,79	2,95	—	—
119	—	—	1,81	2,98
120	1,92	3,16	—	—

G. Mellan Släggbådan och Långegap, innanför fjordmynningen.

Djup i meter.	Tid					
	6 juli 1888.		20 juli 1888.		6 aug. 1888.	
	Gram klor per 100 cm³.	Motsvar. gram klornatrium.	Gram klor per 100 cm³.	Motsvar. gram klornatrium.	Gram klor per 100 cm³.	Motsvar. gram klornatrium.
0	1,24	2,04	1,41	2,32	1,28	2,11
2,5	1,23	2,02	1,42	2,34	1,15	1,90
5	1,29	2,13	1,59	2,62	1,35	2,22
7,5	1,36	2,23	1,70	2,81	1,56	2,57
10	1,47	2,42	1,75	2,88	1,75	2,89
15	1,73	2,84	1,81	2,98	1,78	2,93
20	1,78	2,94	1,84	3,03	1,78	2,94
25	1,82	3,01	1,85	3,04	1,79	2,95
30	1,86	3,07	1,85	3,04	1,70	2,81
35	1,86	3,07	1,85	3,05	1,80	2,97
40	1,88	3,10	1,87	3,09	1,43	2,36
45	1,92	3,15	1,90	3,12	1,88	3,10
50	1,92	3,15	—	—	1,90	3,12

H. Mellan Långegap och Tofva, innanför fjordmynningen.

Djup i meter.	Tid.			
	11 juli 1888.		14 juli 1888.	
	Gram klor per 100 cm³.	Motsvarande gram klornatrium.	Gram klor per 100 cm³.	Motsvarande gram klornatrium.
0	1,28	2,11	1,35	2,22
2,5	1,29	2,12	1,40	2,30
5	1,49	2,46	1,46	2,41
7,5	1,78	2,93	1,75	2,89
10	1,79	2,95	1,82	3,00
15	1,81	2,98	1,84	3,03
20	1,83	3,02	1,87	3,08
25	1,85	3,05	1,85	3,04
30	1,86	3,07	1,86	3,07
35	1,86	3,07	1,88	3,10
40	1,88	3,10	1,88	3,10
45	1,88	3,11	1,89	3,11
50	1,88	3,11	1,91	3,15
54	1,83	3,02	1,91	3,15

I. I Saltkällevikens mynning, 3 aug. 1888.

Djup i meter.	Gram klor per 100 cm.^{3}	Motsvar. gram klornatrium.
0	0,61	1,01
2,5	1,36	2,25
5	1,37	2,26
7,5	1,42	2,34
10	1,75	2,88
15	1,77	2,91
20	1,77	2,91
25	1,78	2,94
30	1,80	2,96
35	1,80	2,96
40	1,84	3,03
45	1,87	3,09
50	1,92	3,17
55	1,94	3,19
60	1,95	3,22
65	1,95	3,22
70	1,90	3,14

J. I Gullmarsbergsvikens mynning, 3 aug. 1888.

Djup i meter.	Gram klor per 100 cm.^{3}	Motsvar. gram klornatrium.
0	0,71	1,17
2,5	1,35	2,22
5	1,38	2,27
7,5	1,40	2,30
10	1,73	2,84
15	1,78	2,93
20	1,79	2,95
25	1,78	2,94
30	1,79	2,95
35	1,80	2,96
40	1,81	2,98
45	1,85	3,04
50	1,92	3,17
55,7	1,94	3,19

K. Vid Saltkällebryggan, 4 aug. 1888.

Djup i meter.	Gram klor per 100 cm.³	Motsvarande gram klornatrium.
0	0,44	0,73
0,25	1,02	1,67
0,5	1,29	2,13
1	1,31	2,15
2	1,34	2,21
3	1,37	2,26
4	1,38	2,27
5	1,40	2,30
7,5	1,52	2,50
10	1,74	2,87
15,8	1,74	2,87

L. Ytprof från bryggan vid Alsbäck.

Tid.	Gram klor per 100 cm.³	Motsvarande gram klornatrium.
10 aug. 1887	1,47	2,42
11 » »	1,47	2,42
12 » »	1,48	2,45
14 » »	1,79	2,95
15 » »	1,74	2,87
16 » »	1,79	2,95
18 » »	1,60	2,63
19 » »	1,74	2,87
20 » »	1,74	2,87
25 » »	1,68	2,77
28 » »	1,50	2,47
29 » »	1,45	2,39
30 » »	1,38	2,28
1 sept. »	1,44	2,38
3 » »	1,47	2,42
5 » »	1,43	2,36

M. Ytprof från Kristineberg, Åbacks brygga.

Tid.	Gram klor per 100 cm.³	Motsvarande gram klornatrium.
20 juli 1888	1,55	2,55
26 » »	1,29	2,12
27 » »	1,33	2,20
28 » »	1,31	2,16
29 » »	1,31	2,16
30 » »	1,28	2,11
31 » »	1,36	2,25
1 aug. »	1,31	2,16
5 » »	1,26	2,07
8 » »	1,26	2,07
9 » »	1,27	2,09
11 » »	1,26	2,07
13 » »	1,26	2,08
14 » »	1,32	2,18
15 » »	1,35	2,22
16 » »	1,31	2,15
17 » »	1,25	2,06

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1891. N:o 1.
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska Laboratorium.

190. Om m-Dinitrodifenyldisulfin.

Af Alfr. Ekbom.

[Meddeladt den 14 Januari 1891 genom P. T. Cleve.]

Då jag vid ett tillfälle behandlade m-nitrobenzolsulfonsyreklorid i isättikelösning med medels fosfor beredd jodvätesyra — dess specifika vikt var ej bestämd —, afskilde sig jod. Alltsammans fick stå å vattenbad ett par timmar, hvarvid en olja bildades, som vid begjutning med alkohol stelnade. Denna uttvättades med alkohol, utpressades och omkristalliserades ur nyssnämda ämne. Ur alkohollösningen utföllo först prismer med romboedriska sidoytor, sedan långa vackra, färglösa nålar. Både prismerna och nålarne smälte vid 123° C. Vid omkristallisation ur alkohol steg smältpunkten 1° C. Som substansen ej tycktes vara enhetlig, omkristalliserades den ur isättika och erhölls härvid dels prismer med rombiska-romboedriska sidoytor, dels nålar. Prismerna och nålarne smälte vid 124° C. När dessa omkristalliserades ur isättika, utkristalliserade endast prismer med smältpunkten 124° C. Föreningen, omkristalliserad ur ligorin, visade sig äga konstant smältpunkt.

Substansen aftog ej i vikt vid 110° C.

Den var såväl klor- som jodfri.

Å öfver svafvelsyra till konstant vikt torkadt material gjordes följande *analyser*, af hvilka 1, 2, 5 och 6 äro utförda å de ur alkohol erhållna nålarne, 3 och 4 å de ur isättika erhållna prismerna:

1) 0,3311 gr. gaf vid förbränning med $PbCrO_4$ 0,0939 gr. H_2O, motsvarande 0,010433 gr. H, samt 0,5203 gr. CO_2, motsvarande 0,1419 gr. C.

2) 0,2593 gr. gaf vid förbränning på samma sätt 0,0734 gr. H_2O, motsvarande 0,008155 gr. H, samt 0,4073 gr. CO_2, motsvarande 0,111081 gr. C.

3) 0,1801 gr. gaf vid förbränning på samma sätt 0,0501 gr. H_2O, motsvarande 0,005566 gr. H, och 0,2821 gr. CO_2, motsvarande 0,076936 gr. C.

4) 0,1795 gr. gaf vid förbränning med CuO 12,8 cm^3 N-gas, mätt öfver kalilut vid 764 mm. barometertryck och 15°,6 C., motsvarande 0,015288 gr. N.

5) 0,1769 gr. gaf vid förbränning på samma sätt 12,5 cm^3 N-gas, mätt öfver kalilut vid 766,5 mm. barometertryck och 15°,1 C., motsvarande 0,015024 gr. N.

6) 0,1795 gr. gaf vid förbränning med $KClO_3$ och Na_2CO_3 0,25374 gr. $BaSO_4$, motsvarande 0,034848 gr. S.

I procent:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
C	42,8	42,8	42,7	—	—	—
H	3,2	3,1	3,1	—	—	—
N	—	—	—	8,5	8,5	—
S	—	—	—	—	—	19,4.

Å nålarne, torkade till konstant vikt, gjordes följande *molekularviktsbestämning efter* RAOULTS *metod*[1]).

0,1752 gr. löstes i 16,0763 gr. isättika; depressionen belöpte sig till 0,142°.

Häraf beräknades

molekularvikten 299,3.

Förhållande vid reduktion.

När substansen, löst i isältika, försattes med jodvätesyra af spec. vikt 1,56, frigjordes jod. Sedan blandningen upphettats å

[1]) K. AUWERS (Ber. d. Deutschen chem. Ges. XXI, p. 701) och E. BECKMANN (Zeitschr. f. phys. Chemie II, p. 638 och 715).

vattenbad en liten stund, tillsattes vatten, tills en fällning uppstod. Densamma tvättades med en liten kvantitet alkohol och omkristalliserades ur samma lösningsmedel. Därvid erhölls m-dinitrodifenyldisulfid[1]), hvilken kristalliserade än i buskformigt förenade nålar, än i rombiska taflor med smältpunkten 84° C.

Äfven af svafvelsyrlighet reduceras produkten (124° C.) till m-dinitrodifenyldisulfid.

På grund af analyserna, molekularviktsbestämningen samt förhållandet vid reduktion måste den vid 124° C. smältande substansen vara m-dinitrodifenyldisulfin,

NO_2 NO_2

—SO . SO— .

Denna, hvars molekularvigt är 340, fordrar nämligen i procent:

C_{12}	144	42,4
H_8	8	2,4
N_2	28	8,2
S_2	64	18,8
O_6	96	28,2
	340	100,0.

m-Dinitrodifenyldisulfinen är i varm alkohol lättlöslig, i kall svårlöslig; i isättika löses densamma lättare än i alkohol. Den är svårlöslig i ligroin och kristalliserar ur detta lösningsmedel i nålar. I vatten olöslig.

m-Dinitrodifenyldisulfin bildas, som jag nedan kommer att visa, vid inverkan af beräknad mängd jodvätesyra på m-nitrobenzolsulfonsyreklorid och reduceras vid ytterligare inverkan af jodvätesyra till m-dinitrodifenyldisulfid.

---

[1]) Jfr CLEVE: Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1887, N:o 5, pag. 243 och Ber. d. Deutschen chem. Ges. XX, p. 1534 och XXI: 1, p. 1099.
Jfr LEUCKART: Journal für prakt. Chemie 1890, 4, 5, 6, pag. 198.

Reaktionerna åskådliggöras af ekvationerna:

$$2\,NO_2C_6H_4\text{—}SO_2.Cl + 6HJ = NO_2C_6H_4\text{—}SO.SO\text{—}C_6H_4NO_2 + 2HCl + 2H_2O + 3J_2$$

$$NO_2C_6H_4\text{—}SO.SO\text{—}C_6H_4NO_2 + 4HJ = NO_2C_6H_4\text{—}S\text{—}S\text{—}C_6H_4NO_2 + 2H_2O + 2J_2$$

Härmed öfvergår jag till redogörelsen för dė experiment jag utfört för framställande af m-dinitrodifenyldisulfin.

Experiment I. 5 gr. m-nitrobenzolsulfonsyreklorid löstes i isättika, och därtill sattes den för bildning af m-dinitrodifenyldisulfin erforderliga mängden 20-procentig jodvätesyra, hvarvid jod frigjordes. Alltsammans fick stå å vattenbad 10 minuter. Svafvelsyrlighetsvatten tillsattes, och utföll härvid en gul olja, som snart stelnade. Då denna omkristalliserades ur isättika, utföllo vid afsvalning gula, rombiska kristaller af smältpunkt 84° C. Svafvelsyrligheten har alltså reducerat m-dinitrodifenyldisulfinen till m-dinitrodifenyldisulfid.

Experiment II. 4,84 gr. m-nitrobenzolsulfonsyreklorid i isättikelösning försattes med den för bildning af disulfin erforderliga mängden jodvätesyra af spec. vikt 1,56. Blandningen upphettades å vattenbad under $2^1/_2$ tmr. Vatten tillsattes, tills fällning uppstod. Sedan denna fått afsätta sig, affiltrerades densamma samt tvättades med alkohol. Fällningen, som visade sig bestå af färglösa nålar, omkristalliserades upprepade gånger ur alkohol. Ur alkohollösningen utföllo nålar med smtpkt 124° C.

Experiment III. 3,61 gr. m-nitrobenzolsulfonsyreklorid behandlades på samma sätt som i experiment II med den skillnad, att blandningen uppvärmdes 2 minuter å vattenbad. m-Dinitrodifenyldisulfin — smtpkt 124° C. — erhölls.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts. från sid. 2.)

Stockholm. *Ingeniörsföreningen.*
Förhandlingar. Årg. 24(1889): H. 1—6. 4:o.
— *Svenska jägarförbundet.*
Ny tidskrift. Årg. 28(1889). 8:o.
Lund. *Universitetsobservatorium.*
Observations des étoiles de la zone entre 35° & 40° de déclinaison boréale, reduites à l'équinoxe moyen de 1875,0, par N. C. Dunér & F. Engström. T. 2: 1—2. 1889. 4:o.
Upsala. *K. Universitetet.*
Årsskrift. År 1889. 8:o.
Akademiskt tryck. År 1889/90. 31 häft. 8:o & 4:o.
Kristiania. *Norges geografiske Opmaaling.*
Topografisk kart over Kongeriget Norge. $^{1}/_{100000}$. Bl. 14 A, 20 D, 21 A, 21 C, 31 B, 45 D, 49 C, 51 D, 54 C, 56 A, 56 B, 57 B. 1889—90. 4:o.
Specialkart over den Norske kyst. $^{1}/_{50000}$. Bl. 41, 43. 1889. Tvf.
Den geologiske Undersögelse. $^{1}/_{100000}$. Bl. 20 C, 46 A. 18.. F.
Belfast. *Natural history and philosophical society.*
Report and proceedings. Session 1889/90. 8:o.
Berlin. *Entomologischer Verein.*
Berliner entomologische Zeitschrift. Bd. 35(1890): H. 2. 8:o.
Buenos Aires. *Sociedad científica Argentina.*
Anales. T. 30(1890): Entr. 5—6. 8:o.
Calcutta. *Indian museum.*
DISTANT, W. L., A monograph of Oriental Cicadidæ. P. 3. 1890. 4:o.
Cambridge, U. S. *Museum of comparative Zoology.*
Bulletin. Vol. 16. N:o 8—9; 19: 4; 20: 1—5. 1890. 8:o.
— *Entomological club.*
Psyche. Vol. 5: N:o 165—176. 1890. 4:o.
Córdoba. *Observatorio nacional Argentino.*
Resultados. Vol. 12(1879). 4:o.
Dublin. *R. Irish Academy.*
Transactions. Vol. 29: P. 12—13. 1889—90. 4:o.
Proceedings. (3) Vol. 1: N:o 2—3. 1889—90. 8:o.
— *R. Dublin Society.*
Scientific proceedings. (2) Vol. 6: P. 9. 1890. 8:o.
Genova. *Museo civico di storia naturale.*
Annali. Vol. 27—29. 1889—90. 8:o.
Halle. *K. Akademie Deutscher Naturforscher.*
Nova acta. T. 54. 1890. 4:o.
Leopoldina. H. 25(1889). 4:o.

Kjöbenhavn. *K. Danske Videnskabernes Selskab.*
Afhandlinger. (6) Naturvidensk. og mathem. Afd. Bd. 5: 3; 6: 1; 7: 1—2. 1890. 4:o.
» » Histor. og philos. » Bd. 1: 1. 1890. 4:o.
Oversigt over Forhandlingerne. Aar 1889: N:o 3; 1890: 1—2. 8:o.

Leiden. *Sternwarte.*
Annalen. Bd. 5—6. 1890. 4:o.
Verslag van den Staat der Sterrenwacht. 1871/72—1888/89. 8:o.

London. *R. Geographical society.*
Proceedings. Vol. 12 (1890): N:o 1—12. 8:o.
— *R. Microscopical society.*
Journal. Year 1890: N:o 74—79. 8:o.
— **(Ontario).** *Entomological society of Ontario.*
The Canadian entomologist. Vol. 22 (1890): 1—12. 8:o.

México. *Sociedad científica »Antonio Alzate».*
Memorias. T. 2 (1888/89): C. 12; 3 (1889/90): C. 4—8, 11—12.

Montreal. *Natural history society.*
Canadian record of science. Vol. 3: N:o 8; 4: 1—4. 1888—90. 8:o.

Napoli. *Accademia Pontaniana.*
Atti. Vol. 20. 1890. 4:o.

Palermo. *Circolo matematico.*
Rendiconti. T. 4 (1890): F. 1—6. 8:o.

Paris. *Académie des sciences.*
Comptes rendus hebdomadaires des séances. Vol. 110: N:o 1—26; 111: 1—26. 1890. 4:o.
— *Société Linnéenne.*
Bulletin mensuel. N:o 104—112. 1890. 8:o.

Philadelphia. *Academy of natural sciences.*
Proceedings. Year 1890: P. 1—2. 8:o.

Roma. *R. Istituto botanico.*
Annuario, redatto da R. Pirotta. Anno 4 (1889/90). 4:o.

Torino. *R. Accademia delle scienze.*
Memorie (2) T. 40. 1890. 4:o.
Atti. Vol. 25 (1889/90): Disp. 1—15: a—b. 8:o.
Osservazioni meteorologiche fatte all'osservatorio della università di Torino . . . Anno 1888—1889. 8:o.

Toronto. *Canadian institute.*
Annual report. Session 1888/89. 8:o.
Proceedings. Vol. 25: N:o 1—2. 1889—90. 8:o.

Wien. *K. K. Geologische Reichsanstalt.*
Abhandlungen. Bd. 15: H. 2. 1890. 4:o.
— *K. K. Universitäts-Sternwarte.*
Annalen. Supplbd. 1: Katalog der Argelander'schen Zonen vom 15 bis 31 Grade südl. Declination in mittleren Positionen für 1850.0. Hrsg. von E. Weiss. 1890. 8:o.
— *Zoologisch-botanische Gesellschaft.*
Verhandlungen. Bd. 40 (1890): Qu. 1—4. 8:o.

Würzburg. *Physikalisch-medicinische Gesellschaft.*
Verhandlungen. Neue Folge. Bd. 24: N:o 1—5. 1890. 8:o.
Sitzungs-Berichte. Jahrg. 1890: N:o 1—5. 8:o.

Utgifvarne.
Acta mathematica. 13: 1—4. 1890. 4:o.
Bibliotheca mathematica. (2) 4 (1890): N:o 1—4. 8:o.
Anzeiger, Zoologischer, hrsg. von J. V. CARUS. Jahrg. 13 (1890): N:o 325—352. Leipzig. 8:o.
American journal of science. (3) Vol. 39—40 (1890): N:o 229—240. 8:o.

Författarne.
APPELLÖF, A., Teuthologische Beiträge. Bergen 1890. 8:o.
BRÖGGER, W. C. & BÄCKSTRÖM, H., Die Mineralien der Granatgruppe. Leipzig. 1890. 8:o.
GULLSTRAND, A., Om bräunlinier vid astigmatism. 8:o.
— Beitrag zur Theorie des Astigmatismus. Leipzig. 1890. 8:o.
LECHE, W., Bronn's Klassen und Ordnungen des Thier-Reichs. Bd. 6: Abth. 6. Mammalia, fortgesetzt von W. Leche. Lief. 35—36. Heidelberg 1890. 8:o.
LJUNGMAN, A. W., Berättelsen öfver Göteborgs och Bohus läns hafsfisken under 1888/89. Göteb. 1890. 8:o.
— Småskrifter. 3 st. 8:o.
NYMAN, C. F., Conspectus floræ Europææ. Suppl. 2: P. 2. Örebro 1890. 8:o.
STOLPE, H., Über Altmexikanische und Südamerikanische Wurfbretter. Leiden. 1890. 4:o.
WITTROCK, V. B., Några bidrag till Bergianska stiftelsens historia. Sthm 1890. 4:o.
v. BENKO, J., Das Datum auf den Philippinen. Wien 1890. 8:o.
FRESENIUS, R., Die Thermalquellen Wiesbadens in chemischer Beziehung. Wiesbaden 1890. 8:o.
HJELT, E., Den Kemiska institutionen vid Finska universitetet 1761—1890. Hfors 1890. 4:o.
KRÆPELIN, K., Revision der Skorpione. 1. Androctonidæ. Hamburg 1891. 8:o.
SAINT-LAGER, J., Le procès de la nomenclature botanique et zoologique. Paris 1886. 8:o.
— Recherches sur les anciens herbaria. Paris 1886. 8:o.

Stockholm 1891. Kongl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS
FÖRHANDLINGAR.

Årg. 48. 1891. № 2.

Onsdagen den 11 Februari.

INNEHÅLL:

Med anledning deraf, att Hr S. LOVÉN, som vid Akademiens Februari-sammankomst år 1841 kallades och utnämndes till Intendent för det Naturhistoriska Riksmuseets afdelning för lägre ryggradslösa djur, således nu innehaft denna befattning under ett halft århundrade, beslöt Akademien att till honom aflåta en hyllnings- och lyckönskningsadress, till hvilken ett uppsatt förslag upplästes och godkändes. Till ett varaktigare minne af ett så sällsynt förhållande beslöt Akademien derjemte att låta prägla en särskild medalj, till hvilken ett uppgjordt förslag jemväl föredrogs och af Akademien för dess del godkändes.

På tillstyrkan af utsedda komiterade antogs följande afhandlingar till införande i Akademiens Handlingar:

1:o) »Examen des nouvelles tables d'integrales définies de M. BIERENS DE HAAN. Amsterdam 1867», af Lektor C. F. LINDMAN;

2:o) »Anatomische Studien über skandinavische Cestoden», af Fil. Licentiaten E. LÖNNBERG;

3:o) »Ueber den Bau der Ogmogaster plicata (Creplina)», af Fil. Kandidaten L. A. JÄGERSKIÖLD;

4:o) »Bromeliaceæ Herbarii Regnelliani. I.», af Lektor C, A. M. LINDMAN.

Hr ROSÉN höll ett föredrag om önskvärdheten af en gradmätnings utförande på Spetsbergen och om sättet derför.

Hr WITTROCK redogjorde för innehållet af Lektor C. A. M. LINDMANS ofvan nämnda afhandling.

Hr RETZIUS framlade för Akademien sitt nyligen från trycket utkomna arbete: »Biologische Untersuchungen. Neue Folge. I.»

Sekreteraren öfverlemnade följande inkomna afhandlingar och uppsatser: 1:o) »Bestämning af vattenångans maximi-spänstighet vid låga temperaturer», af Fil. Licentiaten J. JUHLIN (se Bihang till K. Vet.-Akad. Handl.); 2:o) »Jemförelse mellan ÅNGSTRÖMS och NEUMANNS metoder för bestämning af kroppars ledningsförmåga för värme. I, af Fil. Licentiaten K. L. HAGSTRÖM*; 3:o) »Smånotiser om de lösa jordlagren», af Professor B. LUNDGREN*; 4:o) »Protanthea simplex, eine eigenthümliche Actinie», af Fil. Kandidaten O. CARLGREN*.

Af de LETTERSTEDTSKA räntemedlen till pris för förtjenstfulla originalarbeten beslöt Akademien denna gång bilda två pris, af hvilka det ena skulle öfverlemnas till e. o. Professorn i praktisk medicin vid Upsala universitet D:r S. E. HENSCHEN för hans nyligen från trycket utkomna förtjenstfulla arbete: »Klinische und anatomische Beiträge zur Pathologie des Gehirns. Th. I», och det andra priset till Amanuensen vid Meteorologiska Centralanstalten D:r H. E. HAMBERG för hans, särskildt i tidskriften: »Månadsöfversigt af väderleken i Sverige», hvars 10:de årgång nyligen fullständigt lemnat pressen, förtjenstfulla undersökningar af Sveriges klimatförhållanden.

Det LETTERSTEDTSKA priset för förtjenstfull öfversättning till svenska språket fann Akademien icke anledning att denna gång bortgifva.

De LETTERSTEDTSKA räntemedlen för maktpåliggande undersökningar skulle ställas till Professorns vid Lunds universitet

D:r B. LUNDGRENS förfogande för fortsättning och afslutning af hans under flere föregående år utförda undersökningar öfver kritlagren i nordöstra Skåne.

Följande skänker anmäldes:

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

Stockholm. *Geologiska föreningen.*
Förhandlingar. Bd. 12(1890); Generalregister till Bd. 6—10. 1890. 8:o.
Sachsen. Geologische Landesuntersuchung.
Geologische Specialkarte $^{1}/_{25,000}$, bearbeitet unter Leitung von H. Credner. Bl. 33—35, 51—52, 69, 119, 143, nebst Erläuterungen. Lpz. 1890. F. & 8:o.
California. State mining bureau.
Annual report of the state mineralogist. 1889 $^{1}/_{12}$. 8:o.
Småskrifter. 44 st. 8:o.
— *Svenska sällskapet för anthropologi och geografi.*
Ymer. Årg. 9(1889): H. 1—6. 8:o.
Kristiania. *Kommitteen for den Norske Nordhavs-Expedition.*
Den Norske Nordhavs-Expedition. 20. 1891. F.
Basel. *Naturforschende Gesellschaft.*
Verhandlungen. Bd. 9: H. 1. 1890. 8:o.
Belgrad. *Académie R. de Serbie.*
Spomenik. 2, 5—6. 1890. 4:o.
Glas. 18, 21—22. 1890. 8:o.
Godišnjak. 2(1888). 16:o.
Småskrift. 1. 8:o.
Berlin. *K. Akademie der Wissenschaften.*
JACOBI, C. G. J., Gesammelte Werke. Bd. 5. 1890. 4:o.
— *Physikalische Gesellschaft.*
Die Fortschritte der Physik. Jahrg. 40(1884): Abth. 1—3. 1890. 8:o.
Cambridge, U. S. *Museum of comparative zoology.*
Annual report. Year 1889/90. 8:o.
— *Astronomical observatory of Harvard college.*
Annals. Vol. 21: P. 2; 24, 30: 1. 1890. 4:o.
BAKER, D. W., History of the Harvard college observatory, 1849—1890. 1890. 8:o.
Frankfurt a/M. *Senckenbergische naturforschende Gesellschaft.*
Abhandlungen. Bd. 16: H. 2. 1890. 4:o.
Ithaca, U. S. *Cornell university.*
Bulletin (Science). Vol. 1: N:o 1—2; 2. 1874—86. 8:o.
Library bulletin. Vol. 1: 1—13; 2: 14—27. 1886—90. 8:o.
Special lists [of the library]. N:o 1. Mathematics. 1883. 8:o.
Småskrift. 1. 8:o.
Kew. *Observatory.*
Report of the Kew committee, 1890 $^{31}/_{10}$. 8:o.

Klagenfurth. *Naturhistorisches Landesmuseum.*
Jahrbuch. H. 21. 1889. 8:o.
Krakau. *Académie des sciences.*
Bulletin international. Compte rendu des séances. Année 1890: N:o 1—10. 8:o.
London. *Chemical society.*
Journal. Vol. 57—58 (1890): N:o 326—337: a—b. 8:o.
Proceedings. Year 1890: N:o 76—80; 82—89. 8:o.
Odessa. *Société des naturalistes de la Nouvelle Russie.*
Sapiski. T. 15: 1—2. 1890. 8:o.
» Matematiska afd. T. 11. 1890. 8:o.
Paris. *Société géologique de France.*
Mémoires: Paléontologie. T. 1: F. 2—3. 1890. 4:o.
— *Société de géographie.*
Bulletin. (7) Vol. 10 (1889): Trim. 1—4. 8:o.
Compte rendu. Annee 1889: N:o 1—17. 8:o.
Regensburg. *K. Bayerische botanische Gesellschaft.*
Flora, oder Allgemeine botanische Zeitung. Jahrg. 73 (1890): H. 1—5. 8:o.
Rom. *Reale Accademia dei lincei.*
Rendiconti. Vol. 6 (1890): Sem. 1—2. 8:o.
— *Accademi Pontificia de' nuovi lincei.*
Atti. Anno 42 (1888/89): Sess. 7; 43 (1889/90): 1—6. 4:o.
San Francisco. *California academy of sciences.*
Occasional papers. 1—2. 1890. 8:o.
Stettin. *Entomologischer Verein.*
Stettiner entomologische Zeitung. Jahrg. 51 (1890): N:o 1—12. 8:o.
Tacubaya. *Observatorio astronómico nacional.*
— Anuario. Año 11 (1891). 16:o.
Washington. *Nautical almanac office.*
Astronomical papers, prepared for the use of the American Ephemeris and nautical almanac. Vol. 2: P. 5; 4. 1890. 4:o.
— *Naval observatory.*
Report of the superintendent 1890 $^{30}/_{6}$. 8:o.
Wien. *K. K. Naturhistorisches Hofmuseum.*
Annalen. Bd. 5 (1890): N:o 1—4. st. 8:o.
— *K. K. Geologische Reichsanstalt.*
Abhandlungen. Bd. 14. 1890. st. 8:o.
Jahrbuch. Bd. 40 (1890): H. 1—2. 8:o.
Wiesbaden. *Nassauischer Verein für Naturkunde.*
Jahrbücher. Jahrg. 43. 1890. 8:o.
Hr D:r J. A. Leffler. Stockholm.
Crépin, F., Excursions rhodologiques dans les Alpes en 1889. Gand 1889. 8:o.
Småskrifter. 8 st. 8:o.

(Forts. å sid. 90.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1891. N:o 2.
Stockholm.

Jämförelse mellan Ångströms och Neumanns metoder för bestämning af kroppars ledningsförmåga för värme.

Af K. L. Hagström.

[Meddeladt den 11 Februari 1891 genom T. R. Thalén.]

I. Teoretisk grundläggning.

Differentialekvationen för det variabla temperaturtillståndet i en jemntjock stång, hvars genomskärningsarea icke är större, än att temperaturen i densamma kan anses vara konstant alltigenom, kan skrifvas

$$c\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{hp}{q} = 0, \tag{1}$$

där v betecknar temperaturöfverskottet öfver omgifningen, hvars temperatur sålunda blir vår nollpunkt, c specifika värmet per volymsenhet, k och h lednings- och strålningsförmågan samt p och q stångens omkrets och genomskärningsarea.

Vår första uppgift skall blifva att söka en generell solution till vår differentialekvation, som sedermera skall tillämpas både på Ångströms och Neumanns metoder genom olika konstantbestämningar i öfverensstämmelse med de för de båda metoderna egendomliga sidovilkoren.

Härledning af generella solutionen till (1) 1:o) under antagande, att c, k och h äro oberoende af v.

För detta fall kunna vi skrifva (1)

$$\frac{\partial v}{\partial t} - K\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Hv = 0, \tag{2}$$

nämligen

$$K = \frac{k}{c} \text{ och } H = \frac{hp}{cq}.$$

Genom insättning finner man, att

$$v = e^{\nu x + \varrho t}$$

är en partikulär solution till (2), om

$$\varrho = K\nu^2 - H.$$

Af oändligt många partikulära solutioner af samma form bilda vi en generell solution

$$v_1 = \Sigma A_n e^{\nu_n x + (K\nu_n^2 - H)t} = \Sigma A_n e^{\psi_n},$$

där A_n och ν_n äro arbiträra och n varierar mellan o och ∞.

En annan generell solution erhålles på samma sätt

$$v_2 = \Sigma A'_n e^{\nu'_n x + (K\nu'^2_n - H)t} = \Sigma A'_n e^{\psi'_n},$$

och ur dessa båda genom addition den generella solutionen

$$v = \Sigma A_n e^{\psi_n} + \Sigma A'_n e^{\psi'_n}, \tag{3}$$

där

$$\psi_n = \nu_n x + (K\nu_n^2 - H)t,$$
$$\psi'_n = \nu'_n x + (K\nu'^2_n - H)t.$$

Ekvationen (3) är den sökta generella solutionen.

2:o) *Antagas åter c, k och h beroende af temperaturen*, så införa vi i (1)

$$c = c_0(1 + 2\gamma v),$$
$$k = k_0(1 + 2\varkappa v),$$
$$h = h_0(1 + \eta v),$$

där c_0, k_0, och h_0 gälla för omgifningens temperatur samt 2γ, $2\varkappa$ och η beteckna temperaturkoefficienterna.

Termerna i (1) få då följande utseende:

$$c\frac{\partial v}{\partial t} = c_0\frac{\partial v}{\partial t} + \gamma c_0\frac{\partial v^2}{\partial t},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial v}{\partial x}\right) = k_0\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varkappa k_0\frac{\partial^2 v^2}{\partial x^2},$$

$$\frac{hp}{q}v = \frac{h_0p}{q}v + \eta\frac{h_0p}{q}v^2.$$

Införas dessa uttryck i (1) och ekvationen divideras med c_0, erhålles följande utseende på vår differentialekvation:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \gamma\frac{\partial v^2}{\partial t} - K\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \varkappa K\frac{\partial^2 v^2}{\partial x^2} + Hv + \eta Hv^2 = 0, \qquad (4)$$

där

$$K = \frac{k_0}{c_0} \quad \text{och} \quad H = \frac{h_0p}{c_0q}.$$

Under antagande att γ, $\varkappa$, η äro små kvantiteter, hvilkas kvadrater och produkter vi kunna försumma, kan den generella solutionen till (4) härledas på följande sätt.

Ponera vi

$$v = Ae^{\psi} + A^2\varepsilon e^{2\psi}, \qquad (5)$$

där

$$\psi = \nu x + \varrho t$$

och ε en lineär funktion af γ, $\varkappa$, η, samt följaktligen enligt nyssnämda antagande

$$v^2 = A^2e^{2\psi},$$

så blir, såsom man lätt finner genom insättning, ekvationen (5) en partikulär solution till (4), om vi bestämma ϱ och ε så, att

$$\varrho = K\nu^2 - H$$

och

$$\varepsilon = -\frac{2\gamma\varrho - 4\varkappa K\nu^2 + \eta H}{2\varrho - 4K\nu^2 + H} = \frac{2K\nu^2(\gamma - 2\varkappa) + H(\eta - 2\gamma)}{2K\nu^2 + H},$$

ty härigenom komma derivatorna af första termen i v att taga ut hvarandra särskildt, och derivatorna af andra termen i v att taga ut derivatorna af v^2.

Af två partikulära solutioner

$$v_1 = A_1e^{\psi_1} + A_1^2\varepsilon_1e^{2\psi_1},$$

och

$$v_2 = A_2e^{\psi_2} + A_2^2\varepsilon_2e^{2\psi_2},$$

där i uttrycken för ψ_1 och ψ_2 samt ε_1 och ε_2 ingå ν_1 och ϱ_1 samt ν_2 och ϱ_2, bilda vi en ny partikulär solution

$$v = v_1 + v_2 + 2A_1A_2\delta_{12}e^{\psi_1+\psi_2},$$

där sista termen tillkommit för att eliminera dubbla produkten i v^2, som ju har utseendet

$$v^2 = A_1^2e^{2\psi_1} + A_2^2e^{2\psi_2} + 2A_1A_2e^{\psi_1+\psi_2}.$$

Man finner vid insättning

$$\delta_{12} = -\frac{\gamma(\varrho_1+\varrho_2) - \varkappa K(\nu_1+\nu_2)^2 + \eta H}{(\varrho_1+\varrho_2) - K(\nu_1+\nu_2)^2 + H}.$$

Af oändligt många partikulära solutioner af formen

$$v_n = A_ne^{\psi_n} + A_n^2\varepsilon_ne^{2\psi_n}$$

bilda vi på samma sätt en generell solution

$$v = \sum A_ne^{\psi_n} + \sum A_n^2\varepsilon_ne^{2\psi_n} + \sum_{m \gtrless n} A_mA_n\delta_{mn}e^{\psi_m+\psi_n}, \qquad (6)$$

där sista summan tillkommit för att eliminera sista summan i uttrycket för v^2:

$$v^2 = \left(\sum A_ne^{\psi_n}\right)^2 = \sum A_n^2e^{2\psi_n} + \sum_{m \gtrless n} A_mA_ne^{\psi_m+\psi_n}.$$

Man finner, analogt med δ_{12},

$$\delta_{mn} = -\frac{\gamma(\varrho_m+\varrho_n) - \varkappa K(\nu_m+\nu_n)^2 + \eta H}{(\varrho_m+\varrho_n) - K(\nu_m+\nu_n)^2 + H},$$

eller

$$\delta_{mn} = \frac{K\{\gamma(\nu_m^2+\nu_n^2) - \varkappa(\nu_m+\nu_n)^2\} + H(\eta - 2\gamma)}{2K\nu_m\nu_n + H},$$

om vi införa uttryckena för ϱ_m och ϱ_n,

$$\varrho_m = K\nu_m^2 - H,$$

$$\varrho_n = K\nu_n^2 - H;$$

samt, analogt med nyss angifna värde på ε,

$$\varepsilon_n = \frac{2K\nu_n^2(\gamma - 2\varkappa) + H(\eta - 2\gamma)}{2K\nu_n^2 + H}.$$

Här observera vi, att

$$\delta_{nn} = \varepsilon_n,$$

hvaraf följer, att de två sista summorna i (6) kunna sammanslås till en enda, och vår generella solution blir:

$$v = \Sigma A_n e^{\psi_n} + \Sigma A_m A_n \delta_{mn} e^{\psi_m + \psi_n},$$

där i sista summan, liksom öfverallt i det följande, där dylika dubbelsummor förekomma, $m \gtreqless n$.

Bilda vi nu medels andra värden A'_n och ν'_n på de ingående konstanterna en ny generell solution

$$v' = \Sigma A'_n e^{\psi'_n} + \Sigma A'_m A'_n \delta'_{mn} e^{\psi'_m + \psi'_n},$$

där

$$\delta'_{mn} = \frac{K\{\gamma(\nu'^2_m + \nu'^2_n) - \varkappa(\nu'_m + \nu'_n)^2\} + H(\eta - 2\gamma)}{2K\nu'_m\nu'_n + H},$$

så erhålles ur dessa båda den generella solutionen

$$\begin{aligned} v = {} & \Sigma A_n e^{\psi_n} + \Sigma A'_n e^{\psi'_n} + \Sigma A_m A_n \delta_{mn} e^{\psi_m + \psi_n} + \\ & + \Sigma A'_m A'_n \delta'_{mn} e^{\psi'_m + \psi'_n} + 2\Sigma A_m A'_n \varepsilon_{mn} e^{\psi_m + \psi'_n}. \end{aligned} \tag{7}$$

Sista summan har här tillkommit för elimination af sista summan i v^2:

$$v^2 = \Sigma A_m A_n e^{\psi_m + \psi_n} + \Sigma A'_m A'_n e^{\psi'_m + \psi'_n} + 2\Sigma A_m A'_n e^{\psi_m + \psi'_n}.$$

Man finner, analogt med uttrycken för δ_{mn} och δ'_{mn},

$$\varepsilon_{mn} = \frac{K\{\gamma(\nu^2_m + \nu'^2_n) - \varkappa(\nu_m + \nu'_n)^2\} + H(\eta - 2\gamma)}{2K\nu_m\nu'_n + H}.$$

Ekvationen (7) är den sökta generella solutionen till vår differentialekvation (4). Såsom synes är den föregående solutionen (3) ett specialfall af (7).

Vi gå nu att tillämpa dessa båda solutioner på de särskilta metoderna, ÅNGSTRÖMS och NEUMANNS.

I. Ångströms metod.

Vi lemna här för tydlighets skull en kort framställning af tillvägagåendet vid observationer enligt ÅNGSTRÖMS metod[1]).

[1]) Metoden finnes beskrifven jämte resultaterna af ÅNGSTRÖMS försök med densamma i Öfversigt af K. Vet.-Akad. Förh., 1861 pag. 3 och d:o 1862 pag. 21. Se också: Pogg. Ann. 1861, band 114 pag. 513; Pogg. Ann. 1863,

Om en stång t. ex. af metall i sin ena ända utsättes för på hvarandra periodiskt följande upphettningar och afkylningar under bestämda tider, så komma slutligen temperaturerna i stångens skilda punkter i periodiska oskillationer mellan bestämda gränser och omkring en för hvarje punkt bestämd medeltemperatur. — Observerar man t. ex. medels termometrar temperaturens gång under en period på skilda ställen af stången, så finner man, att amplituderna för dessa oskillationer eller vågor aftaga, i den mon man aflägsnar sig från stångens ända, äfvensom att en fasskilnad mellan de särskilda punkternas vågor uppstår, och det så, att maxima och minima hos längre bort belägna punkter inträffa senare. Liksom hvarje periodiskt fenomen kunna temperaturerna under en period i en punkt hvilken som helst af stången återges genom en Fouriers serie[1])

$$v = a_x + a'_x \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + b'_x\right) + a''_x \sin\left(\frac{4\pi t}{T} + b''_x\right) + \ldots, \qquad (8)$$

där x betecknar punktens afstånd från ett godtyckligt valdt origo.

För att nu våra i det föregående gifna generella solutioner (3) eller (7) skola kunna tillämpas på Ångströms metod, så bör konstantbestämningen i den generella solutionen kunna ske så, att för ett visst värde på x den generella solutionen blir identisk med serien (8), hvartill ytterligare kommer, om stången är oändligt lång, det vilkoret, att $v = 0$ för $x = \infty$, eller om stången har ändlig längd, att differentialekvationen, som gäller för stångens fria ända, bör vara satisfierad; hvarom mera framdeles.

1:o. Stången oändligt lång, c, k, h konstanta.

Vår differentialekvation (3)

$$v = \Sigma A_n e^{\psi_n} + \Sigma A'_n e^{\psi'_n}$$

---

band 118 pag. 423; samt Pogg. Ann. 1864, band 123 pag. 628. Metoden har äfven användts af Professor C. G. LUNDQUIST: Undersökning af några vätskors ledningsfömåga för värme, Akad. afhandling 1869.

[1]) Se t. ex. DIENGER, Ausgleichung der Beobachtungsfehler, Braunschweig 1857, pag. 95, eller DOVE, Rep. d. Physik II B., pag 273.

transformera vi på följande sätt. Vi antaga

$$\nu_n = -(\lambda_n + i\mu_n)$$

och

$$\nu'_n = -(\lambda_n - i\mu_n).$$

Härigenom blir

$$\psi_n = -\lambda_n x + [K(\lambda_n^2 - \mu_n^2) - H]t + i[2K\lambda_n\mu_n t - \mu_n x]$$

och

$$\psi'_n = -\lambda_n x + [K(\lambda_n^2 - \mu_n^2) - H]t - i[2K\lambda_n\mu_n t - \mu_n x].$$

Om vi i st. för A_n införa

$$A_n e^{\left(\frac{\pi}{2} + \beta_n\right)i}$$

samt i st. för A'_n införa

$$A_n e^{-\left(\frac{\pi}{2} + \beta_n\right)i},$$

så få vi, om de imaginära delarne af A_n och A'_n slås tillsammans med ψ_n och ψ'_n och en faktor -2 bortkastas, den generella solutionen

$$v = \Sigma A_n e^{-\lambda_n x + [K(\lambda_n^2 - \mu_n^2) - H]t} \sin[2K\lambda_n\mu_n t - \mu_n x + \beta_n]. \qquad (9)$$

Denna solution uppfyller tydligen det vilkoret, att $v = 0$ för $x = \infty$. Skall den därjämte kunna identifieras med (8), så tvingas vi antaga

$$\left.\begin{aligned} K(\lambda_n^2 - \mu_n^2) - H &= 0 \\ K\lambda_n\mu_n &= \frac{n\pi}{T} \end{aligned}\right\}, \qquad (10)$$

och (mellan raderna)

de bekanta Ångströmska relationerna.

Vår ekvation (9) förenklas därigenom till

$$v = \Sigma A_n e^{-\lambda_n x} \sin\left(\frac{2n\pi t}{T} - \mu_n x + \beta_n\right). \qquad (11)$$

Den i första termen, för $n = 0$, ingående arbiträra konstanten β_0 visar sig vara en öfverflödig konstant, åt hvilken vi tilldela värdet $\frac{\pi}{2}$, och vår serie blir, utskrifven:

$$v = A_0 e^{-\lambda_0 x} + A_1 e^{-\lambda_1 x} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \mu_1 x + \beta_1\right) + \\ + A_2 e^{-\lambda_2 x} \sin\left(\frac{4\pi t}{T} - \mu_2 x + \beta_2\right) + \ldots\ldots \tag{11*}$$

Identifieringen med (8) sker nu, om vi för alla möjliga n-värden antaga

$$\left.\begin{aligned} A_n e^{-\lambda_n x} &= a_x^{(n)}, \\ -\mu_n x + \beta_n &= b_x^{(n)}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Sedan sålunda bestämningen af konstanterna A_n och β_n skett, så är problemet fullständigt löst. Ty tänka vi oss en stång af gifven beskaffenhet, d. v. s. med gifna c, k och h samt gifna dimensioner p och q, så äro K och H gifna. Ekvationerna (10) bestämma då λ_n och μ_n, samt ekvationerna (12) A_n och β_n såsom funktioner af de gifna kvantiteterna och de empiristiskt funna $a_x^{(n)}$ och $b_x^{(n)}$, gällande för en punkt på afståndet x från origo; och i ekvationen (11*) äro alla ingående koefficienter bestämda. — Vid experimenteringen enligt Ångströms metod åsyftar man emellertid, att ur observationerna bestämma K och H. Detta sker på följande sätt. Temperaturerna observeras under en period i tvänne af stångens punkter $x = 0$ och $x = x$. Dessa observationer utvecklas i Fouriers serier, af hvilka den ena, gällande för $x = x$, blir vår ekvation (8), som vid identifiering med (11*) ger oss ekvationerna (12), och den andra blir

$$v = a_0 + a'_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + b'_0\right) + a''_0 \sin\left(\frac{4\pi t}{T} + b''_0\right) + \ldots,$$

som identifierad med (11*) ger oss

samt
$$\left.\begin{aligned} A_n &= a_0^{(n)} \\ \beta_n &= b_0^{(n)}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Ur ekvationerna (12) och (13) härledas lätt

$$\left.\begin{aligned} \lambda_n x &= \frac{1}{M} \log \frac{a_0^{(n)}}{a_x^{(n)}} \\ \mu_n x &= b_0^{(n)} - b_x^{(n)}, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

där x = afståndet mellan de båda observationspunkterna. Ur (14) härledas nu λ_n och μ_n samt ur ekvat. (10) K och H.

2:o. Stången af ändlig längd; c, k, h konstanta.

För detta fall tillkommer ett vilkor för stångens fria ända, nämligen

$$\int^{x=z} \left(- kq\frac{\partial v}{\partial x}dt\right) = \int^{x=z} (qcdxdv + qhvdt),$$

där z betyder stångens längd = afståndet mellan första observationspunkten $x = 0$ och fria ändan. Ekvationen uttrycker, att det värme, som genom ledning tillföres ändskiftet af stången, dels användes till skiftets uppvärmning, dels strålar ut vid stångens fria ända. Denna ekvation kan helt enkelt skrifvas

$$\int^{x=z} \left\{\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{h}{k}v\right\} = 0. \tag{14}$$

Man finner lätt, att den i det föregående gifna generella solutionen (11*) icke satisfierar detta vilkor (14).

Sätta vi emellertid uti ekvationen (3)

$$\nu_n = \lambda_n + i\mu_n$$

och

$$\nu'_n = \lambda_n - i\mu_n,$$

så fås en ny generell solution

$$v = \Sigma B_n e^{\lambda_n x} \sin\left(\frac{2n\pi t}{T} + \mu_n x + \gamma_n\right) \tag{15}$$

alldeles analog med (11), ur hvilken den ock tydligen erhålles, om tecknen ändras för λ_n och μ_n samt de arbiträra konstanterna A_n och β_n utbytas mot andra B_n och γ_n.

Ur ekvationerna (11) och (15) erhålles genom addition en generell solution

$$v = \Sigma A_n e^{-\lambda_n x} \sin\left(\frac{2n\pi t}{T} - \mu_n x + \beta_n\right) +$$
$$+ \Sigma B_n e^{\lambda_n x} \sin\left(\frac{2n\pi t}{T} + \mu_n x + \gamma_n\right)^{1)}, \qquad (16)$$

i hvilken solution konstantbestämningen kan ske i öfverensstämmelse med ändvilkoret (14). Ty genom insättning af en term hvilken som helst af (16) i ekvationen (14) erhålles, om indices bortkastas:

$$\left.\begin{array}{l} -A\lambda e^{-\lambda z} \sin\left(\frac{2n\pi t}{T} - \mu z + \beta\right) + B\lambda e^{\lambda z} \sin\left(\frac{2n\pi t}{T} + \mu z + \gamma\right) - \\ -A\mu e^{-\lambda z} \cos\left(\frac{2n\pi t}{T} - \mu z + \beta\right) + B\lambda e^{\lambda z} \cos\left(\frac{2n\pi t}{T} + \mu z + \gamma\right) + \\ +A\frac{h}{k} e^{-\lambda z} \sin\left(\frac{2n\pi t}{T} - \mu z + \beta\right) + B\frac{h}{k} e^{\lambda z} \sin\left(\frac{2n\pi t}{T} + \mu z + \gamma\right). \end{array}\right\} = 0$$

Införas beteckningarne

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda - \frac{h}{k} = M \cos\eta, & \lambda + \frac{h}{k} = N \cos\theta \\ \mu = M \sin\eta, & \mu = N \sin\theta, \end{array}\right\} \qquad (17)$$

och vi sätta koefficienterna till $\sin \frac{2n\pi t}{T}$ och $\cos \frac{2n\pi t}{T}$ hvar för sig $= 0$, så fås efter några reduktioner

$$-Ae^{-\lambda z} M \cos(\eta - \mu z + \beta) + Be^{\lambda z} N \cos(\theta + \mu z + \gamma) = 0$$

och

$$-Ae^{-\lambda z} M \sin(\eta - \mu z + \beta) + Be^{\lambda z} N \sin(\theta + \mu z + \gamma) = 0.$$

Ur de båda sista erhålles lätt

$$\left.\begin{array}{l} \frac{B}{A} = \frac{M}{N} e^{-2\lambda z} \\ 2\mu z = \eta - \theta + \beta - \gamma. \end{array}\right\} \qquad (18)$$

Om nu ytterligare ekvationen (16) identifieras med ekvationen (8) erhållas

---

[1]) Lösningen finnes angifven af W. DUMAS: Ueber die Bestimmung der Wärmeleitungsfähigkeit etc. Pogg. Ann. 1866, band 129, pag. 277.

$$\left.\begin{array}{l} A_n e^{-\lambda_n x} \cos(-\mu_n x + \beta_n) + B_n e^{\lambda_n x} \cos(\mu_n x + \gamma_n) = a_x^{(n)} \cos b_x^{(n)} \\ \text{och} \\ A_n e^{-\lambda_n x} \sin(-\mu_n x + \beta_n) + B_n e^{\lambda_n x} \sin(\mu_n x + \gamma_n) = a_x^{(n)} \sin b_x^{(n)}. \end{array}\right\} \quad (19)$$

Tillsammans med de Ångströmska relationerna

$$\lambda^2 - \mu^2 = \frac{H}{K}$$

$$\lambda\mu = \frac{n\pi}{TK}$$

bestämma nu ekvationerna (17), (18) och (19) de ingående 10 obekanta λ, μ, M, N, η, θ, A, B, β och γ såsom funktioner af c, k, h, p och q, och ekvationen (16) blir sålunda en generell solution, som satisfierar de gifna sidovilkoren.

Första ekvationen (18) jämte ekvationerna (17) och de båda Ångströmska relationerna ge oss medel att beräkna den nödvändiga längden på stången, för att vi skola ha rättighet att negligera den senare summan i ekvationen (16). Vi vilja visa detta genom ett exempel.

Antaga vi

$$h = 0.00033 = \frac{1}{3000} \text{ (C. G. S.)},$$

ett medelvärde af mina egna observationer med ÅNGSTRÖMS metod och WEBERS med NEUMANNS, allt för sotad stång; vidare

$$k = 0.95 \text{ (C. G. S.)}, \quad \text{och} \quad c = 0.845$$

d. v. s. ÅNGSTRÖMS värden för koppar; antad slutligen $p = 4s$, $q = s^2$, $s = 3.5$ cm, d. v. s. dimensionerna på ÅNGSTRÖMS grofva kopparstång[1]), så få vi

$$\frac{H}{K} = 0.0004011;$$

och för

$$T = 24^{\text{min}} = 1440^{\text{s}}$$

fås

$$\frac{\pi}{TK} = 0.001941.$$

[1]) Se nyss citerade afhandl. i Öfvers. 1862.

Härur erhållas

$$\lambda_1 = 0.04638,$$
$$\mu_1 = 0.04183$$

samt

$$\lambda' = \lambda_1 - \frac{h}{k} = 0.04603$$

och

$$\lambda'' = \lambda_1 + \frac{h}{k} = 0.04673$$

Vidare

$$M^2 = \lambda'^2 + \mu_1^2 = 0.003870$$
$$N^2 = \lambda''^2 + \mu_1^2 = 0.003935$$

och för

$z = 100$ cm	75 cm	50 cm
$\frac{B}{A} = 0.000093$	0.00094	0.0096.

3:o. Stången oändligt lång; c, k, h variabla.

Vår differentialekvation antar i detta fall formen (4)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \gamma \frac{\partial v^2}{\partial t} - K\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \varkappa K \frac{\partial^2 v^2}{\partial x^2} + Hv + \eta H v^2 = 0 \tag{4}$$

och vår generella solution (7)

$$v = \Sigma A_n e^{\psi_n} + \Sigma A'_n e^{\psi'_n} + \Sigma A_m A_n \delta_{mn} e^{\psi_m + \psi_n} + \\ + \Sigma A'_m A'_n \delta'_{mn} e^{\psi'_m + \psi'_n} + 2\Sigma A_m A'_n \varepsilon_{mn} e^{\psi_m + \psi'_n}, \tag{7}$$

nämligen

$$\psi_n = \nu_n x + \left(K\nu_n^2 - H\right)t \quad \text{och} \quad \psi'_n = \nu'_n x + \left(K\nu'^2_n - H\right)t,$$

$$\delta_{mn} = \frac{K\left\{\gamma\left(\nu_m^2 + \nu_n^2\right) - \varkappa(\nu_m + \nu_n)^2\right\} + H(\eta - 2\gamma)}{2K\nu_m\nu_n + H},$$

$$\delta'_{mn} = \frac{K\left\{\gamma\left(\nu'^2_m + \nu'^2_n\right) - \varkappa(\nu'_m + \nu'_n)^2\right\} + H(\eta - 2\gamma)}{2K\nu'_m\nu'_n + H}$$

samt

$$\varepsilon_{mn} = \frac{K\left\{\gamma\left(\nu_m^2 + \nu'^2_n\right) - \varkappa(\nu_m + \nu'_n)^2\right\} + H(\eta - 2\gamma)}{2K\nu_m\nu'_n + H}.$$

Vår generella solution (7) transformeras på följande sätt. Vi antaga

$$\nu_n = -(\lambda_n + i\mu_n),$$
$$\nu'_n = -(\lambda_n - i\mu_n).$$

Härigenom blifva våra δ och ε komplexa kvantiteter och kunna skrifvas under formen:

$$\delta_{mn} = \varrho_{mn} e^{\varphi_{mn} i}, \quad \delta'_{mn} = \varrho'_{mn} e^{\varphi'_{mn} i} \quad \text{och} \quad \varepsilon_{mn} = \xi_{mn} e^{\chi_{mn} i},$$

där uppenbarligen följande relationer mellan kvantiteterna ϱ, φ, ξ och χ ega rum:

$$\varrho_{mn} = \varrho_{nm} = \varrho'_{mn} = \varrho'_{nm},$$
$$\varphi_{mn} = \varphi_{nm} = -\varphi'_{mn} = -\varphi'_{nm},$$
$$\xi_{mn} = \xi_{nm} \text{ och } \chi_{mn} = -\chi_{nm}.$$

Vi anmärka vidare, att $\chi_{nn} = 0$, alltså $\varepsilon_{nn} = \xi_{nn}$ = reell kvantitet, och att $\varphi_{00} = \varphi'_{00} = 0$.

Vidare införa vi

$$A_n e^{\left(\frac{\pi}{2}+\beta_n\right)i} \text{ i st. för } A_n$$

och

$$A_n e^{-\left(\frac{\pi}{2}+\beta_n\right)i} \text{ i st. för } A'_n.$$

Om vi nu lägga in i ψ_n och ψ'_n de imaginära delarne af kvantiteterna δ, ε och A, så erhålla vi

$$\psi_n = -\lambda_n x + i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2n\pi t}{T} - \mu_n x + \beta_n\right),$$

$$\psi'_n = -\lambda_n x - i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2n\pi t}{T} - \mu_n x + \beta_n\right),$$

$$\psi_m + \psi_n = -(\lambda_m + \lambda_n)x + i\left[\pi + \frac{2(m+n)\pi t}{T} - (\mu_m + \mu_n)x + \right.$$
$$\left. + \varphi_{mn} + \beta_m + \beta_n\right],$$

$$\psi'_m + \psi'_n = -(\lambda_m + \lambda_n)x - i\left[\pi + \frac{2(m+n)\pi t}{T} - (\mu_m + \mu_n)x + \right.$$
$$\left. + \varphi_{mn} + \beta_m + \beta_n\right],$$

$$\psi_m + \psi'_n = -(\lambda_m + \lambda_n)x + i\left[\frac{2(m-n)\pi t}{T} - (\mu_m - \mu_n)x + \right.$$
$$\left. + \chi_{mn} + \beta_m - \beta_n\right],$$

$$\psi_n + \psi'_m = -(\lambda_m + \lambda_n)x - i\left[\frac{2(m-n)\pi t}{T} - (\mu_m - \mu_n)x + \right.$$
$$\left. + \chi_{mn} + \beta_m - \beta_n\right].$$

Våra summor i (7) låta då slå sig tillsammans två och två, och vi erhålla såsom generell solution

$$v = -2\Sigma A_n e^{-\lambda_n x} \sin\left(\frac{2n\pi t}{T} - \mu_n x + \beta_n\right) -$$
$$-2\Sigma A_m A_n \varrho_{mn} e^{-(\lambda_m+\lambda_n)x} \cos\left[\frac{2(m+n)\pi t}{T} - (\mu_m + \mu_n)x + \right.$$
$$\left. + \varphi_{mn} + \beta_m + \beta_n\right] + 2\Sigma A_m A_n \xi_{mn} e^{-(\lambda_m+\lambda_n)x} \cos\left[\frac{2(m-n)\pi t}{T} - \right.$$
$$\left. - (\mu_m - \mu_n)x + \chi_{mn} + \beta_m - \beta_n\right],$$

eller om de arbiträra koefficienterna multipliceras med $-\frac{1}{2}$

$$v = \Sigma A_n e^{-\lambda_n x} \sin\left(\frac{2n\pi t}{T} - \mu_n x + \beta_n\right) -$$
$$-\tfrac{1}{2}\Sigma A_m A_n \varrho_{mn} e^{-(\lambda_m+\lambda_n)x} \cos\left[\frac{2(m+n)\pi t}{T} - (\mu_m + \mu_n)x + \right.$$
$$\left. + \varphi_{mn} + \beta_m + \beta_n\right] + \tfrac{1}{2}\Sigma A_m A_n \xi_{mn} e^{-(\lambda_m+\lambda_n)x} \cos\left[\frac{2(m-n)\pi t}{T} - \right.$$
$$\left. - (\mu_m - \mu_n)x + \chi_{mn} + \beta_m - \beta_n\right]. \qquad (20)$$

Utskrifvas termerna fullständigt, ordnade efter multipler af $\frac{\pi t}{T}$, erhålles, då vi åt den öfverflödiga koefficienten β_0 ge värdet $\frac{\pi}{2}$ samt observera, att

$$\mu_0 = 0,$$

$$v = A_0 e^{-\lambda_0 x} + \tfrac{1}{2} A_0^2 \varrho_{00} e^{-2\lambda_0 x} + \tfrac{1}{2} A_0^2 \xi_{00} e^{-2\lambda_0 x} + \tfrac{1}{2} A_1^2 \xi_{11} e^{-2\lambda_1 x} +$$

$$+ \tfrac{1}{2} A_2^2 \xi_{22} e^{-2\lambda_2 x} + \ldots + A_1 e^{-\lambda_1 x} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \mu_1 x + \beta_1\right) -$$

$$- A_0 A_1 \varrho_{01} e^{-(\lambda_0+\lambda_1)x} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \mu_1 x + \varphi_{01} + \beta_1 + \frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ A_0 A_1 \xi_{01} e^{-(\lambda_0+\lambda_1)x} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \mu_1 x + \chi_{10} + \beta_1 - \frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ A_1 A_2 \xi_{12} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} \cos\left[\frac{2\pi t}{T} - (\mu_2 - \mu_1)x + \chi_{21} + \beta_2 - \beta_1\right] +$$

$$+ A_2 A_3 \xi_{23} \ldots\ldots$$

$$+ \ldots\ldots$$

$$+ A_2 e^{-\lambda_2 x} \sin\left(\frac{4\pi t}{T} - \mu_2 x + \beta_2\right) - \tfrac{1}{2} A_1^2 \varrho_{11} e^{-2\lambda_1 x} \cos\left(\frac{4\pi t}{T} -\right.$$

$$\left. - 2\mu_1 x + \varphi_{11} + 2\beta_1\right) +$$

$$+ A_0 A_2 \xi_{02} e^{-(\lambda_0+\lambda_2)x} \cos\left(\frac{4\pi t}{T} - \mu_2 x + \chi_{20} + \beta_2 - \frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ A_1 A_3 \xi_{13} e^{-(\lambda_1+\lambda_3)x} \cos\left[\frac{4\pi t}{T} - (\mu_3 - \mu_1)x + \chi_{31} + \beta_3 - \beta_1\right] +$$

$$+ A_2 A_4 \xi_{24} \ldots$$

$$+ \ldots\ldots\ldots;$$

eller om vi observera, att $\xi_{00} = \varrho_{00}$, $\xi_{01} = \varrho_{01}$ och $\chi_{10} = \varphi_{01}$, hvilket lätt framgår ur uttrycken för δ och ε sid. 56,

$$v = A_0 e^{-\lambda_0 x} + A_0^2 \varrho_{00} e^{-2\lambda_0 x} + \tfrac{1}{2} A_1^2 \xi_{11} e^{-2\lambda_1 x} + \tfrac{1}{2} A_2^2 \xi_{22} e^{-2\lambda_2 x} + \ldots\ldots$$

$$+ A_1 e^{-\lambda_1 x} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \mu_1 x + \beta_1\right) +$$

$$+ 2 A_0 A_1 \varrho_{01} e^{-(\lambda_0+\lambda_1)x} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \mu_1 x + \varphi_{01} + \beta_1\right) +$$

$$+ A_1 A_2 \xi_{12} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} \cos\left[\frac{2\pi t}{T} - (\mu_2 - \mu_1)x + \chi_{21} + \beta_2 - \beta_1\right] +$$

$$+ A_2 A_3 \xi_{23} \ldots$$

$$+ \ldots\ldots$$

$$+ A_2 e^{-\lambda_2 x} \sin\left(\frac{4\pi t}{T} - \mu_2 x + \beta_2\right) -$$

$$- \tfrac{1}{2} A_1^2 \varrho_{11} e^{-2\lambda_1 x} \cos\left(\frac{4\pi t}{T} - 2\mu_1 x + \varphi_{11} + 2\beta_1\right) +$$

$$+ A_0 A_2 \xi_{02} e^{-(\lambda_0+\lambda_2)x} \sin\left(\frac{4\pi t}{T} - \mu_2 x + \chi_{20} + \beta_2\right) +$$

$$+ A_1 A_3 \xi_{13} \ldots$$

$$+ \ldots\ldots$$

$$+ \ldots\ldots\ldots \qquad (20^*)$$

Denna är vår slutliga generella solution. Den satisfierar tydligen vilkoret $v = 0$ för $x = \infty$. Återstår nu att göra konstantbestämningen i öfverensstämmelse med metodens vilkor, med andra ord, att för ett visst värde på x identifiera ekvat. (20*) med (8). På denna konstantbestämning skola vi icke inlåta oss för det allmänna fallet, utan endast för det specialfall, att ekvationen (8) föreställer en sinusoid:

$$v = a_x + a'_x \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + b'_x\right). \qquad (21)$$

Denna ekvation innebär, att punkten x är tagen tillräckligt långt bort från stället för upphettningarne och afkylningarne.

För detta speciella fall kan konstantbestämningen ske genom följande ekvationer:

$$a_x = A_0 e^{-\lambda_0 x} + A_0^2 \varrho_{00} e^{-2\lambda_0 x} + \tfrac{1}{2} A_1^2 \xi_{11} e^{-2\lambda_1 x} + \tfrac{1}{2} A_2^2 \xi_{22} e^{-2\lambda_2 x},$$

$$a'_x \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + b'_x\right) = A_1 e^{-\lambda_1 x} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \mu_1 x + \beta_1\right) +$$

$$+ 2 A_0 A_1 \varrho_{01} e^{-(\lambda_0+\lambda_1)x} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \mu_1 x + \varphi_{01} + \beta_1\right) +$$

$$+ A_1 A_2 \xi_{12} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} \cos\left[\frac{2\pi t}{T} - (\mu_2 - \mu_1)x + \chi_{21} + \beta_2 - \beta_1\right],$$

$$0 = A_2 e^{-\lambda_2 x} \sin\left(\frac{4\pi t}{T} - \mu_2 x + \beta_2\right) -$$

$$- \tfrac{1}{2} A_1^2 \varrho_{11} e^{-2\lambda_1 x} \cos\left(\frac{4\pi t}{T} - 2\mu_1 x + \varphi_{11} + 2\beta_1\right) +$$

$$+ A_0 A_2 \xi_{02} e^{-(\lambda_0+\lambda_2)x} \sin\left(\frac{4\pi t}{T} - \mu_2 x + \chi_{20} + \beta_2\right),$$

$$0 = A_3 = A_4 = \ldots\ldots$$

Andra och tredje ekvationerna sönderfalla hvardera i två stycken, och vi få sålunda fem ekvationer för bestämning af de fem kvantiteterna A_0, A_1, A_2, β_1 och β_2. Hvad beträffar A_2, så blir denna koefficient tydligen af samma storleksordning som ϱ_{11}, hvadan vi ha rättighet att försumma termer med koefficienten A_2, och vår generella solution (20*) öfvergår till

$$\begin{aligned} v = & A_0 e^{-\lambda_0 x} + A_0^2 \varrho_{00} e^{-2\lambda_0 x} + \tfrac{1}{2} A_1^2 \xi_{11} e^{-2\lambda_1 x} + \\ & + A_1 e^{-\lambda_1 x} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \mu_1 x + \beta_1\right) + \\ & + 2A_0 A_1 \varrho_{01} e^{-(\lambda_0+\lambda_1)x} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \mu_1 x + \varphi_{01} + \beta_1\right), \end{aligned} \quad (22)$$

som identifierad med (21) ger

$$\left.\begin{aligned} a_x &= A_0 e^{-\lambda_0 x} + A_0^2 \varrho_{00} e^{-2\lambda_0 x} + \tfrac{1}{2} A_1^2 \xi_{11} e^{-2\lambda_1 x}, \\ a'_x &= A_1 e^{-\lambda_1 x}[1 + 2A_0 e^{-\lambda_0 x} \varrho_{01} \cos \varphi_{01}], \\ b'_x + \mu_1 x - \beta_1 &= 2A_0 e^{-\lambda_0 x} \varrho_{01} \sin \varphi_{01}. \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

För en annan punkt $x = 0$ få vi på samma sätt

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= A_0 + A_0^2 \varrho_{00} + \tfrac{1}{2} A_1^2 \xi_{11}, \\ a'_0 &= A_1[1 + 2A_0 \varrho_{01} \cos \varphi_{01}], \\ b'_0 - \beta_1 &= 2A_0 \varrho_{01} \sin \varphi_{01}. \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Genom logaritmisering och subtrahering af andra ekvationerna i (23) och (24), samt genom subtraktion af tredje ekvationerna i (23) och (24) erhålles

$$\lambda_1 x = \frac{1}{M} \log \frac{a'_0}{a'_x} - 2A_0(1 - e^{-\lambda_0 x}) \varrho_{01} \cos \varphi_{01},$$

$$\mu_1 x = b'_0 - b'_x - 2A_0(1 - e^{-\lambda_0 x}) \varrho_{01} \sin \varphi_{01},$$

och slutligen, om $A_0(1 - e^{-\lambda_0 x})$ approximativt sättes $= a_0 - a_x$, erhålles

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 x &= \frac{1}{M} \log \frac{a'_0}{a'_x} - 2(a_0 - a_x) \varrho_{01} \cos \varphi_{01}, \\ \mu_1 x &= b'_0 - b'_x - 2(a_0 - a_x) \varrho_{01} \sin \varphi_{01}. \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Detta ur en observationsserie på två punkter af stången $x = 0$ och $x = x$. Ha vi nu för samma eller andra punkter af stången

en eller flera ekvationsserier vid andra medeltemperaturer, så få vi ytterligare ett eller flera ekvationssystem analoga med (25), och ur dessa kan, efter elimination af kvantiteterna $\varrho_{01} \cos \varphi_{01}$ och $\varrho_{01} \sin \varphi_{01}$, kvantiteterna λ_1 och μ_1 samt sedermera ur de ÅNGSTRÖMska vilkoren

$$\lambda_1^2 - \mu_1^2 = \frac{H}{K},$$

och

$$\lambda_1 \mu_1 = \frac{\pi}{TK}$$

K och H beräknas.

Då nu

$$K = \frac{k_0}{c_0} \quad \text{och} \quad H = \frac{h_0 p}{c_0 q},$$

så kunna, med kännedom om specifika värmet c_0 samt stångens dimensioner p och q, kvantiteterna k_0 och h_0, gällande för omgifningens temperatur, beräknas.

Hvad slutligen beträffar temperaturkoefficienterna 2γ, $2\varkappa$ och η (se pag. 46), så lemna oss värdena på $\varrho_{01} \operatorname{Cos} \varphi_{01}$ och $\varrho_{01} \sin \varphi_{01}$ två lineära relationer mellan dessa temperaturkoefficienter och bekanta kvantiteter, ur hvilka relationer temperaturkoefficienterna kunna beräknas, då en af dem t. ex. γ antages känd från annat håll. Ett annat sätt, att med ÅNGSTRÖMS metod bestämma dessa temperaturkoefficienter, synes vara, att man på nyss beskrifna sätt *bestämmer värdena på k_0 och h_0 för olika temperaturer hos omgifningen.* Naturligtvis får jag då ock experimentelt bestämma värdet af c_0 vid samma temperaturer.

Slutligen bör anmärkas, att under vissa vilkor en enda observationsserie på två punkter af stången är tillräcklig för bestämmandet af kvantiteterna λ_1 och μ_1. Anordnas nämligen experimenterna så, att *medeltemperaturen blir densamma i stångens alla punkter*, och lika med omgifningens temperatur så blir tydligen

$$a_0 = a_x = 0,$$

och våra ekvationer (25) förenklas till

$$\lambda_1 x = \frac{1}{M} \log \frac{a'_0}{a'_x}$$

$$\mu_1 x = b'_0 - b'_x ,$$

desamma, som vi återfinna i ekvationerna (14), hvilka erhöllos ur den första approximativa lösningen af ÅNGSTRÖMS metod, och hvilka ekvationer ÅNGSTRÖM först har framstält.

Till alldeles samma slutsats kommer Professor TAIT i en afhandling »On Thermal Conductivity» i Lon., Ed., and Dubl. Phil. Mag. 1881, XII, ser. 5, pag. 150, där det heter: »Hence the only legitimate mode of applying ÅNGSTRÖM's method is to keep the mean temperature the same throughout the slab.»

II. Neumanns Metod.

Professor F. NEUMANN i Königsberg har framstält två metoder för bestämning af inre och yttre värmeledningskoefficienterna hos fasta kroppar, den ena en modifikation af ÅNGSTRÖMS metod samt en annan af äldre datum, hvilken här skall bli föremålet för vår undersökning.[1])

Om själfva metoden anföra vi följande. En jämntjock ring af metall, hvars värmeledningsförmåga skall bestämmas, hålles i ett snitt af omkretsen vid en hög, konstant temperatur så länge, att temperaturen i hvarje snitt af ringen antar ett konstant värde. När detta inträffar, afbrytes upphettningen, och under den nu följande afkylningen genom strålning till omgifningen, hvars temperatur hela tiden tänkes konstant, observeras med lika tidsintervall temperaturerna i två diametralt motsatta

---

[1]) NEUMANNS egen kortfattade framställning af metoden återfinnes i Ann. de Ch. et de Ph., 1862, ser. III, T. 66, pag. 185, samt i Phil. Mag. 1863, ser. IV, T. 25, pag. 63.

Utförligare är metoden framstäld af Prof. H. F. WEBER: Die Beziehung zwichen dem Wärmeleitungsvermögen und dem elektrischen Leitungsvermögen der Metalle, Berl. Monatsberichte 1880, pag. 457; äfvensom i Arch. des Sciences Phys. et Nat. 1880, ser. III, T. IV.

punkter af ringen, belägna på $^1/_8$ och $^5/_8$ af ringens omkrets, från upphettningsstället räknadt. Ur summorna och skilnaderna mellan de observerade temperaturerna kunna den inre och yttre värmekoefficienten beräknas.

Af denna framställning af metoden framgår, att den sökta generella solutionen till vår differentialekvation (2) eller (4) bör uppfylla vilkoren att vara en jämn funktion af x, och att för x och $x + 2\pi r$, där r är ringens radie, ge samma värde åt v. Alltså

$$v(+x) = v(-x)$$

och

$$v(x) = v(x + 2\pi r) .$$

Slutligen bör den generella solutionen för $t = 0$ satisfiera differentialekvationen för det stationära begynnelsetillståndet, hvilken för hvardera fallet erhålles, om vi i (2) och (4) utelemna de termer, som innehålla derivator af t.

1:o. *c, k, h oberoende af v.*

Vår differentialekvation är då (2)

$$\frac{\partial v}{\partial t} - K\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Hv = 0 ,$$

och den generella solutionen (4)

$$v = \Sigma A_n e^{\psi_n} + \Sigma A'_n e^{\psi'_n} ,$$

nämligen

$$\psi_n = \nu_n x + (K\nu_n^2 - H) ,$$

$$\psi'_n = \nu'_n x + (K\nu'^2_n - H) .$$

Här ponera vi

$$\nu_n = \frac{in}{r} \quad \text{och} \quad \nu'_n = -\frac{in}{r} ,$$

nämligen $i = \sqrt{-1}$, då vi få

$$\psi_n = i\frac{nx}{r} - \left(\frac{n^2K}{r^2} + H\right)t$$

och

$$\psi'_n = -i\frac{nx}{r} - \left(\frac{n^2K}{r^2} + H\right)t .$$

Sätta vi slutligen $A'_n = A_n$, så få vi den generella solutionen

$$v = \Sigma A_n e^{-\left(\frac{n^2K}{r^2}+H\right)t} \cos\left(\frac{nx}{r}\right) =$$

$$= A_0 e^{-Ht} + A_1 e^{-\left(\frac{K}{r^2}+H\right)t} \cos\left(\frac{x}{r}\right) + A_2 e^{-\left(\frac{4K}{r^2}+H\right)t} \cos\left(\frac{2x}{r}\right) + \ldots \quad (26)$$

Ekvationen (26) satisfierar tydligen vilkoren

$$v(x) = v(-x) ,$$
$$v(x) = v(x + 2\pi r) .$$

Återstår att bestämma de arbiträra konstanterna A_0, A_1, A_2 etc. i öfverensstämmelse med begynnelsevilkoret, det vill säga så, att för $t = 0$ ekvationen (26) satisfierar differentialekvationen

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{H}{K} v . \quad (27)$$

Generella integralen till denna differentialekvation har som bekant formen

$$v = Ae^{-\lambda x} + Be^{\lambda x} ,$$

där

$$\lambda = \sqrt{\frac{H}{K}} ,$$

eller, som vi också kunna skrifva,

$$v = Ae^{-\lambda\sqrt{x^2}} + Be^{\lambda\sqrt{x^2}} , \quad (28)$$

om vilkoret $v(+x) = v(-x)$ skall vara uppfyldt. Konstanterna A och B bestämmas nu af de båda vilkoren, att för $x = 0$ och $x = 2\pi r$ vi ha $v = V$, nämligen V temperaturen vid upphettningsstället. Det sista vilkoret kan ock utbytas mot

$$\Big/^{\pi r} \frac{dv}{dx} = 0 ,$$

hvilken ekvation uttrycker, att temperaturen i den mot upp-

hettningsstället diametralt motsatta punkten är ett minimum. Härigenom blir konstantbestämningen följande:

$$A + B = V,$$
$$A = Be^{2\lambda\pi r}.$$

Identifieringen af ekvationen (26) med (28) kan tänkas ske på det sätt, att vi framställa en FOURIERS serie fortlöpande efter cosiner för multipler af $\frac{x}{r}$ [1])

$$v = \tfrac{1}{2} b_0 + b_1 \cos\left(\frac{x}{r}\right) + b_2 \cos\left(\frac{2x}{r}\right) + \ldots, \qquad (29)$$

där

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} (Ae^{-\lambda r\alpha} + Be^{\lambda r\alpha}) \cos n\alpha \, d\alpha,$$

en serie, som inom gränserna

$$\pi r > x > -\pi r$$

är identisk med (28). Denna ekvation (29) kan, för ifrågavarande fall af en ring, sägas vara en fullständigare solution af ekvation (27) än (28), eftersom (29) uppfyller vilkoret

$$v(x) = v(x + 2\pi r),$$

hvilket icke är fallet med (28).

Utan att här inlåta oss på de för konstantbestämningarne i (29) nödvändiga integreringarne, som annars äro tämligen lätt utförda, anmärka vi endast, att serien i (29) är en konvergent serie [2]) med raskt aftagande koefficienter. Samma blir då förhållandet med serien i (26), och detta ännu mer för andra t-värden än $t = 0$.

Om nu observationerna ske i två punkter af ringen på $^1/_8$ och $^5/_8$ af periferien från upphettningsstället räknadt, alltså

$$x_1 = \tfrac{1}{8} \cdot 2\pi r$$

och

$$x_2 = \tfrac{5}{8} \cdot 2\pi r,$$

---

[1]) Se t. ex. RIEMANN, Partielle Differentialgleichungen, 3 uppl. 1882, pag. 61.

[2]) Se RIEMANN l. c. pag. 80.

så faller tredje termen i (26) bort, och om vi nöja oss med två termer, få vi för x_1 och x_2

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= A_0 e^{-Ht} + \frac{A_1}{\sqrt{2}} e^{-\left(\frac{K}{r^2}+H\right)t}, \\ v_2 &= A_0 e^{-Ht} - \frac{A_1}{\sqrt{2}} e^{-\left(\frac{K}{r^2}+H\right)t}. \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Genom dessas addition och suktraktion erhålla vi

och

$$\left.\begin{aligned} v_1 + v_2 &= 2A_0 e^{-Ht} \\ v_1 - v_2 &= \sqrt{2} A_1 e^{-\left(\frac{K}{r^2}+H\right)t} \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

För ett annat värde t' på tiden, få vi på samma sätt

$$\left.\begin{aligned} v'_1 + v'_2 &= 2A_0 e^{-Ht'} \\ v'_1 - v'_2 &= \sqrt{2} A_1 e^{-\left(\frac{K}{r^2}+H\right)t'} \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

samt genom division och logaritmisering af ekvationerna i (31) och (32),

och

$$\left.\begin{aligned} H &= \frac{1}{M} \cdot \frac{1}{t' - t} \log \frac{v_1 + v_2}{v'_1 + v'_2} \\ \frac{K}{r_2} + H &= \frac{1}{M} \cdot \frac{1}{t' - t} \log \frac{v_1 - v_2}{v'_1 - v'_2} \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Ur ekvationerna (33) kunna nu H och K beräknas. Ha vi nämligen vid olika tider t, t', t'', ... med lika intervall $t' - t = t'' - t' = \ldots$ observerat temperaturerna v_1 och v_2, v'_1 och v'_2, v''_1 och v''_2, ... i de båda diametralt motsatta punkterna x_1 och x_2, så böra, åtminstone för större värden af t, för hvilka serien (26) konvergerar skarpare, logaritmerna för kvoterna mellan de successiva $v_1 + v_2$ och $v_1 - v_2$, alltså

$$\log \frac{v_1 + v_2}{v'_1 + v'_2} \text{ och } \log \frac{v_1 - v_2}{v'_1 - v'_2},$$

antaga konstanta värden, ur hvilka medels ekvationerna (33) H och K kunna beräknas.

2:o. *c, k, h oberoende af v.*

Vår differentialekvation antar i detta fall formen

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \gamma \frac{\partial v^2}{\partial t} - K \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \varkappa K \frac{\partial^2 v^2}{\partial x^2} + Hv + \eta H v^2 = 0 \qquad (4)$$

och den generella solutionen:

$$v = \Sigma A_n e^{\psi_n} + \Sigma A'_n e^{\psi'_n} + \Sigma A_m A_n \delta_{mn} e^{\psi_m + \psi_n} + \\ + \Sigma A'_m A'_n \delta'_{mn} e^{\psi'_m + \psi'_n} + 2 \Sigma A_m A'_n \varepsilon_{mn} e^{\psi_m + \psi'_n}, \qquad (7)$$

där ψ_n och ψ'_n samt kvantiteterna δ och ε ha samma betydelse som sid. 56.

Här ponera vi nu

$$\nu_n = \frac{in}{r} \text{ och } \nu'_n = -\frac{in}{r},$$

hvarigenom erhålles

$$\psi_n = i\frac{nx}{r} - \left(\frac{n^2K}{r^2} + H\right)t,$$

$$\psi'_n = -i\frac{nx}{r} - \left(\frac{n^2K}{r^2} + H\right)t,$$

$$\delta_{mn} = \delta'_{mn} = \frac{\eta - 2\gamma + \frac{K}{r^2H} \cdot [(m+n)^2\varkappa - (m^2+n^2)\gamma]}{1 - \frac{2mnK}{r^2H}},$$

$$\varepsilon_{mn} = \frac{\eta - 2\gamma + \frac{K}{r^2H} \cdot [(m-n)^2\varkappa - (m^2+n^2)\gamma]}{1 + \frac{2mnK}{r^2H}}.$$

Sätta vi därjämte $A'_n = A_n$ och sammanslå summorna i (7) två och två, så erhålles, om de arbiträra koefficienterna halfveras den generella solutionen

$$v = \Sigma A_n e^{-\left(\frac{n^2K}{r^2} + H\right)t} \cos\left(\frac{nx}{r}\right) +$$

$$+ \tfrac{1}{2} \Sigma A_m A_n \delta_{mn} e^{-\left[\frac{(m^2+n^2)K}{r^2} + 2H\right]t} \cos\left[\frac{(m+n)x}{r}\right] +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\Sigma A_m A_n \varepsilon_{mn} e^{-\left[\frac{(m^2+n^2)K}{r^2}+2H\right]t} \cos\left[\frac{(m-n)x}{r}\right]. \tag{34}$$

Utskrifvas termerna, ordnade efter $\cos\frac{nx}{r}$, fås

$$v = A_0 e^{-Ht} + \tfrac{1}{2}A_0^2\delta_{00}e^{-2Ht} + \tfrac{1}{2}A_0^2\varepsilon_{00}e^{-2Ht} + $$
$$+ \tfrac{1}{2}A_1^2\varepsilon_{11}e^{-\left(\frac{2K}{r^2}+H\right)t} + \ldots$$
$$+ \left[A_1 e^{-\left(\frac{K}{r^2}+H\right)t} + A_0A_1\delta_{01}e^{-\left(\frac{K}{r^2}+2H\right)t} + A_0A_1\varepsilon_{01}e^{-\left(\frac{K}{r^2}+2H\right)t} + \right.$$
$$\left. + A_1A_2\varepsilon_{12}e^{-\left(\frac{5K}{r^2}+2H\right)t}\right]\cos\left(\frac{x}{r}\right) +$$
$$+ \left[A_2 e^{-\left(\frac{4K}{r^2}+H\right)t} + \tfrac{1}{2}A_1^2\delta_{11}e^{-\left(\frac{2K}{r^2}+2H\right)t} + A_0A_2\delta_{02}e^{-\left(\frac{4K}{r^2}+2H\right)t} + \right.$$
$$\left. + A_0A_2\varepsilon_{02}e^{-\left(\frac{4K}{r^2}+2H\right)t} + \ldots\right]\cos\left(\frac{2x}{r}\right) + \ldots$$

Här äro $\delta_{00} = \varepsilon_{00} = \eta - 2\gamma$,

$$\delta_{01} = \varepsilon_{01} = \eta - 2\gamma + \frac{K}{r^2H}(\varkappa - \gamma),$$

$$\delta_{11} = \frac{\eta - 2\gamma + \frac{2K}{r^2H}(2\varkappa - \gamma)}{1 - \frac{2K}{r^2H}},$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\eta - 2\gamma - \frac{2K}{r^2H}\gamma}{1 - \frac{2K}{r^2H}},$$

$$\delta_{02} = \varepsilon_{02} = \eta - 2\gamma + \frac{4K}{r^2H}(\varkappa - \gamma),$$

och så vidare, hvadan termerna i nyss funna uttryck för v delvis kunna slås tillsammans och vi finna den slutliga generella solutionen[1])

[1]) Jfr WEBERS ofvan citerade arbete, pag. 464, där samma lösning, ehuru med delvis andra tecken för de ingående kvantiteterna, finnes angifven. Några små felaktigheter finnas i WEBERS lösning, hvilka dock icke inverka på diskussionen af formeln.

$$v = A_0 e^{-Ht} + A_0^2 \delta_{00} e^{-2Ht} + \tfrac{1}{2} A_1^2 \varepsilon_{11} e^{-\left(\frac{2K}{r^2}+2H\right)t} + \ldots.$$
$$+ \left[A_1 e^{-\left(\frac{K}{r^2}+H\right)t} + 2A_0 A_1 \delta_{01} e^{-\left(\frac{K}{r^2}+2H\right)t} + A_1 A_2 \varepsilon_{12} e^{-\left(\frac{5K}{r^2}+2H\right)t} + \right.$$
$$\left. + \ldots\right] \cos\left(\frac{x}{r}\right) +$$
$$+ \left[A_2 e^{-\left(\frac{4K}{r^2}+H\right)t} + \tfrac{1}{2} A_1^2 \delta_{11} e^{-\left(\frac{2K}{r^2}+2H\right)t} + 2A_0 A_2 \delta_{02} e^{-\left(\frac{4K}{r^2}+2H\right)t} + \right.$$
$$\left. + \ldots\right] \cos\left(\frac{2x}{r}\right) + \ldots\ldots, \qquad (34^*)$$

hvilken ekvation såsom specialfall innefattar i sig ekvationen (26).

Denna solution satisfierar tydligen vilkoren

$$v(x) = v(-x),$$
$$v(x) = v(x + 2\pi r).$$

Återstår nu att bestämma de ingående arbiträra konstanterna så, att initialvilkoret, som gäller för $t = 0$, är uppfyldt, det vill säga, att ekvationen (34*) för $t = 0$ identifieras med integralen till differentialekvationen

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \varkappa \frac{d^2v^2}{dx^2} = \frac{H}{K}(v + \eta v^2), \qquad (35)$$

som erhålles ur (4), ifall derivatorna med afseende på t utelemnas.

En partikulär solution till (35) erhålles lätt om vi antaga, att kvadrater och produkter af $\varkappa$ och η kunna försummas,

$$v = Ae^{\nu x} + \varepsilon A^2 e^{2\nu x},$$

om vi välja

$$\nu = \pm \sqrt{\frac{H}{K}} \text{ och } \varepsilon = \frac{\eta - 4\varkappa}{3};$$

och af de två partikulära solutionerna

$$v_1 = Ae^{-\lambda x} + \tfrac{1}{3}(\eta - 4\varkappa)A^2 e^{-2\lambda x},$$
$$v_2 = Be^{\lambda x} + \tfrac{1}{3}(\eta - 4\varkappa)B^2 e^{2\lambda x},$$

nämligen

$$\lambda = \sqrt{\frac{H}{K}},$$

erhålles den generella solutionen till (35)

$$v = Ae^{-\lambda x} + Be^{\lambda x} + \tfrac{1}{3}(\eta - 4\varkappa)(A^2e^{-2\lambda x} + B^2e^{2\lambda x}) + 2\eta AB\,. \quad (36)$$

Sista termen har här tillkommit för att eliminera dubbla produkten $2AB$ uti v^2. Utbyta vi x mot $\sqrt{x^2}$, så uppfyller formeln vilkoret

$$v(x) = v(-x)\,.$$

Konstanterna A och B bestämmas af vilkoren

$$v(0) = V \text{ och } v = (2\pi r) = V\,.$$

Utbytes nu formeln (36) mot en cosinusserie efter multipler af $\frac{x}{r}$, analog med formel (29), så sker konstantbestämningen i formel (34*) genom termernas identifiering med motsvarande termer i denna cosinusserie; och vår formel (26) blir den sökta solutionen.

Vi anmärka, att koefficienterna A i ekvationen (34*) raskt aftaga i storlek analogt med förhållandet sid. 66.

Om man nu observerar temperaturerna v_1 och v_2 i två punkter af ringen på $^1/_8$ och $^5/_8$ af periferien, från upphettningsstället räknadt, så falla de termer i (34*) som innehålla faktorn $\cos\left(\frac{2x}{r}\right)$ bort, och med tillräcklig approximation återstå

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= A_0e^{-Ht} + A_0^2\delta_{00}e^{-2Ht} + \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[A_1e^{-\left(\frac{K}{r^2}+H\right)t} + \\ &\qquad + 2A_0A_1\delta_{01}e^{-\left(\frac{K}{r^2}+2H\right)t}\Big] \\ v_2 &= A_0e^{-Ht} + A_0^2\delta_{01}e^{-2Ht} - \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[A_1e^{-\left(\frac{K}{r^2}+H\right)t} + \\ &\qquad + 2A_0A_1\delta_{01}e^{-\left(\frac{K}{r^2}+2H\right)t}\Big] \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

Adderas och subtraheras ekvationerna (37), erhållas

$$\left.\begin{aligned} v_1 + v_2 &= 2A_0e^{-Ht}(1 + A_0\delta_{00}e^{-Ht})\,, \\ v_1 - v_2 &= \sqrt{2}A_1e^{-\left(\frac{K}{r^2}+H\right)t}(1 + 2A_0\delta_{01}e^{-Ht})\,. \end{aligned}\right\} \quad (38)$$

För ett annat värde på tiden $t = t'$ erhålla vi

$$\left.\begin{aligned} v'_1 + v'_2 &= 2A_0 e^{-Ht'}(1 + A_0\delta_{00} e^{-Ht'}), \\ v'_1 - v'_2 &= \sqrt{2} A_1 e^{-\left(\frac{K}{r^2}+H\right)t}(1 + 2A_0\delta_{01} e^{-Ht'}), \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

och om motsvarande ekvationer i (38) och (39) logaritmiseras och subtraheras

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{M}\log\frac{v_1 + v_2}{v'_1 + v'_2} &= H(t' - t) + A_0\delta_{00}(e^{-Ht} - e^{-Ht'}), \\ \frac{1}{M}\log\frac{v_1 - v_2}{v'_1 - v'_2} &= \left(\frac{K}{r^2} + H\right)(t' - t) + 2A_0\delta_{01}(e^{-Ht} - e^{-Ht'}). \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

Ha vi nu n samtidiga observationer v_1 och v_2, v'_1 och v'_2, ... vid tiderna t, t' .... i de diametralt motsatta punkterna x_1 och x_2, så få vi $n - 1$ ekvationssystem analoga med (40), och om vi uti korrektionstermerna, det vill säga de, som innehålla faktorerna δ_{00} och δ_{01}, insätta det värde på H, som första ekvationen (40) ger, om korrektionstermen utelemnas, så lemna ekvationerna, behandlade med minsta kvadratmetoden, bestämning på de ingående obekanta H, $A_0\delta_{00}$, $\frac{K}{r_2} + H$ och $A_0\delta_{01}$. Ur första ekvationen (38) kan värdet på A_0 sedermera bestämmas, hvarefter δ_{00} och δ_{01} bli bekanta och därmed också värdena af $\eta - 2\gamma$ och $2\varkappa - 2\gamma$. Om nu 2γ vore känd genom särskilda experiment, finge vi genom NEUMANNS metod temperaturkoefficienterna $2\varkappa$ och η för inre och yttre värmeledningsförmågan.

Det är uppenbart, att metoden ställer stora fordringar på observationsmaterialet, om kvantiteterna δ_{00} och δ_{01} skola kunna beräknas. I hvarje fall finner man lätt af det sätt, hvarpå $\log\frac{v_1 + v_2}{v'_1 + v'_2}$ och $\log\frac{v_1 - v_2}{v'_1 - v'_2}$ variera med tiden, huruvida det lönar mödan, att använda en strängare räknemetod eller icke.

Härmed kunde vi afsluta vår redogörelse för NEUMANNS metod, men vi vilja tillägga några ord om behandlingen af första ekvationen (40) eller (38). Dess användning kan äfven ske på följande sätt.

Införa vi beteckningarne

$$\left.\begin{aligned} A &= 2A_0 e^{-Ht_m}, \\ B &= 2A_0^2 \delta_{00} e^{-2Ht_m}, \end{aligned}\right\} \qquad (41)$$

och

där t_m betecknar medelvärdet af tiderna för första och sista observationerna, så kan första ekvationen (38) skrifvas

$$v_1 + v_2 = Ae^{-H(t-t_m)} + Be^{-2H(t-t_m)} \qquad (42)$$

och om högra membrum af (42) utvecklas i serier efter digniteter af $t - t_m$, och serierna sammanslås till en enda, så erhålla vi en serie af formen

$$v_1 + v_2 = a_0 + a_1(t - t_m) + a_2(t - t_m)^2 + \ldots, \qquad (43)$$

nämligen

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= A + B, \\ a_1 &= -(A + 2B)H, \\ a_2 &= \tfrac{1}{2}(A + 4B)H^2. \\ &— — — — — \end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

Bestämmas nu ur observationsmaterialet med tillhjälp af någon utjämningsmetod värdena på koefficienterna $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$, så kunna ur de tre första af dem konstanterna H, A och B beräknas.

För bestämning af kvantiteterna a_0, a_1, $a_2 \ldots\ldots$ kan med fördel användas TSCHEBYSCHEWS interpolationsmetod, som ojämförligt mycket raskare leder till målet än minsta kvadratmetoden.[1])

[1]) TSCHEBYSCHEWS interpololationsmetod ersätter minsta kvadratmetoden i sådana fall som vårt, då det gäller, att ur en serie observerade värden $v_1 + v_2$, svarande mot ekvidistanta värden på den oberoende variabeln t, bestämma koefficienterna a_0, a_1, $a_2, \ldots$ uti den paraboliska formel

$$v_1 + v_2 = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots,$$

som återger sambandet mellan funktionen och variabeln. Metoden ger närmast koefficienterna i en serie efter digniteter af $t - t_m$, hvilket förklarar orsaken till vår serieutveckling efter $t - t_m$ i formel (42).

TSCHEBYSCHEWS egen framställning af metoden återfinnes i Mém. de l'Acad. de St. Pét. Tome I, N:o 5.

Genom elimination af A och B i (44) finner man H vara en af rötterna till en andragrads ekvation

$$H = -\frac{3a_1}{4a_0} + \sqrt{\left(\frac{3a_1}{4a_0}\right)^2 - \frac{a_2}{a_0}}\,.$$

Roten med minustecken framför radikalen förkastas, alldenstund approximatift

$$-\frac{3a_1}{4a_0} = \frac{3}{4}\,H \text{ och } \sqrt{\left(\frac{3a_1}{4a_0}\right)^2 - \frac{a_2}{a_0}} = \tfrac{1}{4}H\,,$$

hvilket framgår af (44) om B approximatift sättes $= 0$.

Sedan H är funnet, kunna kvantiteterna A och B beräknas ur ekvat. (44), och sedermera ur ekvationerna (41) A_0 och δ_{00} härledas. Sista ekvationen (40) ger därefter på förut omtaladt sätt värdena af $\frac{K}{r^2} + H$ och δ_{01}.

En kort framställning af metoden finnes af O. BACKLUND i Mélanges Mat. et Astron. tirés du Bulletin de l'Acad. de St. Pét. 1884, pag. 287: Ueber die Anvendung einer von P. TSCHEBYSCHEW vorgeschlagenem Interpolationsmetode.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1891. N:o 2.
Stockholm.

Smånotiser om de lösa jordlagren.

Af BERNHARD LUNDGREN.

(Meddeladt den 11 februari 1891 genom G. LINDSTRÖM.)

1. **Mammuttand från Bårslöf.**

I oktober 1889 anträffade landtbrukaren JOHAN PAULSON i Bårslöf en tand, som af honom igenkändes tillhöra Mammut, och hvilket fynd omtalades af tidningarne. Denna tand öfverläts välvilligt af Herr PAULSON åt mig till undersökning och då, så vidt jag vet, fynd af Mammut endast ett par gånger förut[1]) omnämts från Sverige, torde det vara af intresse att, så godt omständigheterna medgifva, redogöra för detta fynd. Tanden, hvars vigt uppgifves till 834 gram, synes hafva tillhört högra underkäken; dess längd vid öfre sidan är omkr. 165 mm., hvaraf den slitna tuggytan ung. 135 mm.; öfre ytans bredd är omkr. 70, höjden omkr. 107 mm. Tuggytan visar omkr. 20 tämligen smala, fint veckade eller skrynklade emaljlameller. Den bruna ytan på tandens öfriga delar är genomdragen af en mängd oregelbundna sprickor. Då tanden, för att begagna POHLIGS uttryck,[2]) är hypselodisk, laticoronat, densilamellat och endio-

---

[1]) Ett fynd omnämnes af ERDMANN: Sveriges Quartära Bildningar, s. 159. — Dessutom en kindtand äfven funnen i Skåne och skänkt till Riksmuseum af Borgmästaren S. Trägårdh, ANGELIN, Handledning vid beseendet af Paleontol. Saml. i Riksmuseum, p. 29.

[2]) Dentition und Kraniologie des Elephas antiquus Falc. etc. Nova Acta Acad. Cæs. Leopold. Carol. Germ. Naturæ Curiosorum, T. 53, s. 136 och 163. 1889.

ganal, har den otvifvelaktigt tillhört mammuten (E. primigenius BLUM.)

Herr PAULSON fann denna tand i ett på åkern utlagdt märgelstycke, ur hvilket tuggytan stack fram och ådrog sig hans uppmärksamhet. Efter af Herr PAULSON godhetsfullt meddelade upplysningar och på stället af mig sommaren 1890 tagen kännedom om förhållandena, äro de lösa jordlagren i trakten för fyndet sålunda sammansatta. Såsom af geologiska kartbladet Helsingborg synes, ligger i gränsen mellan Frillestads och Bårslöfs socknar, omkr. 9 kil. s. o. från Helsingborg, en torfmosse kallad Frillestad mosse. Mossen utgöres af en nordligare, bredare del, från hvilken ett kilformigt parti skjuter ut mot s. Enligt geologiska kartan växlar i mossens nordliga del torfvens mäktighet mellan 0,5 och 1 fot och anträffas lermärgel på 2 fots djup. Torfven har nu borttagits från den allra största delen af mossen och densamma är nu odlad. Ungefär på det ställe i den mot s. utskjutande delen, hvarest gränsen mellan de båda nämda socknarna böjer af från o. s. o. till nästan rakt s., har i Bårslöfs socken en märgelgraf upptagits. Vid tiden för mitt besök var märgelgrafven nästan fyld med vatten, men på åkern lågo stycken af den ur grafven upptagna märgeln. Lagerföljden visade sig vara uppifrån nedåt räknadt:

1. Torf, nu borttagen.
2. Sand, stundom grus, ibland t. o. m. rätt groft, 55—95 cent.
3. Moränmärgel, hvaraf 2 slag urskildes.
   α. Ljus »sandmärgel», sandblandad med repade block af urbärgets bärgarter, Saltholmskalk m. m.
   β. Blå »tärningsmärgel», lerhaltig med moränlerans karakteristiska söndersprickande. Denna var ej tillgänglig in situ, liksom ej häller gränsen mellan densamma och den öfverliggande sandmärgeln.

Enligt alldeles bestämd uppgift fans intet sand- eller gruslager emellan dessa båda olika märgelbäddar. Den omnämda tanden anträffades af Herr PAULSON i ett på åkern utlagdt

stycke af »sandmärgeln», d. v. s. den öfre moränbädden. Det har ej lyckats mig att genom slamning upptäcka lämningar af arktiska växter i den under torfven liggande sanden. I mossen uppgifves kolade furustubbar hafva funnits i mängd, äfvensom dylika, dock ej kolade, af ek.

2. Tellina crassa PENN. från postglacial skalgrusbank.

I Index Molluscorum (s. 195) anför LOVÉN Tellina crassa PENN. såsom lefvande vid våra kuster med utbredning från Bohuslän till Bergen. Såsom fossil nämnes denna art icke hvarken af THUDÉN eller i ERDMANN: Sveriges Quartära bildningar, hvaremot den af SARS[1]) anföres från skalbanken vid Ommedalsstrand (postglacial). Om dess nuvarande förekomst i Kattegat säger sig JOH. PETERSEN[2]) hafva vid Hirtsholmarne funnit en efter utseendet att döma fossil valvel, tillhörande denna stora art. Angående dess utbredning vid Stor-Britanniens kuster angifva FORBES och HANLEY[3]) att den finnes från lägsta ebb till under 50 famnar; dess favoritplats synes vara öfre delen af Corallina-zonen, hvarest den lefver nedgräfd i sanden; på några ställen förekommer den dock i sanden på grundt vatten. Den är numera inskränkt till Europas celtiska och boreala provinser, hvarest den förekommer sporadiskt med Bergen såsom nordgräns. I den mediterrana provinsen, hvarest den fans under istiden, är den numera utdöd. I England har den lefvat ända sedan miocentiden. Under vistelsen vid Zoologiska Stationen vid Kristineberg sommaren 1885 fann jag i en närbelägen postglacial skalgrusbank ett högerskal af denna art. Det stämmer förträffligt med beskrifningarne och afbildningarne hos FORBES

---

[1]) Om de i Norge forekommende fossile Dyrelevninger fra Qvartärperioden. 1865, s. 104.

[2]) Om de skalbaerende Molluskers Utbredningsforholde i de danske Have indenfor Skagen 1888, s. 149.

[3]) History of the British Mollusca, del. I, s. 289.

och HANLEY anf. st. I, s. 289 och IV, t. 20, fig. 1 och 2 samt SEARLES WOOD: Monograph of the Crag Mollusca II, s. 226, t. 21, fig. 1 *a—e*, utom däri att de på förstnämnda afbildning synliga radierande strimmorna ej kunna iakttagas på exemplaret från Kristineberg. De finnas dock ej alltid och äro dessutom färgband på epidermis och torde därföre endast sällan vara bibehållna på fossila exemplar, såsom ock figurerna hos WOOD visa. Vårt exemplar saknar epidermis, men skalets yta öfverensstämmer förträffligt med fig. 1 *e* hos WOOD. Då denna intressanta art ej förut, så vidt jag kunnat finna, anförts från Sveriges postglacialbildningar, har det synts mig vara skäl att omnämna densamma.

3. **Keuperblock från Tjörnarp.**

År 1872 fäste E. ERDMANN[1]) uppmärksamheten på förekomsten af lösa block, tillhörande Skånes s. k. Keuper, funna tämligen långt ifrån den nuvarande gränsen för anstående Keuperbildningar. Det synes vara af intresse att närmare lära känna de block från känd moderklyft, som funnits tillsammans med dessa Keuperblock, för att, så vidt möjligt, få säkert afgjordt, huruvida transporten af Keuperblocken skett från n. o. eller möjligen från s. o. genom den baltiska isströmmen. Den märgelgraf, ur hvilken dessa prof tagits och af framlidne Professor WAHLGREN öfverlämnats åt Lunds Geologiska Museum, var belägen i närheten af Tjörnarps järnvägsstation i Skåne. Efter äfven af märgeln bevarade prof att döma, utgöres densamma af en ljust gråbrun, starkt kalkhaltig lera, rikt uppblandad med kvartskorn, större och mindre stenfragment och stenar, en typisk moränlera. Profven äro tagna vid 8—9 alnars djup i märgelgrafven. Af dessa prof kunna följande stenar ej gärna tillhört någon annan bildning än Keuper.

---

[1]) Beskrifning öfver Skånes stenkolsförande Formation, s. 7 anm.

1:o) Röd kalkfri eller föga kalkhaltig lera, ännu tämligen sammanhängande; 11 stycken från 1 till 13 cent.; dessutom smärre korn af denna bärgart, ännu inneslutna i märgelprofven.

2:o) Grönblå, svagt kalkhaltig lera, i färg erinrande om de grönaktiga sandstenarne vid Kågeröd, 2 stycken.

3:o) Ett stycke af en mörkgrön lera.

4:o) Ett stycke svagt kalkhaltig gröngrå lera, som innehåller tämligen mycket genomskinliga kvartskorn.

Dessa äro de enda af de tillvaratagna blocken, som kunna hänföras till Keuper och som, så vidt man för närvarande känner, svårligen kunna härledas från någon annan bildning.

Jämte dessa Keuperblock föreligga från samma märgelgraf följande andra, af hvilka några hemklyft kan tämligen säkert bestämmas.

1:o) Ett stycke finskiffrig gneis, hvars fältspat nästan helt och hållet kaoliniserats.

2:o) Ett stycke af en krinoidstjälk, röd; det mindre skalet af en Spirifer.

3:o) Spräcklig flinta (Kristianstadsområdets).

4:o) Ett block af en gulhvit, grönfläckig kalksten med obestämbara fragmenter af fossil; dock synes en Spondulus däribland förekomma. Liknande bärgart finnes på flera ställen inom Kristianstadsområdet såsom Istaby, Gillaruna.

5:o) Finkornig, lös kalksten, uppblandad med fina genomskinliga kvartskorn och ett eller annat större grönt dylikt.

6:o) 4 fragmenter af Belemniter, af hvilka de 2 säkert tillhöra Actinocamax mammillatus NILSS., det ena möjl. Belemnitella mucronata SCHL.

7:o) Fragment af en tjockskalig Ostrea, rikt försedd med kiselringar.

8:o) Förkoladt träd.

9:o) Järnhaltig sandsten och järnlersten.

10:o) Förvittrad diabas.

11:o) Svafvelkisboll.

Af dessa tyda 3 och 4 gifvet på ursprung från n. o., sannolikt så äfven n:o 5, 6 och 7, hvadan tillvaron af dessa block till sammans med Keuperblocken i moränleran vid Tjörnarp synes bevisa, att Keuperbildningarne förut haft större utbredning åt n. o., än deras nuvarande förekomst i fast klyft angifver.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1891. N:o 2.
Stockholm.

Protanthea simplex n. gen. n. sp., eine eigentümliche Actinie.

Vorläufige Mitteilung.

Von Oskar Carlgren.

[Mitgeteilt den 11 Februar 1891 durch S. Lovén.]

Bei den Studien über Actinien, die ich während der Sommermonate der letzten drei Jahre an der zoologischen Station der K. Akademie der Wissenschaften bei Kristineberg an der Westküste Schwedens getrieben, habe ich einige Formen angetroffen, die entweder neu sind oder weniger genau beschrieben. Unter ihnen war eine kleine Actinie, die beim ersten Anblick einer Anthea glich, aber wegen ihres Baues nicht zu diesem Genus geführt werden kann. Weil es Zeit fordert, ehe ich diese Studien publiciren kann, und obgleich meine Untersuchungen dieser Form noch nicht abgeschlossen sind, will ich vorläufig dieselbe in Kürze charakterisiren. Ich habe dafür ein neues Genus aufgestellt:

Protanthea gen. nov.

mit der einzigen Art: Pr. simplex n. sp.

Die Körperwand scheint beim lebenden Tier sehr dünn, so dass man die Septeninsertionen leicht sehen kann. Die sehr ausgebreitete Fussscheibe ist mit radialen Furchen, die den 24 Septen entsprechen, gezeichnet. Das Mauerblatt ist glatt, ohne Nesselwarzen und Cincliden, in seinem unteren Teile cylindrisch, erweitert sich aber im oberen becherförmig. Es ist mit Längsfurchen versehen, die gleichfalls den Insertionen der Septen ent-

sprechen, und geht ohne deutliche Grenze in die Mundscheibe über.

Die Tentakeln, deren Zahl im Ganzen ungefähr 100 beträgt, scheinen in sechs Gruppen geordnet zu sein. Der Rand, auf dem sie sitzen, ist nämlich nicht grade, sondern wellenförmig. Sie stehen indessen so unregelmässig und zusammengedrängt, dass es sehr schwer ist sie in Cyclen einzuteilen. Wahrscheinlich sind sie auf fünf Cyclen (6—6—12—24—48) verteilt. Die inneren Tentakeln sind von der Länge des Mauerblatts oder etwas länger, die äusseren kürzer, etwas mehr als halb so lang wie die inneren. Sie können sich sehr bedeutend verkürzen, aber der Rand der Mundscheibe kann sich nicht über sie hinwegschlagen, da ein ausgeprägter Sphinkter fehlt.

Die Mundscheibe ist dünn mit Radialfurchen versehen, besonders deutlich sind diejenigen, die den acht Hauptsepten entsprechen. Ebenso kann man auf dem Schlundrohr, das oft teilweise umgestülpt wird, sechs Längsfurchen sehen, von denen zwei die beiden Schlundrinnen bilden, die vier übrigen aber, die schwächer sind, den Insertionen der vier lateralen Hauptsepten gegenüber stehen, von denen ich weiter unten reden werde. Lippenwülste sind nicht vorhanden.

Die Konsistenz des Tieres ist sehr weich. Wenn man das Tier aus dem Schleppnetz aufnimmt, hat es gewöhnlich ein gallertartiges Aussehen. Die Farbe ist lachsrot, die Tentakeln etwas heller; bisweilen ist sie weiss. Ich habe diese Actinie auf Ascidien in dem Gullmar Fjord in Bohuslän auf zwanzig bis dreissig Faden Tiefe gefunden. Die Länge des lebenden Thieres erstreckt sich bis auf ungefähr 1,5 cm. An einem in Kromosmiumsäure konservirten Exemplar habe ich folgende Masse genommen: Die Fussscheibe 6 mm., die Mundscheibe 8 mm., die Länge der Mauerblatts 10 mm., der äusseren Tentakeln 7 mm., und der inneren 13 mm.

An Querschnitten kann man leicht die Anordnung der Septen sehen. Im Ganzen finden sich nur 24 Septen, von denen nur acht sich am Magenrohr inseriren. Diese acht Septen sind so

gruppirt, dass vier, als zwei Septenpaare, längs der zwei Schlundfurchen verlaufen. Es existirt also ein dorsales und ein ventrales Richtungsseptenpaar, die gewöhnlich ihre Längsmuskeln gegen einander wenden. Zwischen ihnen liegen auf jeder Seite zwei Septen, die kein Paar mit einander bilden, da sie beide ihre longitudinellen Muskeln gegen das ventrale Paar der Richtungssepten kehren. Wir haben also ein ventrales Paar mit abgewendeten Längsmuskeln, gegen welches die übrigen Septen mit ihren Längsmuskeln stehen; mit einem Worte, die Längsmuskulatur der vollständigen Septen ist wie bei Edwardsia angeordnet.

Von den unvollständigen Scheidewänden sind vier etwas stärker als die übrigen; jede von diesen kehrt ihre Längsmuskelschicht gegen die vier lateralen vollständigen Mesenterien. Wir haben also vier Paar Scheidewände, von denen jedes aus einem unvollständigen und einem vollständigen Septum besteht. Die zwölf übrigen Septen sind zu sechs Paaren gruppirt mit zugewendeten Längsmuskeln, und alterniren mit den lateralen Septen und mit den Richtungssepten.

Alle Septen sind mit Geschlechtsorganen und Mesenterialfilamenten ausgerüstet. Eine Differenzierung in. Geschlechts- und Filament-septen ist daher nicht vorhanden. Ebenso sind die Mesenterialfilamente nicht, wie gewöhnlich, in einem Nesseldrüsenstreifen und zwei Flimmerstreifen differenziert. Die Filamente zeigen überall eine gleiche Beschaffenheit; nur ein Drüsenstreifen ist vorhanden, während die Flimmerstreifen nicht zur Entwicklung gekommen sind.

Um die Fläche zu vergrössern, auf welcher die Längsmuskeln der Septen geordnet sind, hat die Stützlamelle die gewöhnlichen Einfaltungen, die auf dem Zwischenteil der Septen, wo die Geschlechtsorgane sich befinden, am schwächsten entwickelt sind. Sie erreichen doch nie im oberen und unteren Teile eine mehr bedeutende Grösse. Die transversalen Septenmuskeln, die ich nur an Querschnitten des Tieres untersucht habe, scheinen ungefähr gleich entwickelt wie die longitudinellen zu sein. Weder Septalstomata noch Acontien sind beobachtet worden. Ein Parieto-

basilarmuskel, der sich etwas höher als die halbe Höhe des Mauerblatts erstreckt, ist dagegen vorhanden.

Das Tier ist getrennten Geschlechts. Beinahe alle untersuchten Exemplare hatten gut entwickelte Geschlechtsorgane, welche doch kaum Besonderes bieten, wesshalb ich sie hier vorbeigehe.

Die Tentakeln und die Mundscheibe sind wie gewöhnlich gebaut. Keine mesodermale Muskeln sind hier vorhanden. Dagegen zeigt das Mauerblatt einen ganz anderen Bau als den gewöhnlichen. Man trifft hier dieselben Gewebe, die sich auf der Mundscheibe und den Tentakeln vorfinden. Auf Quer- und Längs-schnitten zeigt sich eine gut entwickelte ektodermale Nerven- und Längsmuskel-schicht. Das Ektoderm des Mauerblatts ist mit zahlreichen Nesselzellen versehen, doch nicht in so grosser Zahl wie auf den Tentakeln. Die Nervenfaserschicht ist hier gut entwickelt und feine Fibrillen können auch ein Stückchen auf der Fussscheibe verfolgt werden. Ueber die Ganglienzellen und ihre Verbreitung will ich mich jetzt nicht näher äussern; sie scheinen indessen recht zahlreich an dem Mauerblatt vorzukommen. Das Mesoderm, mit geringen Kernen versehen, zeigt auf der ektodermalen Seite des Mauerblatts zahlreiche Einfaltungen um die Fläche der gut entwickelten Längsmuskeln zu vergrössern. Auf der entodermalen Seite liegt eine verhältnissmässig gut entwickelte Ringmuskelschicht, die keinen ausgeprägten Ringmuskel unterhalb der Tentakeln bildet, sondern auf allen Teilen ein gleiches Aussehen zu haben scheint.

Zu welchem Actinientribus wird man diese Form rechnen? Hat sie Charaktere mit einigen der übrigen Gruppen gemein? Wir wollen mit einigen Worten diese Fragen näher erörtern.

Wenn wir zuerst auf die Anordnung der Septen Rücksicht nehmen, so haben wir bekanntlich bei Edwardsia nur acht Septen, ein dorsales und ein ventrales Richtungsseptenpaar mit abgewendeten Längsmuskeln. Jederseits zwischen diesen Paaren finden sich zwei unpaarige Scheidewände, deren Längsmuskeln dieselbe Stellung wie die dorsalen Richtungssepten einnehmen, das heisst, sie sind dem ventralen Septenpaare zugewendet.

Bei den Hexactinien dagegen sind alle Septen paarweise geordnet, und so dass, mit Ausnahme der ventralen und dorsalen Richtungssepten, deren Längsmuskeln abgewendet sind, jedes Septenpaar seine longitudinellen Muskeln gegen einander kehrt. In ihrer einfachsten Gestalt haben sie nur sechs Paare von Septen, gewöhnlich finden sich doch zwischen ihnen Paare von der zweiten, dritten Ordnung u. s. w. Indessen ist durch die Beobachtungen von LACAZE-DUTHIERS, HADDON, MC. MURRICH, DIXON und BOVERI[1]) an den Tag gelegt, dass gewisse Hexactinien ein Stadium in ihrer Entwicklung durchlaufen, welches mit der Septenanordnung bei Edwardsien übereinstimmt, dass sie ein »Edwardsiastadium» durchgehen. Geschlechtsreife Hexactinien, die auf diesem Stadium teilweise stehen geblieben, sind noch wenig bekannt. Freilich finden sich Anzeichen dazu bei der von STRETHILL WRIGHT[2]) untersuchten Halcampa Fultoni, einer Aktinie mit zwölf vollständigen Septen, von welchen acht stärker und allein mit Mesenterialfilamenten ausgestattet sind. Die Muskelanordnung der stärkeren Septen entspricht der der Edwardsien. Ebenso hat eine andere, von R. HERTWIG[3]) beschriebene Halcampa, H. clavus, acht starke und vier schwache Septen, von welchen die ersteren das Edwardsiastadium repräsentiren.

Wie oben gesagt finden sich bei Protanthea 24 Septen, von denen nur acht an dem Magenrohr sich inseriren. Die Muskeln dieser acht vollständigen Septen sind wie die der Edwardsien angeordnet. Von den unvollständigen Scheidewänden bilden zwölf sechs Paare mit zugewendeten Längsmuskeln. Die Gruppirung der vier übrigen Septen ist so angeordnet, dass jedes mit den vier lateralen vollständigen Scheidewänden ein Septenpaar bildet.

Wenn schon nur acht Mesenterien vollständig sind, zeigen doch die Zahl und Anordnung derselben bei der Protanthea deutlich den Typus der Hexactinien. Wir können uns nur

[1]) Ich citire hier nur BOVERI: Über Entwicklung und Verwandtschaftsbeziehungen der Aktinien, Zeits. f. wiss, Zool., Band 49, 1889.

[2]) STRETHILL WRIGHT: Observations on British Protozoa and Zoophytes Ann. and Mag. of Nat. Hist., Ser. 3, vol. VIII. 1861.

[3]) R. HERTWIG: Die Actinien der Challenger-Expedition, Jena 1882.

denken, dass die unvollständigen Scheidewände, die mit den lateralen, vollständigen, Paare bilden, sich am Magenrohr inserirt hätten, und wir haben eine deutliche Hexactinie mit sechs Paaren vollständiger Mesenterien der ersten Ordnung und sechs der zweiten, welche das Schlundrohr nicht erreichen. Man würde, hinsichtlich der Septen, die Protanthea als eine Hexactinie betrachten können, die auf einem Stadium zwischen dem Typus der Edwardsien und dem der Hexactinien Geschlechtsreife erhalten hätte.

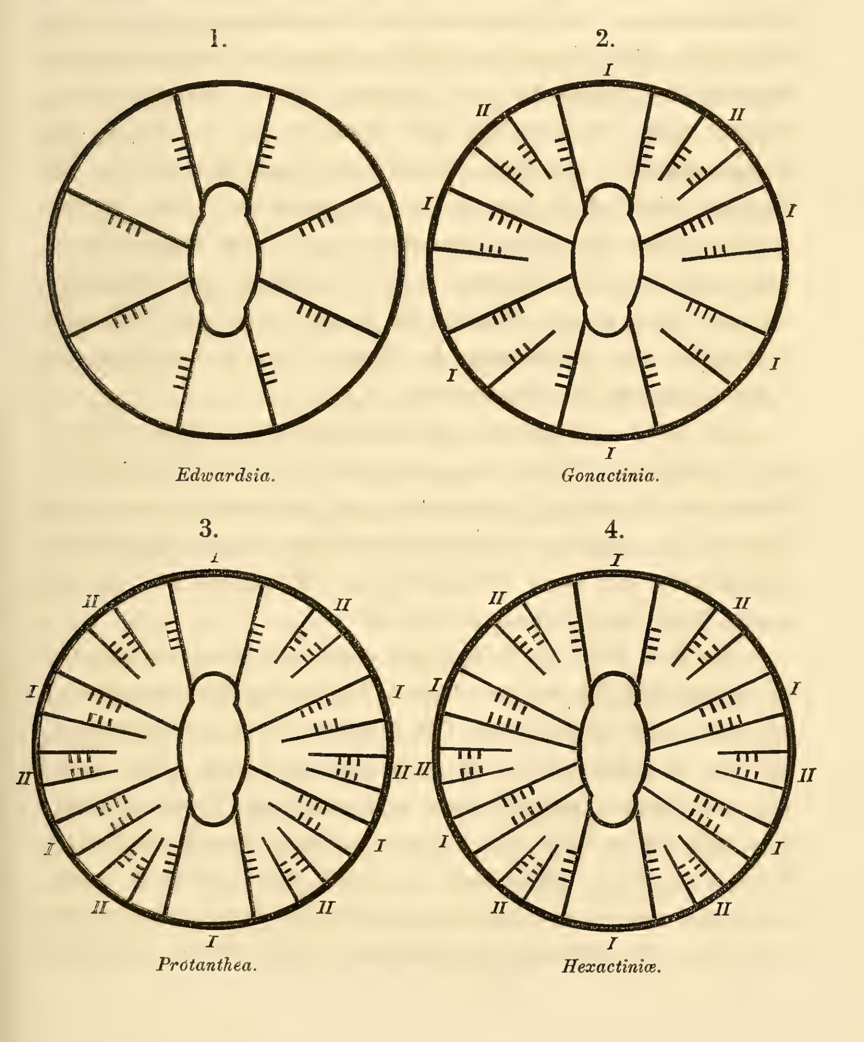
Ehe ich zu der Frage übergehe, warum Protanthea nicht zu den Hexactinien geführt werden kann, will ich noch einige Worte über die von BLOCHMANN und HILGER[1]) näher beschriebene interessante Gonactinia prolifera sagen. Den Untersuchungen dieser Herren gemäss hat Gonactinia »zwei Septensysteme die einander vollständig gleichen, aber umgekehrt orientirt sind. Das eine derselben besteht nur aus Makrosepten, das andere nur aus Mikrosepten. Jedes derselben zeigt in sich dieselbe Muskelanordnung wie sie sich bei den Edwardsien findet», also acht vollständige und acht unvollständige Septen, wie die unten stehende schematische Figur zeigt. Sie sagen weiter von dem Platz der Gonactinia im Systeme: »Vielleicht würde sie am besten in die Nähe der Zoantheæ zu stehen kommen, mit denen sie durch das Vorhandensein von zweierlei Scheidewänden übereinstimmt. Sie ist aber von denselben wieder scharf geschieden durch den Besitz zweier Schlundrinnen». Obgleich ich diese Actinie nicht habe untersuchen können, kann ich nicht anders als mit HADDON[2]) einstimmen, wenn er sagt (p. 342) »The agreement of the 'macrosepta' with the mesenteries of Edwardsia is suggestive, but nothing appears to be gained by turning the animal round and seeing a similar agreement in the 'microsepta'». HADDON vergleicht weiter die zwei unvollständigen Septenpaare, die an beiden Seiten des dorsalen Richtungsseptenpaares liegen, mit den Septen von

[1]) BLOCHMANN und HILGER: Über Gonactinia prolifera SARS, eine durch Quertheilung sich vermehrende Aktinie. Morph. Jahrbuch Bd. 13, 1888, p. 385.

[2]) HADDON, A Revision of the British Actiniæ. I, Scient. Trans. of Royal Dublin Society. IV, Ser. 2, 1889.

der zweiten Ordnung der typischen Hexactinien »The sulculo-lateral pairs of similar mesenteries in Gonactinia may for the present be regarded as being the equivalent of these (secondary imperfect mesenteries), but of which only two pairs are developed.» Dass HADDON in dieser Ansicht Recht hat, glaube ich; es ist auch dieselbe Auslegung die hier für Protanthea angegeben wurde.

Gonactinia unterscheidet sich also von Protanthea hinsichtlich der Septen nur dadurch, dass bei der letzteren die secundären Septenpaare, die zwischen den lateralen und zwischen den late-



Edwardsia. *Gonactinia.*

Protanthea. *Hexactiniæ.*

ralen und ventralen Scheidewänden stehen, bei der ersteren nicht zur Entwicklung gekommen sind. Gonactinia und Protanthea sind also in dieser Hinsicht morfologische Mittelformen zwischen Edwardsien und Hexactinien, wie man aus dem oben stehenden Schema sehen kann.

Es giebt indessen einen anderen Grund, warum man die Protanthea zu den Hexactinien nicht führen kann, die gut entwickelte ektodermale Nerv- und Muskelschicht des Mauerblatts. Eine solche Anordnung fehlt, so viel ich weiss, den anderen Actiniengruppen mit Ausnahme den Cerianthiden und der Gonactinia, die auch eine geringe Differenzierung der Gewebe zwischen Mundscheibe, Mauerblatt und Tentakeln zeigen. Was Gonactinia betrifft, sagen BLOCHMANN und HILGER nur (p. 391): »Die Längsmuskulatur des Mauerblattes bietet kaum Besonderes». Die Figuren zeigen auch eine solche gut entwickelt. Die Nervenschicht haben sie nicht untersucht, es ist aber wahrscheinlich dass eine solche vorhanden ist. Protanthea und Gonactinia stimmen also in der Hauptsache in zwei wichtigen Merkmalen überein, in der Anordnung der Septen und der ektodermalen Längsmuskulatur des Mauerblatts.

Ich halte es desswegen für zweckmässig diese beiden Gattungen in eine neue Tribus zusammenführen: *Tribus Protantheæ* mit folgendem Charakter: *Actiniarien mit paarweise angeordneten Septen. Nur acht Septen vollständig auf dem »Edwardsiastadium». Schlundrohr mit zwei Schlundrinnen. Mauerblatt mit ektodermaler Nerv- und Längsmuskelschicht.*

Ich habe nicht die Tribus nach der Gonactinia nennen wollen, da es ungewiss ist ob Gonactinia nicht eine Jugendform sein mag. HADDON sagt nämlich von den männlichen Geschlechtsorganen, die von BLOCHMANN und HILGER abgebildet sind. »The testes are very different from the testes as figured by the Brothers HERTWIG and indeed from any Actinian generative organ, with which I am acquainted. These bodies, however, are so similar in appearence and size to the commensal unicellular algæ (zooxanthellæ), that Drs. BLOCHMANN and HILGER must adduce conclusive

evidence of their sexual nature before their view can be accepted.»

HADDON hat die Vermutung aufgestellt, dass Gonactinia eine Jugendform von Anthea Cereus oder Actinopsis flava sei. Es ist dies wohl wenig wahrscheinlich, da die erstere, so weit mir bekannt, gar nicht, und die letztere selten an der norwegischen Küste angetroffen wird, wo hingegen Gonactinia sehr allgemein ist. Die Längsmuskulatur der Tentakeln von Anthea ist übrigens ektodermal, während dass diejenige der Gonactinia auch mesodermal ist.

Dass Gonactinia keine Jugendform der Protanthea ist, wird auch glaublich, da in Betreff dieser Form dasselbe wie von der Anthea gilt.

Auf das Verhältniss der Tribus Protantheæ zu den übrigen Actinien will ich mich nicht hier näher einlassen. Es ist wohl möglich, dass die ursprünglichen Hexactinien eine ektodermale Nerv- und Längsmuskelschicht auch auf dem Mauerblatt hatten. Wenn es sich so verhielte, würden die Protanthea nicht so weit von denselben entfernt stehen. Jedenfalls zeigt Protanthea in der geringen Zahl der vollständigen Septen, in der Verteilung der Geschlechtsorgane und Mesenterialfilamente auf allen Septen, und in dem ähnlichen Bau des Mauerblatts, der Mundscheibe und der Tentakeln, den Typus einer wenig differenzirten Actinie.

Ich hoffe nächstens einige Beobachtungen über andere Actinienformen mitteilen zu können.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts. från sid. 44.)

Författarne.

HAMBERG, A., Mineralogische Notizen. 1—13. Sthm 1888—90. 8:o.
KROK, TH. O. B. N., Svensk botanisk literatur 1889. Lund 1890. 8:o.
LINDEBERG, C. J., Hieraciologiska bidrag. Göteborg 1882. 4:o.
— Småskrifter. 6 st. 8:o.
RETZIUS, G., Biologische Untersuchungen. Neue Folge. 1. Sthm 1890. 4:o.
CIALDI, A., Sul moto ondoso del mar. Ed. 2. Roma 1866. 8:o.
FLETCHER, L., On the Mexican meteorites ... London 1890. 8:o.
— Småskrifter. 7 st. 8:o.
REUTER, E., Bidrag till kännedomen om macrolepidopter-faunan i Ålands och Åbo skärgårdar. Hfors 1890. 8:o.
— Småskrifter. 4 st. 8:o.
VOGDES, A., Bibliography of palæozoic Crustacea 1698—1889. Washington 1890. 8:o.

Stockholm 1891. Kongl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 48. 1891. № 3.

Onsdagen den 11 Mars.

INNEHÅLL:

Tillkännagafs att Akademiens utländske ledamot, Botanicus primarius vid botaniska trädgården i S:t Petersburg CARL JOHAN MAXIMOWICZ med döden afgått.

Med anledning af remiss från K. Ecklesiastik-Departementet ingången å en genom härvarande Kongl. Spanska Minister på hans Regerings vägnar framställd inbjudning till deltagande från Sveriges sida i en historisk-amerikansk utställning i Madrid till minne af Amerikas upptäckt för 400 år sedan, äfvensom af en från samme minister till Akademien aflåten särskild skrifvelse i ämnet, afgåfvo Hrr Frih. NORDENSKIÖLD, SMITT och RETZIUS rörande detta ärende infordradt utlåtande, som af Akademien godkändes, och skulle svar på den erhållna remissen i öfverensstämmelse dermed aflåtas.

På tillstyrkan af komiterade antogs till införande i Akademiens Handlingar en af Docenten CARL AURIVILLIUS inlemnad afhandling med titel: »Ueber Symbiose als Grund accessorischer Bildungen bei marinen Gastropoden».

Berättelser om utförda resor hade blifvit afgifna dels af Professor CHR. AURIVILLIUS och Amanuensen H. DAHLSTEDT, hvilka med understöd af Akademien under sistliden sommar gjort forskningsresor inom landet, och dels af Docenten S. SÖDERBERG och Mariningeniören T. NYSTEDT öfver af dem i egenskap af Letterstedtska stipendiater utförda utländska resor.

Hr TIGERSTEDT redogjorde för undersökningar, som af honom blifvit verkställda, öfver den blodmängd som utdrifves från venstra hjertkammaren.*

Hr ROSÉN, som med understöd af Akademien under sistliden sommar anställt pendeliakttagelser i Sala grufva, meddelade derom några förberedande resultater.

Hr ÅNGSTRÖM redogjorde för innehållet af Ingeniören NYSTEDTS ofvannämnda reseberättelse.

Hr PETTERSSON delgaf resultaten af undersökningar, som under sistliden sommar blifvit utförda vid Kristinebergs zoologiska station dels af Fröken H. LOVÉN öfver algernas respiration, och dels af Fröken A. PALMQVIST öfver Gullmarfjordens hydrografi.

Hr WITTROCK meddelade dels en uppsats af Fil. Kandidaten L. ROMELL: »Observationes mycologicæ. I. De genere Russula»*, och dels en uppsats af Lektor A. NILSSON: »Ueber die Afrikanischen Arten der Gattung Xyris»*.

Hr MITTAG LEFFLER meddelade dels en uppsats af D:r E. PHRAGMÉN: »Ein elementarer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra»*, och dels en uppsats af D:r I. BENDIXSON: »Bestämning af de Algebraiskt upplösbara likheter, i hvilka hvarje rot kan uttryckas som en rationel funktion af en af rötterna».*

Sekreteraren öfverlemnade för intagande i Akademiens skrifter följande afhandlingar och uppsatser: 1:o) »Om Ribaucour's cykliska system», af Professor A. V. BÄCKLUND (Se Bihang till K. Vet.-Akad. Handl.); 2:o) »La radiation des nuages supéri-

eurs autour les minima barométriques», af Amanuensen H. E. HAMBERG (Se Bihang etc.); 3:o) »Geologiske Iakttagelser paa Snæfellsnes og i Omegnen af Taxebugten i Island», af Läroverks-adjunkten TH. THORODDSEN (Se Bihang etc.); 4:o) »Iakttagelser öfver Ephippierna eller vinteräggskapslarne hos småkräftarten Daphnia pulex», af Friherre G. C. CEDERSTRÖM*; 5:o) »Härledning af en formel inom den matematiska statistiken», af Amanuensen G. ENESTRÖM*.

Den FERNERSKA belöningen för året tilldelades Filos. Kandidaten G. CASSEL för hans i Bihanget till Akademiens Handlingar införda uppsats: »Om den konforma afbildningen af ett plan på ett prisma».

Den LINDBOMSKA belöningen beslöt Akademien i lika delar öfverlemna dels åt Filos. Kandidaten H. BÄCKSTRÖM för hans i Bihanget offentliggjorda uppsats: »Ueber angeschwemmte Bimsteine an Norwegischen Küsten» med fästadt afseende jemväl på hans undersökningar af mineral från Langesund, samt dels åt Filos. Kandidaten R. MAUZELIUS för hans i denna tidskrift under året intagna uppsats om fluornaftalinsulfonsyra och med hänsyn äfven till hans förut i samma ämne till Akademien inlemnade arbeten.

Den FLORMANSKA belöningen fann Akademien denna gång icke anledning att bortgifva, utan skulle det motsvarande räntebeloppet läggas till Flormanska donationskapitalet.

För vetenskapliga resor inom landet beslöt Akademien utdela följande reseunderstöd:

åt Docenten A. WIRÈN 150 kr. för uppehåll vid Kristinebergs zoologiska station i ändamål att studera lägre hafsdjur, i främsta rummet mollusker;

åt vice Lektorn G. ADLERZ 150 kr. för fortsatta undersökningar öfver Pantopoderna äfvenledes vid Kristineberg;

åt Filos. Kandidaten O. CARLGREN 150 kr. för fortsatta studier öfver vestkustens Actinier;

åt Filos. Kandidaten E. Borgström 150 kr. för idkande vid Kristineberg af studier öfver i fiskar lefvande parasiter af Echinorhynchernas grupp;

åt Professorn F. R. Kjellman 250 kr. för anställande af undersökningar öfver Cladophoraceerna inom Östersjön och Kattegat;

åt Filos. Kandidaten A. Y. Grévillius 150 kr. för studerande af de Öländska alvarväxternas morfologi och anatomi;

åt Filos. Kandidaten E. Nyman 200 kr. för undersökningar af lefvermossfloran inom Norrbottens län och särskildt i Lule lappmark;

åt Filos. Kandidaten G. Andersson 125 kr. för studerande af torfmossar i trakten af Omberg; och

åt studeranden C. Wiman 125 kr. för anställande af geologiska och palæontologiska undersökningar inom Jemtland.

De till Akademiens förfogande ställda statsmedel för instrumentmakeriernas uppmuntran skulle i lika lotter tilldelas matematiske och fysiske instrumentmakarne P. M. Sörensen och G. Sörensen.

Följande skänker anmäldes.

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

H. MAJ:T KONUNGEN.

Martius, C. F., Eichler, A. G., Urban, I., Flora Brasiliensis. F. 108. Lipsiæ 1890. F.

Upsala. *Botaniska sektionen af naturvetenskapliga studentsällskapet.*
Sitzungsberichte. Jahrg. 3 (1888). Cassel. 8:o.

Kristiania. *Det Norske Justeerwæsen.*
Aarsberetning. 14. 1890/$_{12}$. 8:o.

Baltimore. *Peabody institute.*
Annual report. 23. 1890/$_5$. 8:o.

Berlin. *K. Geodätisches Institut.*
Jahresbericht. Jahr 1889/90. 8:o.

— *Deutsche geologische Gesellschaft.*
Zeitschrift. Bd. 41 (1889): H. 1—4; Register zu Bd. 31 (1879)—40 (1888). 8:o.

Dresden. *K. Sächsisches statistisches Bureau.*
Zeitschrift. Jahrg. 24 (1888): H. 1—4 & Suppl.; 25 (1889): 3—4.

(Forts. å sid. 130.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1891. N:o 3.
Stockholm.

Bestämning af den från venstra hjertkammaren utdrifna blodmängden.

Af Robert Tigerstedt.

[Meddelad den 11 Mars 1891.]

De bränbara ämnen, som utgöra den lefvande kroppens kraftkälla, och det för förbränningens underhållande nödvändiga syret föras genom blodet till kroppens alla delar. För en noggran kunskap om de i dessa försiggående processerna är derför kännedomen om den genom kroppen på tidsenheten strömmande, d. ä. af venstra hjertkammaren på tidsenheten utdrifna blodmängden af en framstående betydelse. Också har man redan länge sökt att bestämma denna qvantitet; detta har likväl icke skett genom direkta mätningar utan genom beräkningar, hvilkas grundlöshet ligger i öppen dag, så snart man något närmare granskar de öfverläggningar, på hvilka de stöda sig. Hittills eger man, mig veterligen, endast en enda exakt lösning af ifrågavarande uppgift, men denna hänför sig till ett specialfall, från hvilket intet med säkerhet kan slutas angående den af venstra hjertat under normala förhållanden utdrifna blodmängden. Denna lösning grundar sig på en undersökning, som för några år sedan å Ludwigs laboratorium utfördes af Stolnikow. Han afstängde blodet från den nedstigande bröstaortan och från alla till hufvudet, halsen och de främre extremiteterna utgående arterer, med undantag af den ena a. carotis. Från denna lät han blodet genom en för uppmätning af strömmande vätskemängders volym afsedd apparat rinna till den centrala änden af den ena v. jugularis och derifrån tillbaka till högra hjertat. Under sådana

förhållanden reducerades motståndet mot blodets strömning till ett minimum, och dessa undersökningar — huru intressanta resultat de än i afseende på andra frågor meddelat — lära oss alldeles intet om den af hjertat vid normalt blodomlopp utdrifna blodmängden.

Genom de undersökningar öfver hjertats verksamhet under olika förhållanden, som jag tillsammans med doktor J. E. Johansson utfört under de senare åren, blef för mig behofvet af en, icke på godtyckliga antaganden stödd, utan genom exakta mätningar vunnen kunskap om hjertats pulsvolym allt mera känbart. En iakttagelse, som jag gjorde vid studiet af däggdjurshjertats beroende af blodtillströmningen till detsamma, ingaf mig förhoppning att experimentelt kunna besvara frågan.

Flere forskare hafva uppgifvit, att hjertat i så hög grad skulle vara beroende af blodströmningen i dess kransarterer, att t. o. m. en helt kortvarig afklämning af den ena af dem skulle kunna helt och hållet upphäfva hjertats förmåga af verksamhet. Andra forskare hade visserligen kommit till en mindre ogynsam mening om hjertats förmåga att reda sig utan blodtillförsel, men då de förstnämndes ännu likväl mångenstädes ställdes i främsta rummet, ville jag erhålla ett svar på frågan genom att gå till väga så radikalt som möjligt. Jag band derför icke den ena eller den andra af kransartererna, utan afstängde blodet helt och hållet från kamrarne och från aorta genom att på förmaken anbringa en väl slutande pincett. Jag fann att man sålunda kunde hålla blodet afstängdt från kamrarne under 4 till 5 minuter, ja i gynsamma fall ännu längre, utan att kamrarne förlorade sin arbetsförmåga: när pincetten borttogs, återhemtade hjertat sig snart och inom kort hade blodtrycket åter uppnått sitt normala värde.

Möjligheten att bestämma den ur venstra kammaren utdrifna blodmängden var härmed gifven. Det gälde nu att under den tid af 3 till 5 minuter, under hvilken man, utan att döda hjertat, på nyss angifvet sätt kan hålla blodomloppet upphäfvet, i den ogrenade uppstigande aortan införa en för mätning af

strömmande blodmängder egnad apparat. Lyckades detta, så vore den afsedda bestämningen utförd.

För att mäta den strömmande blodmängden konstruerade jag följande instrument (*strömur*). Blodet strömmar genom en horizontalt ställd och vid försökets början med fysiologisk koksaltlösning fyld glascylinder, försedd med en ihålig kula, hvars diameter är i det närmaste lika stor som cylinderns. Oberäknadt kulan rymmer cylindern 10,4 ccm. Det blod, som flyter genom cylindern, skjuter kulan framför sig och kan så mycket mindre i någon märkbar grad tränga sig fram *mellan* kulan och cylinderns vägg, som ju hos en i ett rör strömmande vätska hastigheten i de mest periferiska lagren är ytterst obetydlig. När kulan kommit till cylinderns distala ände, omvrides cylindern genom en af LUDWIG angifven mekanism och blodet drifver åter kulan framför sig. Då man känner cylinderns rymd, behöfver man blott räkna omvridningarnas antal, för att lära känna den på en viss tid genom apparaten strömmande blodmängden.

Största svårigheten mötte, såsom naturligt var, då det gälde att förena denna apparat med aorta. Den metod, jag härvid användt, är i korthet följande.

Sedan blodströmningen på nyss angifvet sätt upphäfts, anbragtes på den periferiska änden af den uppstigande aorta en liten pincett, hvarefter aorta mellan denna och hjertat öppnades. I hvardera änden af den afskurna aorta inbands en kärlets lumen motsvarande liten kanyl, som förenades med strömuret. Sedan detta var gjordt, borttogos pincetterna från förmaken och från den periferiska änden af aorta: cirkulationen kom åter i gång.

För att låta hjertat hemta sig, innan mätningen började, leddes blodet med kringgående af cylindern direkte till den periferiska änden af aorta. Då cirkulationen syntes vara något så när normal, omvreds en kran, och hela den ur hjertat strömmande blodmassan tvangs att strömma genom mätningscylindern.

Aorta, mellan strömuret och hjertat, äfvensom a. carotis förenades med qvicksilfvermanometrar, hvilka på oändligt papper

upptecknade blodtrycket och hjertslagen. Den med a. carotis förenade manometern var afsedd att tjena till kontroll att någon koagulation af blodet i strömuret icke inträffat. Så länge begge manometrarne rörde sig parallelt, egde naturligtvis ingen sådan rum och försöket kunde begagnas. Koagulerar blodet i strömuret, så uppstår derigenom ett hinder för dess strömning, trycket stiger centralt (d. ä. i aorta) och sjunker periferiskt (d. ä. i carotis). Märkvärdigt nog, har koagulation aldrig inträffat så tidigt, att derigenom försöket skulle hafva blifvit utan resultat, och endast ytterst sällan har den vållat, att försöket behöft afbrytas, innan en fullt tillräckligt lång serie af bestämningar erhållits.

Då det är min afsigt att å annat ställe utförligt redogöra för denna undersökning och dervid vunna resultat, skall jag här, till en första belysning af föreliggande spörsmål, endast anföra ett hithörande, temligen typiskt försök.

I den tabellariska öfversigten af försökets resultat betecknas såsom en »period» den tid, som behöfves för mätningscylinderns fyllande. För hvarje sådan period angifves i tabellen maximum och minimum samt medelvärdet af blodtrycket i aorta och i carotis, den på grund af hjertslagens antal under perioden beräknade pulsfreqvensen på 10 sekunder, den af hjertat vid hvarje systole och på 1 sekund utdrifna blodmängden (pulsvolymen, resp. sekundvolymen). Äfven angifves tiden från mätningens början till början af hvarje period; härvid bör märkas att efter hvarje period en tid af i medeltal 1.16 sekund användts till vändningen af strömuret. Denna tid ingår i den i kol. 2 angifna löpande tiden.

Försök X. Den 20 januari 1891. Kanin, vigt 1970 gm.

Period efter ledningen genom strömuret.	Tid från början af ledningen genom strömuret; sec.	Pulsfreqvens på 10″.	Blodtryck; mm. Hg. Aorta. max.	Aorta. min.	Aorta. med.	Carotis. max.	Carotis. min.	Carotis. med.	Pulsvolym; ccm.	Sekundvolym; ccm.
1	0	28.9	130	103	116½	100	82	91	1.30	3.76
2	4	28.9	132	108	120	104	84	94	1.30	3.76
3	8	28.1	148	120	134	118	96	107	1.16	3.26
4	12	28.1	146	130	138	116	106	111	1.16	3.26
5	16	30.0	150	134	142	124	108	116	1.16	3.48
6	20	29.4	158	142	150	128	116	122	1.04	3.06
7	25	29.4	158	138	148	128	116	122	1.04	3.06
8	30	26.5	168	140	154	140	112	126	1.16	3.07
9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10	40	28.6	167	140	153½	134	118	126	0.87	2.49
11	45	27.3	170	148	159	144	125	134½	0.87	2.38
12	51	30.2	166	150	158	140	125	132½	0.80	2.42
13	57	29.7	168	150	159	142	128	135	0.95	2.82
14	62	29.7	168	150	159	142	130	136	0.74	2.20
15	68	30.9	168	154	161	142	128	135	0.80	2.47
16	73	30.0	172	150	161	150	130	140	0.69	2.07
17	79	30.2	168	148	158	140	128	134	0.80	2.42
18	85	32.0	172	156	164	146	135	140½	0.65	2.08
19	91	30.6	170	152	161	144	126	135	0.69	2.11
20	97	30.6	168	146	157	142	130	136	0.69	2.11
21	103	28.8	172	126	149	146	112	129	0.69	1.99
22	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
23	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
24	130	21.8	167	102	134½	144	86	115	0.25	0.55
25	150	30.0	144	124	134	120	106	113	0.50	1.50
26	157	20.0	170	128	149	140	110	125	0.87	1.74
27	165	24.3	160	128	144	136	112	124	0.74	1.80
[1])28	171	21.2	166	126	146	136	112	124	0.80	1.70
[1])29	178	25.0	160	108	134	137	96	116½	0.69	1.73
[1])30	186	29.5	156	146	151	134	124	129	0.61	1.80

[1]) Qväfning.

Period efter ledningen genom strömuret.	Tid från början af ledningen genom strömuret; sec.	Pulsfreqvens på 10″.	Blodtryck; mm. Hg.						Pulsvolym; ccm.	Sekundvolym; ccm.
			Aorta.			Carotis.				
			max.	min.	med.	max.	min.	med.		
[1])31	193	30.0	154	142	148	132	120	126	0.58	1.74
[1])32	201	30.8	152	141	146½	132	120	126	0.52	1.60
[1])33	209	29.7	154	144	149	132	122	127	0.45	1.34
[1])34	218	30.0	154	144	149	134	122	128	0.43	1.29
35	228	26.2	154	118	136	132	104	118	0.55	1.44
36	237	27.7	158	148	153	138	128	133	0.58	1.61
37	246	28.3	160	150	155	138	124	131	0.61	1.73
38	253	28.3	157	144	150½	134	118	126	0.61	1.73
39	261	23.7	156	122	139	130	110	120	0.65	1.54
40	268	27.8	150	124	137	124	110	117	0.65	1.81
41	276	28.3	154	136	145	132	116	124	0.61	1.73
42	283	28.6	150	138	144	128	114	121	0.69	1.97
43	290	28.8	146	130	138	122	112	117	0.74	2.07
44	296	30.0	148	108	128	126	94	110	0.58	1.74
45	304	30.0	146	128	137	122	110	116	0.69	2.07
46	311	28.3	142	110	126	120	96	108	0.61	1.73
47	318	28.6	140	124	132	118	108	113	0.69	1.97
48	325	27.8	138	110	124	114	96	105	0.65	1.80
49	332	28.3	146	128	137	124	104	114	0.61	1.73
50	339	28.6	138	120	129	114	102	108	0.69	1.97
51	347	27.3	136	118	127	114	102	108	0.69	1.88
52	353	28.3	138	118	128	116	102	109	0.61	1.73
53	361	27.3	136	120	128	114	102	108	0.69	1.88
54	368	27.8	138	118	128	116	100	108	0.65	1.81
55	376	28.6	150	128	139	128	104	116	0.74	2.12
56	384	26.7	132	100	116	108	88	98	0.58	1.55
[1])57	392	26.7	136	118	127	115	98	106½	0.65	1.74
[1])58	399	28.3	137	120	128½	115	104	109½	0.61	1.73
[1])59	407	28.3	137	126	131½	117	106	111½	0.61	1.73
[1])60	414	28.2	134	124	129	114	105	109½	0.55	1.55
[1])61	422	27.5	136	126	131	118	110	114	0.47	1.29
[1])62	431	27.9	136	128	132	118	110	114	0.45	1.26

[1]) Qväfning.

Period efter ledningen genom strömuret.	Tid från början af ledningen genom strömuret; sec.	Pulsfreqvens på 10″.	Blodtryck; mm. Hg. Aorta. max.	min.	med.	Carotis. max.	min.	med.	Pulsvolym; ccm.	Sekundvolym; ccm.
[1])63	441	27.0	136	126	131	118	108	113	0.42	1.13
[1])64	452	26.7	140	130	135	121	114	117½	0.37	0.99
[1])65	464	26.3	136	122	129	120	106	113	0.39	1.03
[1])66	475	26.1	136	120	128	118	104	111	0.33	0.86
[1])67	490	25.6	136	122	129	118	102	110	0.33	0.84
[1])68	503	24.9	132	126	129	116	108	112	0.32	0.80
[1])69	518	24.8	139	118	128½	121	104	112½	0.37	0.92
70	530	24.7	152	130	141	132	108	120	0.50	1.24
71	541	24.3	148	132	140	129	114	121½	0.61	1.48
72	549	25.7	144	124	134	122	108	115	0.59	1.52
73	558	25.2	140	110	125	120	96	108	0.61	1.54
74	567	25.7	136	118	127	116	104	110	0.58	1.49
75	576	25.7	134	118	126	116	102	109	0.58	1.49
76	584	26.2	132	114	123	111	100	105½	0.55	1.44
77	593	26.7	128	112	120	110	96	103	0.58	1.55
78	601	26.2	126	110	118	106	94	100	0.55	1.44
79	610	26.7	128	110	119	108	96	102	0.58	1.55
80	619	27.1	126	106	116	106	92	99	0.55	1.49
81	627	26.2	124	108	116	106	92	99	0.55	1.44
82	636	28.0	120	108	114	102	88	95	0.50	1.40

Innan mätningen af den strömmande blodmängden började utgjorde trycket i aorta (mellan hjertat och apparaten) max. 140, min. 120, med. 130, och i carotis max. 116, min. 98, med. 107 mm. Hg. Pulsfreqvensen på 10 sekunder var 33.3.

Under de första 8 sekunderna, efter det mätningen börjats (per. 1—2), sjunker blodtrycket något, men uppnår under per. 3 samma värde som förut (medeltryck i aorta 134, i carotis 107 mm. Hg). Sedan fortfar trycket att stiga, tills det under

[1]) Qväfning.

period 16 gått upp till (i medeltal) 161 mm. i aorta och 140 mm. i carotis.

För bättre öfversigts skull sammanställas här nedan dessa bestämningar ordnade i grupper allt efter som medeltrycket i carotis under perioderna utgjort 91—100, 101—110, 111—120 o. s. v.

Period.	Medeltryck; mm. Hg.		Pulsfreqvens på 10″.	Pulsvolym; ccm.	Sekundvolym; ccm.
	Aorta.	Carotis.			
1, 2	118	92½	28.9	1.30	3.76
3	134	107	28.1	1.16	3.26
4, 5	140	113½	29.0	1.16	3.37
6—10	151	124	28.5	1.03	2.92
11—16	159½	135½	29.6	0.81	2.39

Samtidigt med att blodtrycket stiger, framträder en minskning af den af hjertat utdrifna blodmängden; under det att trycket i carotis tillväxer från 92½ till 135½ mm. Hg, aftager pulsvolymen från 1.30 till 0.81 ccm., och den af hjertat på 1 sekund utdrifna blodmängden från 3.76 till 2.39 ccm. Orsaken till tryckstegringen kan derför icke sökas i annat, än i ett ökadt periferiskt motstånd i kärlen. Under det blodomloppet genom förmakens afklämning är upphäfdt, nedsättes verksamhetsförmågan hos kärlcentra och blodkärlen utvidgas i större eller mindre grad. Då blodströmningen sedan ånyo kommer i gång, återtaga kärlen sin tonus, men detta sker ej med ens, utan småningom. Samtidigt tillvexer motståndet mot blodets strömning och hjertat utdrifver ej mot detta högre motstånd en så stor mängd blod som förut. Sekundvolymen aftager dock icke proportionelt med stegringen af motståndet i kärlen, utan långsammare. Häraf föranledes den uppträdande tryckstegringen.

Men innan mätningen af blodvolymen började, var, såsom af ofvan angifna talvärden framgår, blodtrycket något högre, än under de första perioderna (1 och 2) af densamma. Orsaken

till den under dessa perioder uppträdande trycksänkningen bör sannolikt sökas deri, att den koksaltlösning, hvarmed mätningscylindern var fyld, utdrefs i kärlen, och att sålunda de ännu jämförelsevis svaga nervösa centralorganens nutrition för en tid framåt nedsattes. Att cylindern i och för sig icke införde något betydligare motstånd i förhållande till det, som egde rum då blodet med kringgående af cylindern fick strömma från hjertat, framgår deraf att innan mätningen började skilnaden mellan medelblodtrycket i aorta och carotis utgjorde 23 mm., och i medeltal under per. 1 och 2: 25$^1/_2$, under per. 3: 27, under per. 4 och 5: 26$^1/_2$, under per 6—10: 27 och under per. 11—16: 24 mm. Hg.

Under perioderna 17—21 varierar medeltrycket i aorta mellan 149 och 164 mm., i carotis mellan 129 och 140$^1/_2$ mm. Hg. Medelvärdena äro:

Period.	Medeltryck; mm. Hg.		Pulsfreqvens på 10″.	Pulsvolym; ccm.	Sekundvolym; ccm.
	Aorta.	Carotis.			
17—21	158	135	30.7	0.70	2.14

Kärlens grad af sammandragning har således fortfarande ökats, trycket är i medeltal detsamma, som under per. 11—16, men den ur hjertat på tidsenheten utdrifna blodmängden har minskats.

Härefter följa två perioder (22, 23) med utpräglad förlångsamning af hjertslagen, hvilka å manometerkurvorna icke med säkerhet kunna räknas.

Under de derpå följande perioderna (24 och 25) utdrifver hjertat en mycket liten blodmängd, nämligen vid hvarje systole endast 0.25, resp. 0.50 ccm. Sekundvolymerna äro resp. 0.55 och 1.50 ccm. Samtidigt är medeltrycket i aorta 134 och i carotis 114 mm. Hg., således af samma storlek som under per. 3 vid en pulsvolym om 1.16 och en sekundvolym om 3.26 ccm.

Perioderna 26 och 27 visa en liten pulsfreqvens, med ökad puls- och sekundvolym samt ett stegradt blodtryck:

Period.	Medeltryck; mm. Hg.		Pulsfreqvens på 10″.	Pulsvolym; ccm.	Sekund-volym; ccm.
	Aorta.	Carotis.			
26, 27	146½	124½	22.2	0.81	1.77

Derpå inledes vid början af per. 28 en qväfning, afsedd att försätta kärlcentra i en starkare verksamhet. Denna qväfning varar 58 sekunder (per. 28—34). Under densamma håller sig medeltrycket någorlunda oförändradt: det vexlar i aorta mellan 151 och 136, samt i carotis mellan 129 och 116½ mm. Hg. Deremot aftaga puls- och sekundvolymerna betydligt, den förra från 0.80 (per. 28) oafbrutet till 0.43 (per. 34), den senare från 1.80 (per. 30) till 1.29 (per. 34).

Genom qväfningen minskas naturligtvis hjertats arbetsförmåga, ehuru denna minskning, såsom särskildt Konow och Stenbeck visat, under en kortvarig qväfning icke är betydlig. Detta jämte de rubbningar, som preparationen förorsakat, gör visserligen, att hjertat, vid den genom qväfningen utlösta sammandragningen af kärlen i det stora kretsloppet, utdrifver en mindre blodmängd än vid en på annat sätt framkallad förträngning af kärlen möjligen hade varit fallet. I alla händelser framgår af dessa bestämningar, att vid en kraftig kärlsammandragning ett blodtryck af betydande höjd kan underhållas genom en ganska obetydlig från hjertat utdrifven blodmängd.

Efter qväfningens slut (per. 35) sjunker medelblodtrycket i aorta till 136 och i carotis till 118 mm. Hg., samtidigt med att den ur hjertat på tidsenheten utdrifna blodmängden tilltager: kärlens sammandragning har i någon mån gifvit vika.

Sedan stiger blodtrycket åter under period 36 och håller sig under per. 36—42 temligen konstant; medeltrycket i aorta vexlar mellan 137 och 153, i carotis mellan 117 och 133 mm. Hg. Medelvärdena äro:

Period.	Medeltryck; mm. Hg.		Pulsfreqvens på 10″.	Pulsvolym; ccm.	Sekundvolym; ccm.
	Aorta.	Carotis.			
36—42	146	124½	27.5	0.63	1.73

Äfven under perioderna 43—55 företer trycket, som visar en bestämd lutning att sjunka, endast jämförelsevis små vexlingar. Såsom medelvärden gifva dessa perioder:

Period.	Medeltryck; mm. Hg.		Pulsfreqvens på 10″.	Pulsvolym; ccm.	Sekundvolym; ccm.
	Aorta.	Carotis.			
43—55	131	111	28.5	0.66	1.89

Under fortsättningen af försöket anställes (per. 57—69) en ny qväfning, som varar 138 sekunder. Dervid förändras trycket endast obetydligt (medeltryck, maximum aorta 135, carotis 117½, per. 64; medeltryck, minimum aorta 127, carotis 106½ mm. Hg., per. 57). Deremot aftager puls- och sekundvolymen till ungefär hälften af sitt värde under föregående period (minimum 0.32 resp. 0.80, per. 68).

Sedan den konstgjorda andningen åter inledts, stiger trycket först något (per. 70 och 71) samtidigt med att puls- (0.50, resp. 0.61 ccm.) och sekundvolymerna (1.24, resp. 1.48) tilltaga.

Efter det den genom qväfningen åstadkomna förändringen af kärlens grad af sammandragning småningom gått öfver, är trycket under perioderna 73—81 något så när konstant. För dessa perioder finna vi följande medelvärden:

Period.	Medeltryck; mm. Hg.		Pulsfreqvens på 10″.	Pulsvolym; ccm.	Sekundvolym; ccm.
	Aorta.	Carotis.			
73—81	121	104	26.3	0.57	1.49

Hvad som främst faller i ögonen vid detta försök är den stora vexlingen af den vid hvarje hjertslag och den på 1 sekund ur hjertat utdrifna blodmängden. Kan denna vexling icke bero på en koagulation af blodet i apparaten?

Om så vore fallet, borde trycket stiga i den centrala och sjunka i den periferiska manometern samt således differensen mellan trycket i aorta och det i carotis ökas. Så är dock ingalunda fallet. Vi finna tvertom, att tryckdifferensen mellan aorta och carotis snarare aftager, såsom framgår ur följande sammanställning af medeltrycket under några på måfå uttagna perioder.

Period.	Medeltryck; mm. Hg.		Differens; mm. Hg.
	Aorta.	Carotis.	
1	116½	91	25½
10	153½	126	27½
20	157	136	21
30	151	129	22
40	137	117	20
50	129	108	21
60	129	109½	19½
70	141	120	21
80	116	99	17

Någon koagulation i strömuret, genom hvilken i detsamma ett större motstånd skulle hafva uppstått, har således icke grumlat försöket.

För ett och samma tryck finna vi mycket betydande vexlingar i afseende å den af hjertat utdrifna blodmängden. Följande tabell upptager ett antal hithörande parallelbestämningar, af hvilka ingen hänför sig till de afdelningar af försöket, under hvilka djuret varit qväfdt.

Period.	Medeltryck; mm. Hg.		Pulsfreqvens på 10″.	Pulsvolym; ccm.	Sekundvolym; ccm.
	Aorta.	Carotis.			
3	134	107	28.1	1.16	3.26
73—81	121	104	26.3	0.57	1.49
4, 5	140	113½	29.0	1.16	3.37
25	134	113	30.0	0.50	1.50
43—55	131	111	28.5	0.66	1.89
6—10	151	124	28.5	1.03	2.92
26—27	146½	124½	22.2	0.81	1.77
36—42	146	124½	27.5	0.63	1.73
11—16	159½	135½	29.6	0.81	2.39
17—21	158	135	30.7	0.70	2.14

Af denna sammanställning framgår fullkomligt otvetydigt, huru vigtigt det är, att vid frågor, som hänföra sig till blodtrycket och dess under olika omständigheter framträdande vexlingar, noggrant beakta, hurusom *ett tryck af samma storlek antingen kan bero på en stark sammandragning af blodkärlen vid en jämförelsevis liten af hjertat utdrifven blodmängd, eller ock tvertom har sin orsak deri, att hjertat, vid jämförelsevis slappa blodkärl, utdrifver en stor mängd blod. Vid uppehållandet af det normala blodtrycket kunna begge dessa faktorer oupphörligt vexla och göra det vanligen i omvändt förhållande.*

Man kan således icke uppställa någon bestämd relation mellan blodtrycket och hjertats puls- eller sekundvolym. Blott det framgår otvetydigt, att hjertat vid *starkt* sammandragna kärl i allmänhet utdrifver en mindre blodmängd, än fallet är då kärlens tonus är mindre. Dermed vill jag likväl ingalunda hafva sagt, att man kan uppställa satsen, att hjertats pulsvolym alltid skall aftaga, då motståndet i kärlen ökas. Ty härvid måste beaktas såväl graden af motståndsökningen i kärlen, som ock de mer eller mindre gynsamma vilkoren för blodets återflöde till hjertat, hvarigenom den blodmängd, som står till hjertats förfogande, påverkas. Då nu föreliggande försök icke erbjuda några närmare

hållpunkter för en diskussion af dessa frågor, skall jag uppskjuta denna till ett annat tillfälle.

Hufvudändamålet med förevarande undersökning var, såsom jag redan framhållit, den absoluta bestämningen af den af hjertat vid hvarje pulsslag och på tidsenheten utdrifna blodmängden. Då uppställer sig frågan, hvilket af dessa så vexlande värden, vi funnit, med bästa skäl skall kunna uppställas såsom ett normalvärde.

Att vid detta val godtycket måste komma att spela en viss roll, vill jag ingalunda förneka. Men jag föreställer mig dock att det värde, vi söka, blir riktigast, om vi utgå från grundsatsen, att härvid beakta endast de bestämningar, vid hvilka vi icke hafva någon anledning att förutsätta en abnormt stark eller en abnormt liten grad af sammandragning hos kärlen.

På grund häraf utesluta vi främst de bestämningar, vid hvilka kärlcentrum genom en qväfning eller genom den omedelbara efterverkan deraf varit starkt retadt; vidare perioderna 24 och 25, der likaledes kärltonus synes hafva varit nog starkt utvecklad; slutligen perioderna 1—10, under hvilka kärlens tonus, efter allt att döma, varit mindre än den normala torde vara. Dessutom är det väl rigtigast att äfven frånse perioderna 26 och 27, under hvilka pulsfreqvensen var abnormt låg (i medeltal 22.2 på 10 sek.).

De återstående bestämningarna äro sammanstälda i följande tabell.

Period.	Medeltryck; mm. Hg.		Pulsfreqvens på 10″.	Pulsvolym; ccm.	Sekundvolym; ccm.
	Aorta.	Carotis.			
11—16	159½	135½	29.6	0.81	2.39
17—21	158	135	30.7	0.70	2.14
36—42	146	124½	27.5	0.63	1.73
43—55	131	111	28.5	0.66	1.89
73—81	121	104	26.3	0.57	1.49

Såsom normalt medeltryck i carotis för en kanin kan man antaga 100 mm. Hg. Förestående värden äro sålunda samtliga snarare höga, än alltför låga.

Pulsfreqvensen hos en kanin uppskattas till ungefär 30 eller något högre på 10 sekunder. I föreliggande försök är pulsfreqvensen alltså något liten, men då blodtrycket är fullt normalt, är det tydligt, att hjertats arbetsförmåga icke i någon beaktansvärd grad varit nedsatt, och för öfrigt kunna de här vunna värdena för pulsfreqvensen ingalunda anses vara *abnormt* låga. Vi utesluta emellertid för säkerhetens skull också de under per. 73—81, der pulsfreqvensen är lägst och före hvilka tvenne qväfningar försiggått, iakttagna resultaten, och erhålla ur de öfriga följande allmänna medeltal:

Medeltryck; mm. Hg.		Pulsfreqvens på 10″.	Pulsvolym; ccm.	Sekundvolym; ccm.
Aorta.	Carotis.			
149	**126½**	**28.9**	**0.70**	**2.04**

1. *Vid en sekundvolym om 2.04 ccm., utdrifves sålunda på 1 minut 122.4 ccm. från venstra hjertat.*

2. *På 1 minut och 1 kgm. kroppsvigt erhåller djuret 62.1 ccm. blod.*

3. Antaga vi djurets blodmängd till 5 % af dess kroppsvigt, utgör densamma 98.5 gm. = 93.4 ccm. *För att hela blodmassan skall en gång gå genom venstra hjertat fordras således 45.8 sekunder.*

4. *För att kroppens hela blodmassa en gång skall gå genom venstra hjertat behöfvas 132.3 hjertslag.*

5. *Vid hvarje hjertslag utdrifves en blodmängd som är 0.00036 af kroppsvigten och 0.0075 af kroppens hela blodmassa.*

6. *Den på 1 minut utdrifna blodmängden utgör 131 % af kroppens hela blodmassa.*

Jag anmärker uttryckligen, att de vid nu föreliggande försök funna värdena för puls- och sekundvolymerna äro bland de *allra största*, jag vid mina hittills utförda försök iakttagit.

De såsom säkrast ansedda uppgifter, man hittills haft angående den på tidsenheten genom kroppen strömmande blodmängden, äro meddelade af VIERORDT på grund af försök, utförda enligt en först af EDWARD HERING använd metod. Denna metod består deri, att man i en ven — vanligen v. jugularis — insprutar gult blodlutsalt, som lätt kan uppvisas i blodet; sedan tager man med korta mellanskof blodprof från en annan ven och undersöker dem på ifrågavarande ämne. Tiden mellan insprutningen och det ögonblick, då ett prof erhålles, i hvilket blodlutsaltet påträffas, anger då tiden för ett helt blodomlopp. Ty under denna tid har reagenset med blodet strömmat från vena jugularis till högra hjertat, derifrån genom lilla blodomloppet till det venstra och vidare genom aorta, någon af dess grenar och ett kapillär område till den ven, i hvars blod det slutligen uppvisats.

Metoden förefaller att vara enkel och tillfredsställande, men är det ingalunda. Det värde den ger är endast och allenast den kortaste tid, som ett i blodet infördt ämne behöfver för att tillryggalägga den kortaste bana från en ven till en annan. VIERORDT insåg visserligen detta och gjorde en korrektion härför. Men denna korrektion var godtycklig och de af honom beräknade tiderna för ett helt blodomlopp äro alldeles för korta.

Ur den sålunda funna tiden för ett helt blodomlopp beräknade VIERORDT kroppens hela blodmassa genom att multiplicera det denna tid motsvarande antal hjertslag med hjertats pulsvolym, som han på grund af vissa betraktelser anslog till $^1/_{353}$ af kroppsvigten. Han fann sålunda för kaniner med en medelvigt om 1,370 gm hela blodmassan utgöra 101 gm (= 7.3 %) samt vidare:

1.	Hjertats pulsvolym	3.88	ccm.
2.	Blodmängd på 1 minut och 1 kgm kroppsvigt	593.00	ccm.
3.	Tiden för ett helt blodomlopp	7.46	sek.
4.	Hjertslag nödvändiga för att en gång utdrifva blodmassan	26.1	

Under antagande af en blodmängd om 5 % erhålla vi på grund af VIERORDTS bestämningar af tiden för ett helt blodomlopp följande värden, hvilka jag sammanstält med mina, genom direkt bestämning funna

		VIERORDT.	R. T.	
1.	Hjertats pulsvolym	2.62	0.70	ccm.
2.	Blodmängd på 1 minut och 1 kgm kroppsvigt	401.5	62.1	ccm.
3.	Tiden för ett helt blodomlopp	7.46	45.8	sek.
4.	Hjertslag nödvändiga för att en gång utdrifva hela blodmassan	26.1	132.3	

Differenserna äro betydliga. Hjertats pulsvolym är hos VIERORDT inemot 4 gånger så stor som den, mina bestämningar gifva vid handen. Blodmängden på 1 minut och 1 kgm kroppsvigt är enligt VIERORDT mer än 6 gånger större än enligt mitt försök. Tiden för ett helt blodomlopp är enligt VIERORDT $^1/_6$ af den af mig funna. VIERORDTS tal för antalet hjertslag, som behöfvas för att en gång utdrifva hela blodmassan, är $^1/_5$ af mitt.

Icke ens om man till grund för jämförelsen lägger de vid de allra första bestämningarna (per. 1 och 2) vunna värdena, hvilka dock hänföra sig till abnormt förslappade kärl, uppnå mina värden VIERORDTS. Vi finna nämligen

		VIERORDT.	R. T.	
1.	Hjertats pulsvolym	2.62	1.30	ccm.
2.	Blodmängd på 1 minut och 1 kgm kroppsvigt	401.5	114.5	ccm.
3.	Tiden för ett helt blodomlopp	7.46	24.9	sek.
4.	Hjertslag nödvändiga för att en gång utdrifva hela blodmassan	26.1	71.8	

Och då bör det ytterligare beaktas, att VIERORDTS kaniner i medeltal vägde 1,370 gm, min vid detta försök använda deremot 1970 gm, samt att pulsfreqvensen hos VIERORDTS djur var 35, hos mitt 28.9 på 10 sek.

VIERORDTS värden hafva emellertid allmänt lagts till grund för en mängd betraktelser rörande blodets fördelning i kroppen, hjertats arbete, o. s. v. De resultat, jag här i korthet framlagt och hvilka grunda sig på en ganska stor serie, med hvarandra nära öfverensstämmande försök, af hvilka här ett typiskt meddelats såsom exempel, visa att dessa värden afgjordt äro oriktiga. *Till kroppens olika delar utdrifver hjertat på tidsenheten en mycket mindre blodmängd, än man hittills förestält sig. Hjertats arbete, uppmätt genom produkten af det arteriela trycket och den vid hvarje systole utdrifna blodmängden, är likaledes mycket mindre, än man hittills trott sig hafva skäl att antaga.*

Till herr Kandidat E. LANDERGREN ber jag att få uttrycka min tacksamhet för den utmärkta skicklighet och beredvillighet hvarmed han assisterat mig vid dessa, en synnerlig påpasslighet fordrande försök.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1891. N:o 3.
Stockholm.

Meddelanden från Stockholms Högskola. N:o 118.

Ein elementarer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.

Von E. PHRAGMÉN.

[Mitgetheilt den 11 März 1891 durch MITTAG-LEFFLER.]

1. Seitdem GAUSS die ersten strengen Beweise für den Fundamentalsatz der Algebra über die Zerlegbarkeit ganzer Functionen einer Veränderlichen in reelle Factoren ersten oder zweiten Grades gegeben hatte, sind mehrere neue Beweise dieses Satzes von verschiedenen Verfassern von Zeit zu Zeit veröffentlicht worden. Diese Beweise, welche sehr oft an irgend einen in den GAUSS'schen Beweisen ausgesprochenen Gedanken anknüpfen, stimmen auch im Allgemeinen in der Hinsicht mit den GAUSS'schen Beweisen überein, dass sie entweder mit imaginären Grössen, oder doch — was beinahe auf dasselbe hinauskommt — mit den transcendenten Functionen Cosinus und Sinus operiren.

Veranlasst durch ein Gespräch mit einem meiner Freunde, welcher dabei den Wunsch aussprach einen ganz elementaren Beweis des fraglichen Satzes zu besitzen, wo sich keine Spur von imaginären Grössen oder transcendenten Functionen wiederfände, habe ich einen Beweis ausgearbeitet, welcher, wie ich hoffe, den genannten Forderungen entspricht.

Dies gilt zwar schon, wie ich erst später bemerkt habe, von dem Beweise, welchen Herr J. KÖNIG im 15. Bande der *mathematischen Annalen* gegeben hat; da aber dieser ebenso strenge wie elegante Beweis nicht ganz so einfach und elementar zu sein scheint, als man es von dem Beweise eines so fundamentalen Satzes doch gern wünschen möchte, so ziehe ich nicht in Beden-

ken, meinen Beweis hier mitzuteilen, in der Hoffnung dass er ausser meinem genannten Freunde vielleicht auch Anderen willkommen sein wird.

Die Voraussetzungen, auf welche der im Folgenden entwickelte Beweis basirt ist, können unter den folgenden Hauptpunkten zusammengefasst werden:

1:o) Begriff und Theorie der irrationalen Zahlen;

2:o) Stetigkeit ganzer rationaler Functionen;

3:o) Algorithmus zur Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers, STURM'scher Satz;

4:o) Eine ganze rationale Function einer Veränderlichen vom n-ten Grade kann höchstens n mal ihr Vorzeichen wechseln;

5:o) Nimmt die ganze rationale Function einer Veränderlichen $f(x)$ zwischen x_0 und x_1 irgend einen Werth an, welcher grösser ist als sowohl $f(x_0)$ wie $f(x_1)$, so wechselt die erste Derivirte $f'(x)$ zwischen x_0 und x_1 ihr Vorzeichen.

Die erste dieser Voraussetzungen hat zwar für die Formulirung sowohl des Satzes selbst wie des Beweises eine sehr eingreifende Bedeutung. Es ist aber leicht einzusehen, dass diese Bedeutung im Wesentlichen auch nur formal ist, und dass die erste Voraussetzung mit leichter Mühe ganz vermieden werden könnte.

2. Es sei eine Reihe von Functionen $G_n(u)$ durch die Bedingung definirt, dass

$$G_0(u) = 1, \quad G_1(u) = 2u \tag{1}$$

sein soll, und für $n > 1$

$$G_n(u) = 2uG_{n-1}(u) - G_{n-2}(u)\,. \tag{2}$$

Man sieht unmittelbar, dass $G_n(u)$ eine ganze rationale Function n-ten Grades ist, welche für n verschiedene Werthe von u zwischen $u = -1$ und $u = +1$ gleich Null wird. Die Gleichungen (2), (1) definiren nämlich einen Sturmschen Algorithmus, und $G_n(1)$ ist offenbar positiv für jeden Werth von n, während $G_n(-1)$ das Zeichen $(-1)^n$ hat.

Der Ausdruck

$$G_{n-1}(u) \cdot x - G_{n-2}(u)$$

ist der Rest, den man erhält, wenn man die Potenz x^n durch $x^2 - 2ux + 1$ dividirt, oder indem wir uns der Kürze halber der Congruenzbezeichnung bedienen, es gilt die Congruenz

$$x^n \equiv G_{n-1}(u)x - G_{n-2}(u)\,, \text{ mod } (x^2 - 2ux + 1).$$

Denn angenommen, diese Gleichung gelte bis zu einem gewissen Werthe von n, so erhält man durch Multiplication mit x

$$x^{n+1} \equiv G_{n-1}(u)(2ux - 1) - G_{n-2}(u) \cdot x\,,$$

d. h. nach (2)

$$x^{n+1} \equiv G_n(u)x - G_{n-1}(u)\,.$$

Da nun die Congruenz augenscheinlich für $n = 2$ gilt, so ist sie allgemein gültig.

3. Wenn

(4) $$2u = \alpha + \frac{1}{\alpha}$$

gesetzt werden kann, so möge $H_n(u)$ durch die Gleichung

(5) $$2H_n(u) = \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}$$

definirt werden.

Man hat dann

(6) $$H_0(u) = 1\,, \quad H_1(u) = u$$

und ferner, für $n > 1$,

(7) $$H_n(u) = 2uH_{n-1}(u) - H_{n-2}(u)\,.$$

Die Gleichungen (6) und (7) können wir jetzt allgemein als die Definitionsgleichungen der Functionen $H_n(u)$ auffassen. Es ist dann $H_n(u)$ eine ganze rationale Function n-ten Grades, deren Werth, wenn

$$2u = \alpha + \frac{1}{\alpha}$$

gesetzt wird, durch die Gleichung

$$2H_n(u) = \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}$$

gegeben ist.

Ferner hat man offenbar

(8) $$H_n(1) = 1\,, \qquad H_n(-1) = (-1)^n\,.$$

Die Congruenz

(9) $$x^{2n} - 2H_n(u)x^n + 1 \equiv 0, \text{ mod } (x^2 - 2ux + 1)$$

besteht für alle Werthe von u welche numerisch grösser als 1 sind. Denn da man in diesem Falle setzen kann

$$2u = \alpha + \frac{1}{\alpha}, \qquad 2H_n(u) = \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}\,,$$

so ist

$$x^{2n} - 2H_n(u)x^n + 1 = (x^n - \alpha^n)\left(x^n - \frac{1}{\alpha^n}\right)$$

und diese ganze Function ist durch

$$x^2 - 2ux + 1 = (x - \alpha)\left(x - \frac{1}{\alpha}\right)$$

theilbar.

Macht man aber in der Congruenz

$$x^{2n} - 2H_n(u)x^n + 1 \equiv 0\,, \quad \text{mod} \quad (x^2 - 2ux + 1),$$

die Substitution

$$x^n \equiv G_{n-1}(u)x - G_{n-2}(u)$$

so erhält man

$$[2uG_{n-1}(u)^2 - 2G_{n-1}(u)\,(G_{n-2}(u) + H_n(u))]x +$$
$$+ (G_{n-2}(u) + H_n(u)^2) + 1 - H_n(u)^2 - G_{n-1}(u)^2 \equiv 0\,.$$

Man hat also, sobald

$$2u = \alpha + \frac{1}{\alpha}$$

gesetzt werden kann,

$$2uG_{n-1}(u)^2 - 2G_{n-1}(u)\,[G_{n-2}(u) + H_n(u)] = 0\,,$$
$$[G_{n-2}(u) + H_n(u)]^2 + 1 - H_n(u)^2 - G_{n-1}(u)^2 = 0\,.$$

Diese Gleichungen müssen also identisch bestehen, und man erhält

(10) $$G_{n-2}(u) + H_n(u) = uG_{n-1}(u)\,,$$

(11) $$1 - H_n(u)^2 = (1 - u^2)G_{n-1}(u)^2\,.$$

Aus der letzten Gleichung geht unmittelbar hervor, dass $H_n(u)$ für $-1 < u < 1$ nie numerisch grösser als 1 werden kann, dass aber diese Function immer gleich ± 1 wird, sobald u einer Wurzel u_λ der Gleichung

$$G_{n-1}(u) = 0$$

gleich wird.

Da aber dieselbe Gleichung (11) zeigt, dass die Function $H_n(u)$ für $-1 < u < 1$ nicht grösser als $+1$ und nicht kleiner als -1 werden kann, so muss sie für jeden der Werthe $u = u_\lambda$ ein Maximum oder Minimum haben. Hiermit haben wir auch sämmtliche Maxima und Minima dieser Function gefunden, da die Anzahl derselben nicht grösser als $n - 1$ sein kann.

Die Gleichung (10) giebt für $u = u_\lambda$

$$-G_{n-2}(u_\lambda) = H_n(u_\lambda).$$

Da

$$H_n(-1) = (-1)^n, \qquad H_n(1) = 1$$

ist, so muss man offenbar haben

$$(12) \qquad -G_{n-2}(u_\lambda) = H_n(u_\lambda) = (-1)^\lambda,$$

wenn die u_λ so nach der Grösse geordnet werden, dass

$$1 > u_1 > u_2 > \ldots \qquad > u_{n-1} > -1$$

Man kann nämlich nicht haben

$$H_n(u_\lambda) = H_n(u_{\lambda+1})$$

Denn unter dieser Voraussetzung würde $H_n(u)$ zwischen u_λ und $u_{\lambda+1}$ noch ein Maximum oder Minimum haben, was nicht möglich ist. Ebensowenig kan $H_n(1) = H_n(u_1)$ oder $H_n(u_{n-1}) = H_n(-1)$ sein.

Im Vorübergehen mag bemerkt werden, dass die obige Bestimmung der Maxima und Minima von $H_n(u)$, in Verbindung mit der Vergleichung der ersten Koefficienten, unmittelbar zu der Gleichung

$$\frac{dH_n(u)}{du} = nG_{n-1}(u),$$

führt, welche mit (11) kombinirt die Gleichung

$$\frac{dH_n(u)}{\sqrt{1 - H_n(u)^2}} = \frac{n du}{\sqrt{1 - u^2}}$$

giebt. Diese Gleichungen ergeben unmittelbar den Zusammenhang der Functionen $G_n(u)$, $H_n(u)$ mit der Theorie der trigonometrischen Functionen. (Setzt man $u = \cos\varphi$, so wird $H_n(u) = \cos n\varphi$, $G_{n-1}(u) = \sin n\varphi : \sin\varphi$).

4. Ehe wir dazu übergehen, die oben entwickelten Betrachtungen für den Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra zu verwerthen, will ich zuerst einen einfachen Satz über die relative Lage der reellen Wurzeln zweier Gleichungen beweisen.

Es seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei ganze rationale Functionen der Veränderlichen x, mit dem grössten gemeinschaftlichen Theiler $h(x)$. Ist

$$f(x) = h(x)\varphi(x)\,,$$
$$g(x) = h(x)\psi(x)\,,$$

so kann man die zwei Functionen $\mu(x)$, $\nu(x)$ und die positive Grösse λ so bestimmen, dass

$$\mu(x)\varphi(x) + \nu(x)\psi(x) = \lambda\,.$$

Ferner kann man eine positive Grösse N so wählen, dass für $x_0 < x < x_1$

$$|\nu(x)| < N$$

ist. Dann hat man also

$$|\psi(x)| > \frac{\lambda}{N},$$

sobald

$$\varphi(x) = 0, \qquad x_0 < x < x_1\,.$$

Es hat nunmehr keine Schwierigkeit eine so kleine positive Grösse δ anzugeben, dass

$$|x - y| > \delta$$

sobald

$$\varphi(x) = 0\,, \quad \psi(y) = 0\,, \quad x_0 < x < x_1$$

ist. Man setze nämlich

$$y = x + z\,,$$

so ist

$$\psi(y) = \psi(x) + z\psi'(x) + z^2\frac{\psi''(x)}{|\underline{2}} + \ldots\,;$$

jetzt kann die positive Grösse M so gross gewählt werden, dass für $x_0 < x < x_1$

$$|\psi'(x)| < M, \quad \left|\frac{\psi''(x)}{\underline{|2}}\right| < M, \quad \text{u. s. w.}$$

Dann ist es hinreichend z der Ungleichheit

$$|z| < \frac{\lambda}{\lambda + MN}$$

gemäss zu wählen, um sicher zu sein dass $\psi(x+z)$ nicht gleichzeitig mit $\varphi(x)$ gleich Null sein kann, wenn $x_0 < x < x_1$. Man kann also die gesuchte Grösse δ gleich $\frac{\lambda}{\lambda + MN}$ setzen.

Wir theilen jetzt die Strecke $x_0 \ldots x_1$ in eine Reihe von Theilstrecken ein, von denen jede kleiner als δ ist. Ist für jeden der beiden Werthe $x = x_0$ und $x = x_1$ die Function $f(x)$ von Null verschieden, so können wir offenbar diese Theilung der Strecke $x_0 \ldots x_1$ so ausführen, dass die Function $f(x)$ an keinem der Endpunkte der Theilintervalle gleich Null wird, und $g(x)$ höchstens in den beiden äussersten x_0 und x_1. Die so erhaltenen Theilstrecken können offenbar nur dreierlei Art sein: entweder enthalten sie nur Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$, oder nur Wurzeln der Gleichung $\psi(x) = 0$ oder auch keine Wurzel dieser Gleichungen. Ist der grösste gemeinschaftliche Theiler $h(x)$ zwischen x_0 und x_1 von Null verschieden, so gilt dasselbe offenbar wenn wir $f(x)$ und $g(x)$ statt $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ schreiben.

Man könnte ohne Schwierigkeit durch eine endliche Anzahl rationaler Operationen für jede Theilstrecke entscheiden, ob $f(x)$ oder $g(x)$ innerhalb derselben Wurzeln hat oder nicht, und im letzteren Falle eine positive Grösse bestimmen unter welche der absolute Betrag der Function nicht fällt. Es genügt aber für unseren Zweck zu constatiren dass es eine solche Grösse giebt. Aus dieser Thatsache können wir nämlich den folgenden Schluss ziehen, welchen wir unten für den Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra verwerthen werden.

Sind $F(x, y)$ und $G(x, y)$ zwei ganze rationale Functionen der zwei Veränderlichen x und y, in welchen die höchste Potenz von x nur mit einer Constanten multiplicirt erscheint, und gelten die obigen Voraussetzungen von den Functionen $F(x, y_1)$, $G(x, y_1)$ welche man durch Einsetzung des speciellen Werthes $y = y_1$ erhält, so giebt es eine Umgebung von y_1, innerhalb welcher die Functionen

$$F(x, y), \quad G(x, y)$$

an den Theilpunkten der Strecke $x_0 \dots x_1$ dieselben Vorzeichen beibehalten wie $F(x, y_1)$, $G(x, y_1)$, und auch nur in denjenigen Theilstrecken gleich Null werden, wo dies mit $F(x, y_1)$ resp. $G(x, y_1)$ der Fall ist.

Man denke sich jetzt eine ganze Zahl h in der folgenden Weise definirt. Für einen gegebenen Werth von y seien ξ_1, ξ_2, $\xi_3 \dots$ die nach der Grösse geordneten Wurzeln der Gleichung $F(x, y) = 0$ zwischen x_0 und x_1; sind gleiche Wurzeln vorhanden, so werde jede solche in der obigen Reihe so oft wiederholt wie die Ordnungszahl angiebt. Dann werde für jeden der Werthe $x = \xi_1$, $x = \xi_2 \dots$ das Vorzeichen von $G(x, y)$ bestimmt. Die so erhaltene Zeichenreihe reducire man so lange durch Ausstreichen jeder geraden Anzahl benachbarter gleicher Zeichen, bis die Reihe nur Variationen aufweist. Dann sei h die Anzahl dieser Variationen.

Um diese Zahl für $y = y_1$ zu berechnen, bedarf es offenbar nur der Kenntniss der Vorzeichen der Grössen $F(x, y_1)$, $G(x, y_1)$ an den Theilpunkten der Strecke $x_0 \dots x_1$. Wenn nämlich $F(x, y_1)$ an den Endpunkten einer gewissen Theilstrecke gleiche Vorzeichen hat, so hat $F(x, y_1) = 0$ in dieser Theilstrecke entweder keine Wurzeln, oder auch eine gerade Anzahl für welche $G(x, y_1)$ dasselbe Vorzeichen hat. Diese gerade Anzahl von gleichen Vorzeichen hat aber auf den Werth von h keinen Einfluss. Hat dagegen $F(x, y_1)$ verschiedene Vorzeichen an den beiden Endpunkten der Theilstrecke, so hat die Gleichung $F(x, y_1) = 0$ innerhalb derselben eine ungerade Anzahl von Wurzeln für welche $G(x, y_1)$ ein und dasselbe Vorzeichen hat, nämlich dasjenige welches diese

Function an einem beliebigen Endpunkte der Theilstrecke hat. Es genügt in diesem Fall ein einfaches + oder — anzusetzen.

Aus dem was wir oben gesagt haben, folgt jetzt unmittelbar, dass für die angegebene Umgebung von y_1 die Zahl h von der Werth von y unabhängig ist.

5. Es sei jetzt

$$f(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n \tag{13}$$

eine gegebene ganze rationale Function n-ten Grades der Veränderlichen x.

Ich will beweisen, dass man, sobald $n \geqq 3$ ist, eine quadratische Function

$$x^2 - 2wx + r^2$$

finden kann, durch welche die gegebene Function theilbar ist. Bei dem Beweise werde ich von $f(x)$ nur die Voraussetzung machen, dass der letzte Coefficient A_n von Null verschieden ist, was ja offenbar erlaubt ist.

Die Gleichung (3), welche geschrieben werden kann

$$x^k \equiv r^{k-1} G_{k-1}(u) x - r^k G_{k-2}(u), \text{ mod } (x^2 - 2urx + r^2), \tag{14}$$

giebt, wenn durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \Phi(u, r) &= r^{n-1} \left[G_{n-1}(u) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k}{r^k} G_{n-1-k}(u) \right], \\ \Psi(u, r) &= - r^n \left[G_{n-2}(u) + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{A_k}{r^k} G_{n-2-k}(u) - \frac{A_n}{r^n} \right] \end{aligned} \tag{15}$$

zwei ganze rationale Functionen von u und r definirt werden,

$$f(x) \equiv \Phi(u, r) x + \Psi(u, r), \text{ mod } (x^2 - 2urx + r^2).$$

Damit $f(x)$ durch $x^2 - 2wx + r^2$ theilbar sei, muss also gleichzeitig

$$\Phi\left(\frac{w}{r}, r\right) = 0, \quad \Psi\left(\frac{w}{r}, r\right) = 0$$

sein. Die Functionen

$$F(w, r) = \Phi\left(\frac{w}{r}, r\right) =$$

$$= r^{n-1} G_{n-1}\left(\frac{w}{r}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} A_k r^{n-1-k} G_{n-1-k}\left(\frac{w}{r}\right)$$

(16)

$$G(w, r) = \Psi\left(\frac{w}{r}, r\right) =$$

$$= A_n - r^2 \left[r^{n-2} G_{n-2}\left(\frac{w}{r}\right) + \sum_{k=1}^{n-2} A_k r^{n-2-k} G_{n-2-k}\left(\frac{w}{r}\right) \right]$$

sind offenbar beide, und in der letzteren schon der Klammerausdruck, ganze Functionen von w und r.

Aus den Gleichungen (15) sieht man sofort, dass man der Grösse r einen so grossen Werth geben kann, dass nicht nur die Gleichung

$$\Phi(u, r) = 0$$

$n - 1$ reelle Wurzeln hat, welche beliebig wenig von den Wurzeln der Gleichung

$$G_{n-1}(u) = 0$$

abweichen, sondern auch die diesen Wurzeln entsprechenden Werthe von

$$\frac{\Psi(u, r)}{r^n}$$

beliebig wenig von den Werthen abweichen, welche $-G_{n-2}(u)$ für die Wurzeln von $G_{n-1}(u) = 0$ annehmen. Bilden wir für einen hinreichend grossen Werth von r für die Functionen $F(w, r)$, $G(w, r)$ die in der vorigen N:r definirte Zahl h, so ist diese also gleich $n - 2$. Fixiren wir einen grössten Werth für r, so kann man leicht zwei Werthe w_0 und w_1 angeben, zwischen welchen die Wurzeln der Gleichung

$$G(w, r) = 0$$

immer liegen müssen. Diese Grössen entsprechen den Grössen x_0 und x_1 der vorigen N:r.

Aus der zweiten Gleichung (16) sieht man jetzt sofort, dass für kleine Werthe von r der Werth von h gleich Null wird.

Ist ϱ die untere Grenze derjenigen Werthe von r, für welche $h = n - 2$ ist, so müssen die Functionen

$$F(w, \varrho), \quad G(w, \varrho)$$

einen gemeinschaftlichen Theiler haben welcher zwischen w_0 und w_1 verschwindet. Denn im entgegengesetzten Falle giebt es nach der vorigen N:r eine Umgebung von ϱ, in der die Zahl h nicht geändert wird. Es haben also die Gleichungen

$$F(w, \varrho) = 0,$$
$$G(w, \varrho) = 0$$

eine gemeinsame reelle Wurzel w, und also $f(x)$ einen quadratischen Theiler

$$x^2 - 2wx + \varrho^2.$$

Da der Quotient wieder einen quadratischen Theiler besitzen muss, falls sein Grad grösser als zwei ist, so ist hiermit auch der Satz bewiesen:

Jede ganze rationale Function einer Veränderlichen mit reellen Coefficienten kann in ein Product von reellen Factoren ersten oder zweiten Grades zerlegt werden.

6. Bildet man die Vorzeichenreihe durch welche wir in N:r 4 die Zahl h definirt haben, indem man von den Functionen $\Phi(u, r)$, $\Psi(u, r)$ und der Strecke $-1 \ldots + 1$ ausgeht, und bedeutet k die Anzahl der Variationen der Reihe, welche entsteht wenn man zu der genannten Reihe, nach der Reduction, am Anfang und Ende die Vorzeichen der Grössen $f(-r)$ und $f(+r)$ hinzufügt, so hat diese Zahl k eine einfache Bedeutung. Ist nämlich die Anzahl der linearen Factoren

$$x \pm \varrho$$

von $f(x)$, in denen

$$\varrho < r$$

ist, gleich l, und ebenso die Anzahl der im reellen Gebiet irreductiblen quadratischen Factoren

$$x^2 - 2u\varrho x + \varrho^2$$

(wo also $u^2 < 1$), für welche

$$\varrho < r$$

ist, gleich q, so ist

$$k = 2q + l.$$

Dies stimmt, wie man sogleich sieht, sowohl für sehr grosse r, wo man

$$k = n$$

hat, wie für sehr kleine, wo man

$$k = 0$$

erhält.

Ist $r = r_1$ ein Werth von r, für welchen die vier Grössen

$$f(-r_1),\ f(r_1),\ \Phi(-1, r_1) \text{ und } \Phi(+1, r_1)$$

von Null verschieden sind, und der grösste gemeinschaftliche Theiler von

$$\Phi(u, r_1) \text{ und } \Psi(u, r_1)$$

zwischen -1 und $+1$ nicht verschwindet, so sieht man mit Hülfe der in N:r 4 angestellten Betrachtungen sogleich ein, dass es eine Umgebung von r_1 giebt, wo die Zahl k überall denselben Werth hat.

Soll die Zahl k geändert werden, da r den Werth r_1 passirt, so muss also entweder eine der vier Grössen

$$f(-r_1),\ f(r_1),\ \Phi(-1, r_1),\ \Phi(1, y_1)$$

gleich Null sein, oder auch die Gleichungen

$$\Phi(u, r_1) = 0$$
$$\Psi(u, r_1) = 0$$

eine zwischen -1 und $+1$ gelegene gemeinsame Wurzel besitzen.

Wäre z. B.

$$\Phi(-1, r_1) = 0$$

so würde man mit Hülfe der Identitäten

$$f(-r) = -r\Phi(-1, r) + \Psi(-1, r)$$
$$f(r) = r\Phi(1, r) + \Psi(1, r)$$

welche aus (15) mit Hülfe von

$$G_n(1) - G_{n-1}(1) = 1$$
$$G_n(-1) + G_{n-1}(-1) = (-1)^n$$

erhalten werden, die Gleichheit

$$f(-r_1) = \Psi(-1, r_1)$$

herleiten, und es wäre also, sobald $f(-r_1)$ von Null verschieden ist, für die Bestimmung von k vollkommen gleichgültig, ob man bei der Aufstellung der Zeichenreihe auf die erste Theilstrecke Rücksicht nähme oder nicht. Nimmt man aber auf diese erste Theilstrecke keine Rücksicht, so giebt es wieder eine Umgebung von r_1, wo die übrigen Zeichen keine Änderung erleiden.

Es ist also hinreichend die Änderungen zu untersuchen, welche die Zahl k untergeht, wenn r einen solchen Werth passirt dass $f(r)$ oder $f(-r)$ gleich Null werden, oder auch $\Phi(u, r) = 0$, $\Psi(u, r) = 0$ eine zwischen -1 und $+1$ gelegene gemeinsame Wurzel besitzen. Um aber den Beweis so weit möglich zu vereinfachen, denken wir uns die Zerlegung von $f(x)$ in Factoren ausgeführt, und schreiben

$$(17) \qquad f(x) = \prod_{\lambda}\left(x^2 - 2v_\lambda \varrho_\lambda x + \varrho_\lambda^2\right)\prod_{\mu}(x - \sigma_\mu)\prod_{\nu}(x + \tau_\nu)\,.$$

Ferner bezeichne $f_k(x)$ das Produkt derselben Factoren mit Ausnahme von

$$x^2 - 2v_k\varrho_k x + \varrho_k^2,$$

und $\Phi_k(u, r)$, $\Psi_k(u, r)$ die Functionen welche in Beziehung auf $f_k(x)$ dieselbe Bedeutung haben wie $\Phi(u, r)$, $\Psi(u, r)$ in Beziehung auf $f(x)$. Es sind dann die Grössen

$$2v_k\varrho_k\,\Phi_k(v_k, \varrho_k) + \Psi(v_k, \varrho_k)$$

in den Grössen

$$v_\lambda,\ \varrho_\lambda,\ \sigma_\mu,\ \tau_\nu$$

rational und ganz. Da sie nicht identisch gleich Null sind, so giebt es in jeder Umgebung von einem gegebenen Werthsystem der Grössen

$$v_\lambda,\ \varrho_\lambda,\ \sigma_\lambda,\ \tau_\lambda$$

solche Werthe dieser Grössen, für welche keine der Grössen

$$2v_k\varrho_k\Phi_k(v_k, \varrho_k) + \Psi_k(v_k, \varrho_k)$$

gleich Null sind, und ausserdem keine zwei Factoren identisch sind.

Wird die genannte Umgebung hinreichend klein gewählt, so sind die Vorzeichen der Grössen $f(-r)$, $f(r)$, $\Psi(u, r)$ (für die Endpunkte der Theilstrecken) und also die Zahl k für alle Werthsysteme dieser Umgebung dieselben. Wenn wir also unseren Satz unter der Voraussetzung beweisen, dass alle

$$2v_k\varrho_k\Phi_k(v_k, \varrho_k) + \Psi_k(v_k, \varrho_k)$$

von Null verschieden sind, und dass $f(x)$ keine gleiche Factoren besitzt, so ist er dadurch auch allgemein bewiesen.

Ist $\bar{r}$ ein Werth für welchen

$$f(-\bar{r}) \text{ oder } f(\bar{r})$$

gleich Null ist, so kann unter diese Voraussetzung die grösste Variation von k innerhalb der Umgebung von r, höchstens ± 1 sein. Ist z. B. $f(-\bar{r}) = 0$, so hat man nämlich

$$\Psi(-1, \bar{r}) \neq 0,$$

denn wäre auch $\Psi(-1, \bar{r}) = 0$, so müsste in Folge der Identität $f(-r) = -r\Phi(-1, r) + \Psi(-1, r)$ auch $\Phi(-1, \bar{r})$ gleich Null sein, und man hätte

$$f(x) \equiv 0, \text{ mod } (x + \bar{r})^2$$

was gegen unsere Voraussetzung ist.

Wenn also die Gleichungen

$$\Phi(u, \bar{r}) = 0$$
$$\Psi(u, \bar{r}) = 0$$

zwischen -1 und $+1$ keine gemeinschaftliche Wurzel besitzen, so bleibt die reducirte Form derjenigen Vorzeichenreihe welche die Zahl h definirt, in der Umgebung von r ungeändert, und die Zahl k kann also nur in so fern variiren dass möglicher Weise am Anfang ihrer Definitionsreihe eine Variation in eine Permanenz übergehen kann oder umgekehrt.

Ganz analog verhält es sich wenn

$$f(\bar{r}) = 0$$

ist.

Haben endlich die Functionen

$$\Phi(u, \bar{r}), \quad \Psi(u, \bar{r})$$

einen gemeinschaftlichen Theiler $H(u)$ und hat die Gleichung

$$H(u) = 0$$

eine Wurzel $\bar{u}$ zwischen -1 und $+1$, so ist jede solche Wurzel zufolge unserer Voraussetzung eine einfache Wurzel der Gleichung

$$\Phi(u, \bar{r}) = 0 .$$

Das Werthsystem $\bar{u}$, $\bar{r}$ muss ja nämlich mit einem der in (17) vorkommenden Werthsysteme zusammenfallen, sagen wir mit u_k, r_k. Man hat dann

$$f_k(x) \equiv \Phi_k(u, r)x + \Psi_k(u, r), \text{ mod } (x^2 - 2urx + r^2),$$

also

$$f(x) \equiv (\Phi_k(u, r)x + \Psi_k(u, r)) (2(ur - u_k r_k)x - (r^2 - r_k^2) .$$

Hieraus erhält man

$$\Phi(u, r) = 2r_k(u - u_k) [2ur_k \Phi_k(u, r_k) + \Psi_k(u, r_k)] ,$$

woraus, da nach der Voraussetzung

$$2u_k r_k \Phi_k(u_k, r_k) + \Psi_k(u_k, r_k)$$

von Null verschieden ist, sogleich hervorgeht, dass die Wurzel $u = u_k$ einfach ist.

Bei der für die Definition der Zahl h verwendeten Eintheilung der Strecke $-1 \ldots +1$ in Theilstrecken, kann man in diesem Fall eine Theilstrecke so wählen, dass sie von den Wurzeln der Gleichung $\Phi(u, r_k) = 0$ nur $u = u_k$ enthält, und dass die erste Derivirte $\Phi'(u, r_k)$ innerhalb derselben von Null verschieden ist. Dann gilt es aber für eine gewisse Umgebung von $r = r_k$ dass die Gleichung $\Phi(u, r) = 0$ innerhalb der fraglichen Theilstrecke nur eine Wurzel besitzt. Das Einzige was in unserer Vorzeichenreihe in der Umgebung von $r = r_k$ variiren kann, ist das Vorzeichen welches dieser Wurzel entspricht (d. h. es könnte ja für *jede* Wurzel der Gleichung $H(u) = 0$ ein solche Ungewissheit entstehen).

Um aber so einfach wie möglich zu sehen welche Änderung der Zahl k dies nach sich zieht, wollen wir diese Zahl noch auf eine andere Art als früher aus der gegebenen Vorzeichenreihe herleiten.

Statt nämlich unmittelbar die Folge der Vorzeichen zu betrachten, könnte man ebensowohl die Folge der Variationen und Permanenzen, welche daraus entstehen, in Betracht ziehen.

Es ist leicht die Regel zu finden nach welcher diese Reihe zu reduciren ist.

Zieht man nämlich in der Reihe der Vorzeichen zwei gleiche Zeichen, z. B. zwei +, in Betracht, welche sich nicht zu Anfang oder am Ende der Reihe befinden, so können sie entweder:

1:stens zwischen zwei andere + stehen, oder

2:tens zwischen zwei —, oder

3:tens zwischen ein — und ein +.

Werden diese beiden + gestrichen, so geht also in der Reihe der Variationen und Permanenzen:

im ersten Falle: $p\,p\,p$ in p über (indem wir eine Permanenz durch p, eine Variation durch v bezeichnen),

im 2:ten Falle: $v\,p\,v$ in p, und

im 3:ten Falle: $v\,p\,p$ oder $p\,p\,v$ in v.

Es können also immer zwei benachbarte p, und ebenso gleichzeitig ein v vor und ein anderes nach ein p gestrichen werden. Es soll diese Reduction so lange fortgesetzt werden, bis höchstens am Anfang und Ende der Reihe ein p zurück bleibt. Die Zahl k wird dann durch die Anzahl der noch vorhandenen v gegeben.

Wie man jetzt unmittelbar einsieht, kann die Zahl k auch so erhalten werden, dass man die Variationen in zwei Gruppen theilt, indem man eine Variation als zur ersten oder zur zweiten Gruppe gehörig betrachtet, je nach dem ihr eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Permanenzen vorangeht. Die Zahl k ist gleich der Anzahl der Variationen welche die grössere Gruppe mehr als die kleinere enthält.

Jetzt sieht man sogleich, dass wenn ein Vorzeichen unserer Reihe, welches weder das erste noch das letzte ist, geändert wird, so ändert sich dadurch der Werth von k mit ± 2.

Steht nämlich dies Vorzeichen zwischen zwei gleichen Vorzeichen, so gehen entweder zwei Variationen

$$v\,v$$

in zwei Permanenzen

$$p\,p$$

über, oder umgekehrt, und die eine oder andere Gruppe von Variationen verliert oder gewinnt also zwei Variationen. Steht dagegen das geänderte Vorzeichen zwischen zwei ungleichen, so geht entweder

$$v\,p \quad \text{in} \quad p\,v$$

über oder auch umgekehrt

$$p\,v \quad \text{in} \quad v\,p\,.$$

In beiden Fällen verliert die eine Gruppe eine Variation, während die andere Gruppe eine gewinnt.

Das Resultat ist also immer dass sich k mit ± 2 ändert.

Man kann jetzt das bisher Bewiesene so zusammenfassen. Wenn r durch einen solchen Werth $\bar{r}$ passirt, dass $f(x)$

$\bar{l}$ lineare Factoren $x \pm \bar{r}$ und

$\bar{q}$ quadratische Factoren $x^2 - 2u\bar{r}x + \bar{r}^2$

besitzt, so wird die Zahl k höchstens um

$$\bar{l} + 2\bar{q}$$

geändert. Da aber die Zahl k von n auf Null herabsinkt, während r von einem sehr grossen bis zu einem sehr kleinen Werthe abnimmt, so ist es klar dass diese grösste mögliche Änderung auch immer eintritt, und zwar so, dass die Änderung eine Abnahme ist falls r von einem grösseren Werthe auf einen kleineren übergeht.

Hierdurch ist aber die Wahrheit des ausgesprochenen Satzes vollständig erwiesen.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts. från sid. 94.)

Edinburgh. *R. College of physicians.*
Reports from the laboratory. Vol. 3. 1891. 8:o.
— *Royal Observatory.*
Catalogue of the Crawford library of the R. Observatory. 1890. 4:o.
BECKER, L., The solar spectrum at medium and low temperatures... Edinb. 1890. 4:o.
— *Geological society.*
Transactions. Vol. 6: P. 2. 1890. 8:o.
Greenwich. *Royal observatory.*
Introduction to the astronomical observations in the year 1888. 4:o.
Results of » » » » » » 1888. 4:o.
» » » Spectroscopic and photographic » » 1888—89. 4:o.
» » » magnetical and meteorological » » 1888. 4:o.
Kiel. *Kommission zur wissenschaftlichen Untersuchung der Deutschen Meere.*
Bericht. Jahrg. 17—19(1887—89): H. 2. 1890. F.
Reinke, J., Atlas Deutscher Meeresalgen. H. 2: L. 1–2. 1891. F.
Lausanne. *Société Vaudoise des sciences naturelles.*
Bulletin. (3) Vol. 26: N:o 102. 1891. 8:o.
London. *Swedenborg society.*
SWEDENBORG, E., The heavenly arcana. Vol. 11. 1890. 8:o.
— Index verborum, nominum, et rerum in Arcanis coelestibus. 1890. 8:o.
Manchester. *Literary and philosophical society.*
Memoirs and proceedings. (4) Vol. 3; 4: N:o 1–2. 1890. 8:o.
Philadelphia. *Academy of natural sciences.*
Proceedings. Year 1890: P. 3. 8:o.
Santiago. *Deutscher naturwissenschaftlicher Verein.*
Verhandlungen. Bd. 2: H. 2. 1890. 8:o.
Sao Paolo. *Commissão geographica e geologica.*
Boletim. N:o 1—3. 1889. 8:o.
Saint John. *Natural history society of N. Brunswick.*
Bulletin. N:o 9. 1890. 8:o.
Washington. *U. S. Coast and geodetic survey.*
Report. $1888/_{6}$. 4:o.
Bulletin. N:o 1—2; 14—21. 1888–91. 4:o.
— *U. S. Naval observatory.*
Report. 1889 $^{30}/_{6}$; 1890 $^{30}/_{6}$. 8:o.
Refraction tables. U. S. Naval Observatory. 1887. 4:o.
Wien. *K. K. Gradmessungsbureau.*
Astronomische Arbeiten. Bd. 2. Längenbestimmungen. 1890. 4:o.

(Forts. å sid. 148.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1891. N:o 3.
Stockholm.

Meddelanden från Stockholms Högskola. N:o 119.

Bestämning af de algebraiskt upplösbara likheter, i hvilka hvarje rot kan uttryckas som en rationel funktion af en af rötterna.

Af Ivar Bendixson.

[Meddeladt den 11 Mars 1891 genom G. Mittag-Leffler.]

Sedan Gauss i Disquisitiones Aritmeticae visat att alla likheter af formen

$$x^n - 1 = 0$$

äro algebraiskt upplösbara, samt angifvit en metod att bestämma rötterna i denna likhet, lyckades Abel i »Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement» ådagalägga, att den metod, som Gauss användt, lät generalisera sig till alla likheter

$$F(x) = 0$$

så beskaffade, att hvarje rot x_ν är en rationel funktion $\Theta_\nu x_1$ af en af dem x_1 och dessutom dessa funktioner äro sådana att

$$x_2 = \Theta x_1, \quad x_3 = \Theta x_2, \ldots x_n = \Theta x_{n-1}, \quad x_1 = \Theta x_n$$

eller, hvilket är detsamma, sådana att

$$x_2 = \Theta x_1, \quad x_3 = \Theta^2 x, \ldots x_n = \Theta^{n-1} x_1, \quad x_1 = \Theta^n x_1$$

där n är $F(x)$:s grad.

Med *en enkel Abelsk likhet* vilja vi i det följande, i öfverensstämmelse med Kronecker [1]), beteckna en likhet, mellan hvilkens rötter ofvan anförda relationer äga rum.

[1]) Kronecker: »Auszug aus d. am 16 April von H:rn Kronecker gelesenen Abhandlung über Abelsche Gleichungen», Monatsb. d. Königl. Akad. d. Wissensch. Berlin 1877.

ABEL förde emellertid undersökningen ett steg längre, i det att han visade, att $F(x) = 0$ äfven i det fall är algebraiskt upplösbar, när mellan funktionerna $\Theta_\nu x_1$ den relationen äger rum att

$$\Theta_\nu \Theta_\mu x_1 = \Theta_\mu \Theta_\nu x_1 .$$

I stället för att fullfölja det uppslag, ABEL här gifvit till bestämmande af de nödvändiga och tillräckliga vilkoren för att en likhet, så beskaffad att hvar och en af rötterna låter uttrycka sig rationelt i en af dem, skall vara algebraiskt upplösbar [hvilken frågas lösning ju omedelbart leder till bestämmande af den generella frågan: hvilka likheter som öfver hufvud taget äro algebraiskt lösbara] vändes algebraisternas uppmärksamhet genom GALOIS' epokgörande arbete »Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux» (Journal de mat. pures et appliquées Tome XI) åt studiet af de substitutionsteoretiska egenskaper, som tillkomma algebraiskt upplösbara likheter.

På denna väg lyckades det äfven att bestämma, hvilka likheter som äro algebraiskt upplösbara.

Å andra sidan tjenade ABELs posthuma arbete »Sur les équations résolubles algébriquement» till utgångspunkt för en serie undersökningar, förnämligast af KRONECKER, hvilka ledt till bestämmande af den explicita algebraiska funktion, som är rot till en algebraiskt upplösbar likhet.

Det har synts mig vara af intresse att uppvisa, huru man, genom fullföljande af ABELs tankegång i hans afhandling »Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement», utan svårighet finner de nödvändiga och tillräckliga vilkoren för att en likhet, i hvilken hvarje rot är en rationel funktion af en af rötterna, skall vara algebraiskt upplösbar. [1])

Vi framkomma härvid till följande sats:

---

[1]) NETTO söker i sin »Substitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra», sid. 109—203 generalisera ABELS metod och kommer där till en klass af algebraiskt lösbara likheter utan att likväl framkomma till de nödvändiga och tillräckliga vilkoren.

Exempelvis är den GALOIS'ska resolventen till en allmän likhet af 4:de graden icke inbegripen i den klass han studerar.

»Om

$$F(x) = 0$$

är en så beskaffad irreduktibel likhet, att hvarje rot x_ν *är en rationel funktion* $\Theta_\nu x_1$ *af en af dem* x_1, *så är det nödvändiga och tillräckliga vilkoret för att denna likhet skall vara algebraiskt upplösbar, att bland funktionerna* Θ_ν *skall låta sig bestämmas ett system af funktioner* $\Theta, \Theta_1 \ldots \Theta_q$ *så beskaffade, att hvarje* Θ_ν *låter uttrycka sig i dessa på följande sätt*

$$\Theta_\nu x_1 = \Theta^{\alpha^\nu} \Theta_1^{\beta^\nu} \ldots \Theta_q^{\varkappa^\nu} x_1,$$

samt att mellan funktionerna $\Theta, \Theta_1 \ldots \Theta_q$ *följande relationer skola bestå*

$$\begin{aligned}
\Theta_1 \Theta x_1 &= \Theta^{\alpha_1} \Theta_1 x_1 \\
\Theta_2 \Theta x_1 &= \Theta^{\alpha_2} \Theta_1^{\beta_2} \Theta_2 x_1 \\
\Theta_2 \Theta_1 x_1 &= \Theta^{\alpha'_2} \Theta_1^{\beta'_2} \Theta_2 x_1 \\
&\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots \\
\Theta_q \Theta x_1 &= \Theta^{\alpha_q} \Theta_1^{\beta_q} \ldots \Theta_{q-1}^{\varkappa_q} \Theta_q x_1 \\
\Theta_q \Theta_1 x_1 &= \Theta^{\alpha'_q} \Theta_1^{\beta'_q} \ldots \Theta_{q-1}^{\varkappa'_q} \Theta_q x_1 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Theta_q \Theta_{q-1} x_1 &= \Theta^{\alpha_q^{q-1}} \Theta_1^{\beta_q^{q-1}} \ldots \Theta_{q-1}^{\varkappa_q^{q-1}} \Theta_q x_1
\end{aligned}$$

Vi öfvergå nu till beviset för ofvan uttalade sats.

Antag att

$$F(x) = 0$$

är en inom rationalitetsområdet[1]) $(R' \ldots R^{(\varrho)})$ irreduktibel likhet, hvars koefficienter tillhöra sagda område, och att alla dess rötter äro rationella funktioner af en af dem x_1 (d. v. s. alla rötterna tillhöra rationalitetsområdet $(x_1, R' \ldots R^{(\varrho)})$.

Jag kan då skrifva rötterna under följande form:

$$\left.\begin{array}{llll}
x_1, & \Theta x_1 \ldots & \Theta^{n-1} x_1 \\
\Theta_1 x_1, & \Theta\Theta_1 x_1 \ldots & \Theta^{n-1}\Theta_1 x_1 \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\Theta_{\mu-1} x_1, & \Theta\Theta_{\mu-1} x_1 \ldots & \Theta^{n-1}\Theta_{\mu-1} x_1
\end{array}\right\} \Theta^n x_1 = x_1 .$$

[1]) Jfr MOLK, »Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité», Acta Mat. VI, sid. 19, 20. KRONECKER, »Grundzüge einer arithmetischen Theorie d. Algebr. Grössen», BORCHARDTS Journal, Bd. 72, sid. 3, 4.

Här äro $\Theta, \Theta_1 \ldots \Theta_{\mu-1}$ rationella funktioner af x_1, hvars koefficienter tillhöra området $(R' \ldots R^{(\varrho)})$.

Om vi nu sätta

$$f(x) = (x - x_1)(x - \Theta x_1) \ldots (x - \Theta^{n-1} x_1)$$

så kunna koefficienterna i denna funktion uttryckas som rationella funktioner af en kvantitet

$$\psi(t, x_1) = (t - x_1)(t - \Theta x_1) \ldots (t - \Theta^{n-1} x_1)$$

som själf är rot till en likhet af μ:te graden med koefficienterna rationella inom rationalitetsområdet $[t, R' \ldots R^{(\varrho)}]$ [1]),

$$F_1(x') = [x' - \psi(t, x_1)][x' - \psi(t, \Theta_1 x_1)] \ldots [x' - \psi(t, \Theta_{\mu-1} x_1)] \\ = 0.$$

Om t betraktas som obestämd kvantitet, dock underkastad vilkoret att endast antaga värden, som tillhöra rationalitetsområdet $(R' \ldots R^{(\varrho)})$, så tillhöra F_1:s koefficienter äfven samma rationalitetsområde.

Om likheten

$$F_1(x') = 0$$

kan man nu lätt visa, att den är irreduktibel, ty om den hade en divisor, så skulle

$$[x' - \psi(t, x_1)][x' - \psi(t, \Theta_{\nu_1} x_1)] \ldots [x' - \psi(t, \Theta_{\nu_\lambda} x_1)]$$

där $\lambda < \mu - 1$, vara rationel inom rationalitetsområdet, således

$\psi(t, x_1)\psi(t, \Theta_{\nu_1} x_1) \ldots \psi(t, \Theta_{\nu_\lambda} x_1) =$ rationel inom rationalitetsområdet. Men venstra membrum är en divisor till $F(t)$ som ju var antagen irreduktibel inom detta område. Vi ha således kommit till en omöjlighet, hvaraf framgår att

$$F_1(x') = 0$$

är en irreduktibel algebraisk likhet.

Om jag nu visste att en af rötterna till $F_1(x') = 0$ kunde uttryckas rationelt i en annan af dess rötter, så skulle ju dessa kunna skrifvas

---

[1]) Jfr Abel, »Mèmoire sur une classe particulière d'équations ...». Edit Sylov, sid. 484—486.

$$\left.\begin{array}{l} x'_1,\ \lambda x'_1,\ \ldots\ \lambda^{n_1-1}x'_1 \\ x'_2,\ \lambda x'_2,\ \ldots\ \lambda^{n_1-1}x'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'_{\mu_1},\ \lambda x'_{\mu_1},\ \ldots\ \lambda^{n_1-1}x'_{\mu_1} \end{array}\right|\ \mu_1 n_1 = \mu\,,$$

där λ är en rationel funktion sådan att $\lambda^{n_1}x' = x'$. Jag skulle ju då på samma sätt som ofvan kunna reducera likheten

$$F_1(x') = 0$$

på en likhet

$$F_2(x'') = 0\,,$$

af graden μ_1, hvars koefficienter äro rationella inom det gifna rationalitetsområdet samt till en enkel Abelsk likhet

$$f_3(x') = (x - x'_1)\ldots(x - \lambda^{n_1-1}x'_1) = 0$$

hvars koefficienter äro rationella i en rot till $F_2(x'') = 0$.

Jag vill därför till att börja med söka bestämma de nödvändiga och tillräckliga vilkoren för att likheten ofvan

$$F_1(x') = 0$$

skall vara sådan att en rot är rationel i en annan.

Om detta äger rum, måste en af funktionerna $\psi(t,\,\Theta_1 x_1)$ vara $= \lambda\psi(t, x_1)$, och anta vi att

$$\psi(t,\,\Theta_1 x_1) = \lambda\psi(t,\,x_1),$$

erhålles ur

$$\psi(t,\,\Theta_1\Theta x_1) = \lambda\psi(t,\,\Theta x_1) = \psi(t,\,\Theta_1 x_1)$$

att $(t - \Theta_1\Theta x_1)(t - \Theta\Theta_1\Theta x_1)\ldots(t - \Theta^{n-1}\Theta_1\Theta x_1) =$

$$= (t - \Theta_1 x_1)(t - \Theta\Theta_1 x_1)\ldots(t - \Theta^{n-1}\Theta_1 x_1)\,.$$

Af ofvanstående likhet framgår att för något helt tal α

$$\Theta_1\Theta x_1 = \Theta^{\alpha}\Theta_1 x_1\,.$$

Detta är ett nödvändigt vilkor för att en rot i F_1 skall vara en rationel funktion af en annan rot. Men vi kunna äfven visa, att det är tillräckligt. Ty ur likheten ofvan erhålles

$$\Theta^{\nu}\Theta_1\Theta x_1 = \Theta^{\alpha+\nu}\Theta_1 x_1$$

och således

$$\begin{aligned}\psi(t,\,\Theta_1\Theta x_1) &= (t - \Theta_1\Theta x_1)(t - \Theta\Theta_1\Theta x_1)\ldots(t - \Theta^{n-1}\Theta_1\Theta x_1) \\ &= (t - \Theta^{\alpha}\Theta_1 x_1)(t - \Theta^{\alpha+1}\Theta_1 x_1)\ldots(t - \Theta^{\alpha-1}\Theta_1 x_1) \\ &= \psi(t,\,\Theta_1 x_1)\,.\end{aligned}$$

Ur detta åter erhålles

$$\psi(t,\, \Theta_1 \Theta^2 x_1) = \psi(t,\, \Theta_1 \Theta x_1) = \psi(t,\, \Theta_1 x_1)$$

och i allmänhet

$$\psi(t,\, \Theta_1 x_1) = \psi(t,\, \Theta_1 \Theta^\nu x_1)\,.$$

Häraf inses att

$$\psi(t,\, \Theta_1 x_1) = \frac{1}{n}\left[\psi(t,\, \Theta_1 x_1) + \psi(t,\, \Theta_1 \Theta x_1) + \ldots + \psi(t,\, \Theta_1 \Theta^{n-1} x_1)\right]$$

$$= \text{symmetrisk funktion i } x_1,\, \Theta x_1 \ldots \Theta^{n-1} x_1$$

hvaraf

$$\psi(t,\, \Theta_1 x_1) = \lambda \psi(t,\, x_1),$$

där λ = rationel funktion.

Det nödvändiga och tillräckliga vilkoret för att en rot af

$$F_1(x') = 0$$

skall vara rationel funktion af en annan af rötterna, är således

$$\Theta_1 \Theta x_1 = \Theta^\sigma \Theta_1 x_1\,.$$

Alldenstund

$$\psi(t,\, \Theta_1 x_1) = \lambda \psi(t,\, x_1)$$

så inses att

$$\psi(t,\, \Theta_1^{n_1} x_1) = \lambda^{n_1} \psi(t,\, x_1)$$

$$= \psi(t,\, x_1)$$

hvarur vi erhålla

$$\Theta_1^{n_1} x_1 = \Theta^k x_1\,.$$

Men vi ha ofvan erhållit

$$\Theta_1 \Theta x_1 = \Theta^\alpha \Theta_1 x_1$$

och sålunda

$$\Theta_1^2 \Theta x_1 = \Theta^{\alpha^2} \Theta_1^2 x_1$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\Theta_1^{n_1} \Theta x_1 = \Theta^{\alpha^{n_1}} \Theta_1^{n_1} x_1$$

Som nu $\Theta_1^{n_1} x = \Theta^k x_1$, erhålles ur denna likhet att,

$$\alpha^{n_1} \equiv 1 \mod n\,.$$

Om n_1 är det minsta hela tal för hvilket

$$\lambda^{n_1} x'_1 = x'_1\,,$$

så är äfven n_1 det minsta hela tal ν sådant att

$$\Theta_1^\nu x_1 = \Theta^k x_1\,.$$

Vi erhålla vidare ur

$$\Theta_1^{n_1+1} x_1 = \Theta_1 \Theta^k x_1$$
$$= \Theta^{\alpha k} \Theta_1 x_1$$

att

$$\Theta_1^{n_1} x_1 = \Theta^{\alpha k} x_1 .$$

Härur erhålles

$$\alpha k \equiv k \mod n .$$

Slutligen inses af de båda liheterna

$$(\alpha - 1)k \equiv 0 \mod n$$
$$\alpha^{n_1} \equiv 1 \mod n$$

att, om n är ett primtal och n_1 ett primtal, så kunna endast två fall inträffa:

a) $\alpha = 1$.

b) $\alpha \neq 1$. Då är $k = 0$ samt n_1 en divisor till $n - 1$.

Vi vilja anta att Θ_1 och Θ äro förbundna genom ofvan anförda likhet. Vi veta då att

$$F_1(x') = 0,$$

som är af graden $\mu_1 n_1$, låter reducera sig på en likhet af graden μ_1 med koefficienterna rationella inom det gifna rationalitetsområdet,

$$F_2(x'') = 0,$$

i hvilken en rot

$$x_1'' = (t_1 - x'_1)(t_1 - \lambda x'_1) \ldots (t_1 - \lambda^{n_1 - 1} x'_1),$$

samt en enkel abelsk likhet af graden n_1,

$$f_1(x') = 0,$$

hvars koefficienter äro rationella i $(x'', R' \ldots R^{(\varrho)})$.

Om nu en rot i likheten

$$F_2(x'') = 0$$

är rationel funktion af en annan af dess rötter, så låter denna på analogt sätt reducera sig på tvänne andra $F_3(x''') = 0$ och $f_2(x'') = 0$.

Jag vill nu bestämma de nödvändiga och tillräckliga vilkoren för att en af rötterna till

$$F_2(x'') = 0$$

skall vara en rationel funktion $\mu x_1''$ af en annan af rötterna.

Om då

$$x''_1 = (t_1 - x'_1)(t_1 - \lambda x'_1)\dots(t_1 - \lambda^{n_1-1}x'_1)$$
$$= [t_1 - \psi(t, x_1)]\,[t_1 - \psi(t, \Theta_1 x_1)]\dots[t_1 - \psi(t, \Theta_1^{n_1-1}x_1)]$$
$$= \psi_1(t_1, t, x_1)$$

så bli de andra rötterna

$$\psi_1(t_1, t, \Theta_\nu x_1).$$

Men en af dessa skulle vara rationel i x''_1 hvaraf vi få

$$\psi_1(t_1, t, \Theta_2 x_1) = \mu\psi_1(t_1, t, x_1).$$

Om jag i högra membrum ersätter x_1 med $\Theta_1 x_1$, så blir den oförändrad, hvaraf inses att

$$\psi_1(t_1, t, \Theta_2\Theta_1 x_1) = \psi_1(t_1, t, \Theta_2 x_1).$$

Häraf följer att

$$[t_1 - \psi(t, \Theta_2\Theta_1 x_1)]\,[t_1 - \psi(t, \Theta_1\Theta_2\Theta_1 x_1)]\dots =$$
$$= [t_1 - \psi(t, \Theta_2 x_1)]\,[t_1 - \psi(t, \Theta_1\Theta_2 x_1)]\dots$$

hvarur

$$\psi(t, \Theta_2\Theta_1 x_1) = \psi\left(t, \Theta_1^{\beta''}\Theta_2 x_1\right).$$

Ur detta åter erhålles

$$\Theta_2\Theta_1 x_1 = \Theta^{\alpha''}\Theta_1^{\beta''}\Theta_2 x_1.$$

Men å andra sidan är

$$\psi(t, \Theta x_1) = \psi(t, x_1)$$

och häraf

$$\psi(t, \Theta_1\Theta x_1) = \psi(t, \Theta^\alpha\Theta_1 x_1) = \psi(t, \Theta_1 x_1)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\psi(t, \Theta_1^\nu\Theta x_1) = \psi(t, \Theta^\varkappa\Theta_1^\nu x_1) = \psi(t, \Theta_1^\nu x_1).$$

Således blir

$$\psi_1(t_1, t, \Theta_2\Theta x_1) = \psi_1(t_1, t, \Theta_2 x_1)$$

och sålunda ur detta analogt med ofvan

$$\Theta_2\Theta x_1 = \Theta^{\alpha'}\Theta_1^{\beta'}\Theta_2 x_1.$$

Likheterna

$$\left.\begin{aligned}\Theta_2\Theta x_1 &= \Theta^{\alpha'}\Theta_1^{\beta'}\Theta_2 x_1,\\ \Theta_2\Theta_1 x_1 &= \Theta^{\alpha''}\Theta_1^{\beta''}\Theta_2 x_1\end{aligned}\right\}$$

utgöra således ett nödvändigt vilkor för att en af rötterna i F_2 skall vara en rationel funktion af en annan af dess rötter.

Jag vill nu visa, att detta vilkor är tillräckligt.

Om vi betrakta

$$\psi_1(t_1, t, \Theta_2 x_1) =$$
$$= [t_1 - \psi(t, \Theta_2 x_1)][t_1 - \psi(t, \Theta_1\Theta_2 x_1)] \ldots [t_1 - \psi(t, \Theta_1^{n_1-1}\Theta_2 x_1)],$$

så är

$$\psi_1(t_1, t, \Theta_2\Theta x_1) = \psi_1(t_1, t, \Theta^{\alpha'}\Theta_1^{\beta'}\Theta_2) =$$
$$=[t_1 - \psi(t, \Theta^{\alpha'}\Theta_1^{\beta'}\Theta_2 x_1)][t_1 - \psi(t, \Theta_1\Theta^{\alpha'}\Theta_1^{\beta'}\Theta_2 x_1)] \ldots$$
$$=[t_1 - \psi(t, \Theta_1^{\beta'}\Theta_2 x_1)][t_1 - \psi(t, \Theta_1^{\beta'+1}\Theta_2 x_1)] \ldots$$
$$=\psi_1(t, \Theta_2 x_1).$$

Af denna likhet följer, att för hvarje värde ν

$$\psi_1(t_1, t, \Theta_2\Theta^\nu x_1) = \psi_1(t_1, t, \Theta_2 x_1),$$

hvaraf slutligen

$$\psi_1(t_1, t, \Theta_2 x_1) = \frac{1}{n}[\psi_1(t_1, t, \Theta_2 x_1) + \psi_1(t_1, t, \Theta_2\Theta x_1) + \ldots +$$
$$+ \psi_1(t_1, t, \Theta_2\Theta^{n-1}x_1)]$$
$$= \text{symmetrisk i } x_1, \Theta x_1 \ldots \Theta^{n-1}x_1.$$

Häraf inses att

$$\psi_1(t_1, t, \Theta_2 x_1) = R(\psi(t, x_1)),$$

där R är en rationel funktion.

Af den sista likheten följer, att

$$R(\psi(t, \Theta_1 x_1)) = \psi_1(t_1, t, \Theta_2\Theta_1 x_1)$$
$$= \psi_1(t_1, t, \Theta^{\alpha''}\Theta_1^{\beta''}\Theta_2 x_1)$$
$$= \psi_1(t_1, t, \Theta_2 x_1).$$

Af den nyss ofvan härledda likheten inses då att

$$R(\psi(t, x_1)) = R(\psi(t, \Theta_1^\nu x_1)),$$

för godtyckligt ν, hvaraf slutligen

$$\psi_1(t_1, t, \Theta_2 x_1) = \frac{1}{n_1}[R(\psi(t, x_1)) + R(\psi(t, \Theta_1 x_1)) + \ldots + R(\psi(t, \Theta_1^{n_1-1}x_1))]$$
$$= \text{symmetrisk i } \psi(t, x_1), \psi(t, \Theta_1 x_1) \ldots \psi(t, \Theta_1^{n_1-1}x_1)$$
$$= \text{rationel i } \Psi_1(t_1, t, x_1).$$

Om μ betecknar en rationel funktion, kunna vi sålunda skrifva

$$\psi_1(t_1, t, \Theta_2 x_1) = \mu\psi_1(t_1, t, x_1).$$

Det nödvändiga och tillräckliga vilkoret för att en rot i F_2 skall vara rationel i en annan af dess rötter, är således

$$\left.\begin{array}{l}\Theta_2\Theta x_1 = \Theta^{\alpha'}\Theta_1^{\beta'}\Theta_2 x_1 \\ \Theta_2\Theta_1 x_1 = \Theta^{\alpha''}\Theta_1^{\beta''}\Theta_2 x_1\end{array}\right\}$$

Om nu

$\mu^{n_2}x_1'' = x_1''$, så blir $\psi_1\left(t_1, t, \Theta_2^{n_2}x_1\right) = \psi_1(t_2, t, x_1)$ och således

$$\Theta_2^{n_2}x_1 = \Theta^{\varkappa_1}\Theta_1^{\varkappa}x_1 .$$

Äger nu denna relation mellan Θ, Θ_1 och Θ_2 rum, kunna vi reducera

$$F_2(x'') = 0$$

på analogt sätt till två likheter.

Nu fortgår jag på detta sätt, till dess jag framkommit till

$$F_{\nu-1}(x^{\nu-1}) = 0,$$

där en rot

$$x_1^{\nu-1} = [t_{\nu-2} - \psi_{\nu-3}(t_{\nu-3}\ldots t_1, t, x_1)]\,[t_{\nu-2} - \psi_{\nu-3}(t_{\nu-3}\ldots t_1, t, \Theta_{\nu-2}x_1)]\ldots$$
$$= \psi_{\nu-2}(t_{\nu-2}\ldots t_1, t, x_1)$$

och det nödvändiga och tillräckliga vilkoret för att en af dess rötter skall vara en rationel funktion af en af de andra rötterna, är

$$\left.\begin{array}{l}\Theta_{\nu-1}\Theta = \Theta^{\alpha_{\nu-1}}\Theta_1^{\beta_{\nu-1}}\ldots\Theta_{\nu-2}^{\lambda_{\nu-1}}\Theta_{\nu-1} \\ \Theta_{\nu-1}\Theta_1 = \Theta^{\alpha'_{\nu-1}}\Theta_1^{\beta'_{\nu-1}}\ldots\Theta_{\nu-2}^{\lambda'_{\nu-1}}\Theta_{\nu-1} \\ \quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \Theta_{\nu-1}\Theta_{\nu-2} = \Theta^{\alpha_{\nu-1}^{\nu-2}}\Theta_1^{\beta_{\nu-1}^{\nu-2}}\ldots\Theta_{\nu-2}^{\lambda_{\nu-1}^{\nu-2}}\Theta_{\nu-1}\end{array}\right\}$$

I det fall att denna relation är uppfylld, låter likheten

$$F_{\nu-1}(x^{\nu-1}) = 0$$

reducera sig på

$$f_{\nu-1}(x^{\nu-1}) = (x^{\nu-1} - x_1^{\nu-1})\,(x^{\nu-1} - \sigma x_1^{\nu-1})\ldots\left(x^{\nu-1} - \sigma^{n_\nu-1}x_1^{\nu-1}\right),$$

där σ är en rationel funktion, och koefficienterna äro rationella i en rot x_1^ν till

$$F_\nu(x^\nu) = 0,$$

$$x_1^\nu = \left(t_{\nu-1} - x_1^{\nu-1}\right)\left(t_{\nu-1} - \sigma x_1^{\nu-1}\right)\ldots\left(t_{\nu-1} - \sigma^{n_\nu-1}x_1^{\nu-1}\right)$$
$$= [t_{\nu-1} - \psi_{\nu-2}(t_{\nu-2}\ldots t_1, t, x_1)]\,[t_{\nu-1} - \psi_{\nu-2}(t_{\nu-2}\ldots t_1, t, \Theta_{\nu-1}x_1)]$$
$$\ldots[t_{\nu-1} - \psi_{\nu-1}(t_{\nu-2}\ldots t_1, t, x_1, \Theta_{\nu-1}x_1)]$$
$$= \psi_{\nu-1}(t_{\nu-1}\ldots t_1, t, x_1).$$

Då blir vilkoret för att en rot i $F_\nu(x^\nu) = 0$ skall vara rationel i en annan rot, att

$$\psi_{\nu-1}(t_{\nu-1} \ldots t_1, t, \Theta_\nu x_1) = \tau(\psi_{\nu-1}(t_{\nu-1} \ldots t_1, t, x_1))$$

där τ betecknar en rationel funktion.

Men då högra membrum blir oförändradt om ersätter x_1 med Θx_1, erhålles häraf

$$\psi_{\nu-1}(t_{\nu-1} \ldots t_1, t, \Theta_\nu \Theta x_1) = \psi_{\nu-1}(t_{\nu-1} \ldots t_1, t, \Theta_\nu x_1).$$

Häraf inses att

$$\psi_{\nu-2}(t_{\nu-2} \ldots t_1, t, \Theta_\nu \Theta x_1) = \psi_{\nu-2}\left(t_{\nu-2} \ldots t_1, t, \Theta_{\nu-1}^{\varkappa_\nu} \Theta_\nu x_1\right)$$

o. s. v. så att

och på samma sätt
$$\left.\begin{array}{l} \Theta_\nu \Theta x_1 = \Theta^{\alpha_\nu} \Theta_1^{\beta_\nu} \ldots \Theta_{\nu-1}^{\varkappa_\nu} \Theta_\nu x_1 \\ \Theta_\nu \Theta_1 x_1 = \Theta^{\alpha'_\nu} \Theta_1^{\beta'_\nu} \ldots \Theta_{\nu-1}^{\varkappa'_\nu} \Theta_\nu x_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Theta_\nu \Theta_{\nu-1} x_1 = \Theta^{\alpha_\nu^{\nu-1}} \Theta_1^{\beta_\nu^{\nu-1}} \ldots \Theta_{\nu-1}^{\varkappa_\nu^{\nu-1}} \Theta_\nu x_1 \end{array}\right\}$$

Detta är sålunda ett nödvändigt vilkor. Men det är äfven tillräckligt.

Ty om ofvanstående relationer äga rum, så är det tydligt att

$$\begin{aligned} \psi_{\nu-1}(t_{\nu-1} \ldots t_1, t, \Theta_\nu x_1) &= \psi_{\nu-1}(t_{\nu-1} \ldots t_1, t, \Theta_\nu \Theta x_1) \\ &= \frac{1}{n}\left[\psi_{\nu-1}(t_{\nu-1} \ldots t_1, t, \Theta_\nu x_1) + \ldots + \right. \\ &\qquad \left. + \psi_{\nu-1}(t_{\nu-1} \ldots t, \Theta_\nu \Theta^{n-1} x_1)\right] \\ &= R(\psi(t, x_1)). \end{aligned}$$

Men venstra membrum blir oförändradt, om ersätter x_1 med $\Theta_1 x_1$ således äfven högra oförändrad, hvaraf följer att

$$\begin{aligned} \psi_{\nu-1}(t_{\nu-1} \ldots t_1, t, \Theta_\nu x_1) &= \frac{1}{n_1}[R(\psi(t, x_1)) + R(\psi(t, \Theta_1 x_1)) + \ldots] \\ &= R_1(\psi_1(t_1, t, x_1)) \end{aligned}$$

o. s. v. slutligen

$$\psi_{\nu-1}(t_{\nu-1} \ldots t_1, t, \Theta_\nu x_1) = R_{\nu-1}(\psi_{\nu-1}(t_{\nu-1} \ldots t_1, t, x_1)).$$

Vi ha sålunda funnit följande sats:

Det nödvändiga och tillräckliga vilkoret för att en algebraisk likhet

$$F(x) = 0,$$

i hvilken hvarje rot x_ν är en rationel funktion $\Theta_\nu(x_1)$ af en af

dem x_1, *genom ofvan angifna förfarande skall kunna reduceras på ett system af enkla Abelska likheter, är att de rationella funktionerna* Θ_ν *skola, sedan de blifvit ordnade på ett visst sätt, vara underkastade följande relationer:*

$$\Theta_1 \Theta x_1 = \Theta^{\alpha_1} \Theta_1 x_1,$$

$$\left.\begin{array}{l} \Theta_2 \Theta x_1 = \Theta^{\alpha_2} \Theta_1^{\beta_2} \Theta_2 x_1, \\ \Theta_2 \Theta_1 x_1 = \Theta^{\alpha'_2} \Theta_1^{\beta'_2} \Theta_2 x_1, \end{array}\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\left.\begin{array}{l} \Theta_\nu \Theta x_1 = \Theta^{\alpha_\nu} \Theta_1^{\beta_\nu} \ldots \Theta_{\nu-1}^{\varkappa_\nu} \Theta_\nu x_1, \\ \Theta_\nu \Theta_1 x_1 = \Theta^{\alpha'_\nu} \Theta_1^{\beta'_\nu} \ldots \Theta_{\nu-1}^{\varkappa'_\nu} \Theta_\nu x_1, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \Theta_\nu \Theta_{\nu-1} x_1 = \Theta^{\alpha_\nu^{\nu-1}} \Theta_1^{\beta_\nu^{\nu-1}} \ldots \Theta_{\nu-1}^{\varkappa_\nu^{\nu-1}} \Theta_\nu x_1, \end{array}\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

hvarvid iakttages, att det finnes ett tal n_ν, *så beskaffadt, att*

$$\Theta_\nu^{n_\nu} x_1 = \Theta^{\bar{\alpha}_\nu} \Theta_1^{\bar{\beta}_\nu} \ldots \Theta_{\nu-1}^{\bar{\varkappa}_\nu}.$$

Vi kunna nu äfven visa att de ofvan uppställda vilkoren äro nödvändiga och tillräckliga, för att en likhet sådan, att hvarje rot kan uttryckas rationelt i en annan, skall kunna lösas algebraiskt.

Ty om $F(x) = 0$ är algebraiskt lösbar, så är en rot af formen[1])

$$x = \varphi(R' \ldots R^{(\varrho)}, V_1 \ldots V_q)$$

där $V_1 \ldots V_q$ äro definierade genom följande likheter:

$$\left.\begin{array}{l} V_1^{p_1} - \varphi_1(R' \ldots R^\varrho) = 0, \\ V_2^{p_2} - \varphi_2(R' \ldots R^\varrho, V_1) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ V_q^{p_q} - \varphi_q(R' \ldots R^\varrho, V_1 \ldots V_{q-1}) = 0, \end{array}\right\}$$

Här äro mina φ_ν rationella i $R' \ldots R^\varrho$, hela i $V_1 \ldots V_{q-1}$ af graden $p_1 - 1, \ldots p_{q-1} - 1$. Vidare är $V_\nu^{p_\nu} - \varphi_\nu()$ irreduktibel inom rationalitetsområdet $R' \ldots R^\varrho, V_1 \ldots V_{\nu-1}$. Härvid tänker jag mig, att till rationalitetsområdet adjungerats kvantiteterna $\omega_1 \ldots \omega_q$ som satisfiera

---

[1]) Se KRONECKER, »Aus d. Theorie d. Algebr. Gleich». Monatsbericht d. Königl. Akad. d. Wissensch., Berlin 3 März 1873.

$$\omega_\nu^{p_\nu-1} + \omega_\nu^{p_\nu-2} + \ldots + \omega_\nu + 1 = 0 .$$

Om nu ersätter V_q med $\omega_q V_q$ i φ, så erhålles en ny rot

$$\varphi(R' \ldots R^\varrho, V_1 \ldots V_{q-1}, \omega_q V_q) = \Theta\varphi(R' \ldots R^\varrho, V_1 \ldots V_{q-1}, V_q) .$$

I denna likhet måste koefficienterna för de olika potenserna af V_q vara identiskt lika, ty annars skulle denna likhet i förening med

$$V_q^{p_q} - \varphi_q(R' \ldots R^\varrho, V_1 \ldots V_{q-1}) = 0$$

gifva mig V_q = rationel funktion af $(R' \ldots R^\varrho, V_1 \ldots V_{q-1})$,[1] hvilket är omöjligt. Häraf inses att, om jag i likheten ofvan ersätter V_q med $\omega_q V_q$, måste likheten lika fullt bestå, hvaraf erhålles

$$\varphi\left(R' \ldots R^\varrho, V_1 \ldots V_{q-1}, \omega_q^2 V_q\right) = \Theta^2\varphi(R' \ldots R^\varrho, V_1 \ldots V_q).$$

Då

$$x_1 = \varphi(R' \ldots R^\varrho, V_1 \ldots V_q)$$

erhålles

$$\Theta^\alpha x_1 = \varphi\left(R' \ldots R^\varrho, V_1 \ldots V_{q-1}, \omega_q^\alpha V_q\right),$$

hvarur slutligen

$$\Theta^{p_q} x_1 = x_1 .$$

Jag bildar nu

$$\psi(t, x_1) = (t - x_1)(t - \Theta x_1) \ldots (t - \Theta^{p_q-1} x_1) = H(t, V_{q-1} \ldots V_1, R' \ldots R^\varrho).$$

Ersätter jag nu i φ_q, V_{q-1} med $\omega_{q-1} V_{q-1}$, så öfvergår V_q i $\overline{V}_q$, och jag erhåller en rot

$$x_2 = \varphi(R' \ldots R^\varrho, V_1 \ldots \omega_{q-1} V_{q-1}, \overline{V}_q) .$$

Men för denna gäller tydligen på samma sätt att

$$\varphi(R' \ldots R^\varrho, V_1 \ldots \omega_{q-1} V_{q-1}, \omega_q \overline{V}_q) =$$
$$= \Theta\varphi(R' \ldots R^\varrho, V_1 \ldots \omega_{q-1} V_{q-1}, \overline{V}_q)$$

och sålunda

$$\Theta^\alpha x_2 = \varphi\left(R' \ldots R^\varrho, V_1 \ldots \omega_{q-1} V_{q-1}, \omega_q^\alpha \overline{V}_q\right);$$

hvarur

$$\psi(t, x_2) = (t - x_2)(t - \Theta x_2) \ldots (t - \Theta^{p_q-1} x_2)$$
$$= H(t, \omega_{q-1} V_{q-1} \ldots V_1, R' \ldots R^\varrho) .$$

Om nu V_{q-1} verkligen förekommer i H, så är x_2 skiljdt från $\Theta^\nu x_1$ d. v. s.

$$x_2 = \Theta_1 x_1 , \quad \text{där} \quad \Theta_1 x_1 \neq \Theta^\nu x_1 .$$

[1] Jfr NETTO, »Substitutionentheorie und ihre Anwendung etc.», sid. 239.

Vi erhålla således

$$y_1 = \psi(t, x_1) = H(t, V_{q-1} \ldots V_1, R' \ldots R^\varrho)$$
$$y_2 = \psi(t, \Theta_1 x_1) = H(t, \omega_{q-1} V_{q-1} \ldots V_1, R' \ldots R^\varrho).$$

Om jag nu i allmänhet sätter

$$y_\nu = H\left(t, \omega_{q-1}^{\nu} V_{q-1} \ldots V_1, R' \ldots R^\varrho\right)$$

samt om $C(y_1 \ldots y_{p_{q-1}})$ är en cyklisk funktion af $y_1 \ldots y_{p_{q-1}}$[1]), så inses att $C(y_1 \ldots y_{p_{q-1}})$ är oberoende af V_{q-1}, och vi erhålla

$$C(y_1 \ldots y_{p_{q-1}}) = \overline{H}(t, V_{q-2} \ldots V_1, R' \ldots R^\varrho).$$

Som nu i likheten

$$f(y) = (y - y_1) \ldots (y - y_{p_{q-1}}) = 0$$

hvarje cyklisk funktion af rötterna är rationel inom området $V_{q-2} \ldots V_1, R' \ldots R^\varrho$, så blir $f(y)$ inom detta område en enkel Abelsk likhet och således

$$y_2 = \bar{\lambda}(y_1, V_{q-2} \ldots V_1, R' \ldots R^\varrho)$$

d. v. s.

$$\psi(t, \Theta_1 x_1) = \bar{\lambda}(\psi(t, x_1), V_{q-2} \ldots V_1, R' \ldots R^\varrho),$$

där $\bar{\lambda}$ är en rationel funktion.

Men

$$H(x, V_{q-1} \ldots V_1, R' \ldots R^\varrho) = \prod_{\nu=1}^{p_q}\left(x - \varphi\left(R' \ldots R^\varrho, V_1 \ldots V_{q-1}, \omega_q^\nu V_q\right)\right)$$

är ju inom rationalitetsområdet $V_{q-1} \ldots V_1, R' \ldots R^\varrho$ en potens af en enda irreduktibel factor, och eftersom p_q är ett primtal, är H irreduktibel inom ofvannämda rationalitetsområde. Häraf följer att

$$\psi(t, \Theta_1 \Theta x_1) = \bar{\lambda}(\psi(t, \Theta x_1), V_{q-2} \ldots V_1, R' \ldots R^\varrho)$$
$$= \psi(t, \Theta_1 x_1).$$

Men detta innebär, att

$$\Theta_1 \Theta x_1 = \Theta^\alpha \Theta_1 x_1,$$

och häraf åter följer, enligt hvad vi ofvan visat, att

$$\psi(t, \Theta_1 x_1) = \lambda \psi(t, x_1), \text{ där } \lambda \text{ är en rationel funktion.}$$

[1]) Jfr KRONECKER, »Über Abelsche Gleich.» Berliner Monatsber. 1877.

Men som

$$H(t, \omega_{q-1}V_{q-1} \ldots V_1, R' \ldots R^\varrho) = \lambda H(t, V_{q-1} \ldots V_1, R' \ldots R^\varrho)$$

blir

$$H(t, \omega_{q-1}^\nu V_{q-1} \ldots V_1, R' \ldots R^\varrho) = \lambda^\nu H(t, V_{q-1} \ldots V_1, R' \ldots R^\varrho),$$

hvaraf

$$\lambda^{p_{q-1}} y_1 = y_1$$

och härur

$$\psi(t, \Theta_1^{p_{q-1}} x_1) = \psi(t, x_1)$$

och således

$$\Theta_1^{p_{q-1}} x_1 = \Theta^\varkappa x_1 .$$

Om vi nu ersätta V_{q-2} med $\omega_{q-2}V_{q-2}$, så öfvergår V_{q-1} i $\overline{V}_{q-1}$, x_1 i x_3, och vi erhålla

$$H(t, \omega_{q-1}\overline{V}_{q-1}, \omega_{q-2}V_{q-2} \ldots V_1, R' \ldots R^\varrho) =$$
$$= \lambda H(t, \overline{V}_{q-1}, \omega_{q-2}V_{q-2} \ldots V_1, R' \ldots R^\varrho);$$

å andra sidan är

$$\psi(t, \Theta_1 x_\nu) = \lambda\psi(t, x_\nu) .$$

Om således

$$\psi(t, x_3) = H(t, \overline{V}_{q-1}, \omega_{q-2}V_{q-2} \ldots)$$

så blir

$$\psi(t, \Theta_1 x_3) = \lambda H(t, \overline{V}_{q-1}, \omega_{q-2}V_{q-2} \ldots)$$
$$= H(t, \omega_{q-1}\overline{V}_{q-1}, \omega_{q-2}V_{q-2} \ldots) .$$

Om nu bildar

$$\psi_1(t_1, t, x_1) = [t_1 - \psi(t, x_1)][t_1 - \psi(t, \Theta_1 x_1)] \ldots [t_1 - \psi(t, \Theta_1^{p_{q-1}-1} x_1]$$
$$= H_1(t_1, t, V_{q-2}, V_{q-3} \ldots),$$

så blir

$$\psi_1(t_1, t, x_3) = H_1(t_1, t, \omega_{q-2}V_{q-2}, V_{q-3} \ldots)$$

och om nu V_{q-2} verkligen förekommer i H_1, så blir $x_3 \neq \Theta^\alpha \Theta_1^\beta x_1$. Hvaraf $x_3 = \Theta_2 x_1$.

Bildas nu en cyklisk funktion af $Z_1 \ldots Zp_{q-2}$, där

$$Z_{\nu+1} = \mathrm{H}_1(t_1, t, \omega_{q-2}^\nu V_{q-2}, V_{q-3} \ldots)$$

så är den rationel i $V_{q-3} \ldots V_1, R' \ldots R^\varrho$.

Vi få då

$$\psi_1(t_1, t, \Theta_2 x_1) = R(\psi_1(t_1, t, x_1), V_{q-3} \ldots V_1, R' \ldots R^\varrho)$$

där R betecknar en rationel funktion. Men produkten

$$\prod_{\nu=1}^{p_{q-1}} H\left(x, \omega_{q-1}^{\nu} V_{q-1} \ldots V_1, R' \ldots R^{\varrho}\right) =$$
$$= H_1(x, V_{q-2}, V_{q-3} \ldots V_1, R' \ldots R^{\varrho})$$

är irreduktibel inom området $V_{q-2} \ldots V_1$, hvilket lätt visas. [1])

Vi erhålla sålunda, då likheten ofvan måste satisfieras af alla rötter till H_1,

$$\psi_1(t_1, t, \Theta_2 \Theta x_1) = \psi_1(t_1, t, \Theta_2 x_1)$$

hvarur

$$\Theta_2 \Theta x_1 = \Theta^{\alpha_2} \Theta_1^{\beta_2} \Theta_2 x_1 .$$

Men häraf följer att

$$\psi_1(t_1, t, \Theta_2 x_1) = \frac{1}{p_q} [\psi_1(t_1, t, \Theta_2 x_1) + \psi_1(t_1, t, \Theta_2 \Theta x_1) + \ldots +$$
$$+ \psi_1(t_1, t, \Theta_2 \Theta^{p_q - 1} x_1]$$
$$= R_2(\psi(t, x_1)) ,$$

där R_2 är en rationel funktion, emedan högra membrum är symmetrisk i $x_1, \Theta x_1 \ldots \Theta^{p_q-1} x_1$.

Men $\psi(t, x_1)$ är roten till en likhet

$$[y - \psi(t, x_1)] [y - \lambda \psi(t, x_1)] \ldots [y - \lambda^{p_{q-1}-1} \psi(t, x_1] = \psi(y, t, x_1) = 0$$
$$= H_2(y, t, V_{q-2}, V_{q-3} \ldots)$$

där H_2 är irreduktibel inom området $R' \ldots R^{\varrho}, V_1 \ldots V_{q-2}$, och häraf inses att, om $\psi_1 (t_1, t, x_1)$ sättes $= R_1 \psi (t, x_1)$,

$$R_2(\lambda \psi(t, x_1)) = R(R_1 \lambda \psi(t, x_1), V_{q-3} \ldots)$$

d. v. s.

$$R_2(\psi(t, \Theta_1 x_1)) = R(R_1 \psi(t, \Theta_1 x_1), V_{q-3} \ldots V_1 \ldots).$$

Men som

$$\psi_1(t_1, t, \Theta_2 x_1) = R_2(\psi(t, x_1)) ,$$

så blir

$$\psi_1(t_1, t, \Theta_2 \Theta_1 x_1) = R_2(\psi(t, \Theta_1 x_1)) .$$

Å andra sidan erhålles ur

$$R_1(\psi(t, x)) = \psi_1(t_1, t, x_1)$$

att

$$R_1(\psi(t, \Theta_1 x_1)) = \psi_1(t_1, t, \Theta_1 x_1) = \psi_1(t_1, t, x_1) ,$$

---

[1]) Se Netto, Substitutionentheorie, sid. 246.

och sålunda

$$\psi_1(t_1, t, \Theta_2\Theta_1 x_1) = R(\psi_1(t_1, t, x_1), V_{q-3}\ldots) = \psi_1(t_1, t, \Theta_2 x_1).$$

Ur denna likhet erhålles

$$\Theta_2\Theta_1 x_1 = \Theta^{\alpha'_2}\Theta_1^{\beta'_2}\Theta_2.$$

Är sålunda $F(x) = 0$ en algebraisk upplösbar likhet, så måste

$$\Theta_1\Theta x_1 = \Theta^{\alpha}\Theta_1 x_1,$$

$$\left.\begin{aligned}\Theta_2\Theta x_1 &= \Theta^{\alpha_2}\Theta_1^{\beta_2}\Theta_2 x_1,\\ \Theta_2\Theta_1 x_1 &= \Theta^{\alpha'_2}\Theta_1^{\beta'_2}\Theta_2 x_1.\end{aligned}\right\}$$

På samma sätt visas nu, att alla relationerna ofvan måste ega rum, så att de nödvändiga och tillräckliga vilkoren bli de ofvan uppställda

$$\left.\begin{aligned}\Theta_\nu\Theta x_1 &= \Theta^{\alpha_\nu}\Theta_1^{\beta_\nu}\ldots\Theta_{\nu-1}^{\varkappa_\nu}\Theta_\nu x_1,\\ \Theta_\nu\Theta_1 x_1 &= \Theta^{\alpha'_\nu}\Theta_1^{\beta'_\nu}\ldots\Theta_{\nu-1}^{\varkappa'_\nu}\Theta_\nu x_1,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \Theta_\nu\Theta_{\nu-1} x_1 &= \Theta^{\alpha_\nu^{\nu-1}}\Theta_1^{\beta_\nu^{\nu-1}}\ldots\Theta_{\nu-1}^{\varkappa_\nu^{\nu-1}}\Theta_\nu x_1.\end{aligned}\right\}$$

Vi ha sålunda bevisat vår å sid. 133 uttalade sats.

Applicera vi de erhållna resultaten på den GALOIS'ska resolventlikheten

$$\prod_{\nu_1\ldots\nu_n}(z - u_1 x_{\nu_1} - \ldots - u_n x_{\nu_n}) = 0,$$

där produkten är tagen öfver alla möjliga permutationer $\nu_1 \ldots \nu_n$ samt alla mina u_ν äro obestämda konstanter och $x_{\nu_1}\ldots x_{\nu_n}$ äro rötterna till en algebraisk likhet hvilken som helst, så blir

$$u_{\nu_1}x_1 + u_{\nu_2}x_2 + \ldots + u_{\nu_n}x_n = \Theta_{\nu_1\ldots\nu_n}(u_1 x_1 + \ldots + u_n x_n),$$

där $\Theta_{\nu_1\ldots\nu_n}$ betecknar en rationel funktion. Som här $u_1 \ldots u_n$ äro fullt obestämda, så inses, att om jag gör en substitution på hvardera sidan, så kommer likheten dock att äga rum, och jag erhåller de egenskaper, som tillkomma gruppen till en algebraisk upplösbar likhet och som finnes framställdt t. ex. i CAMILLE JORDAN, »Traité des substitutions», sid. 389—397, ur de egenskaper som, enligt hvad jag visat, tillkomma funktionerna $\Theta_{\nu_1\ldots\nu_n}$.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts. från sid. 130.)

Wien. *K. K. Geographische Gesellschaft.*
Mittheilungen. Bd. 33 (1890). 8:o.

Zürich. *Naturforschende Gesellschaft.*
Vierteljahrsschrift. Jahrg. 35 (1890): H. 1—2. 1890. 8:o.

Hr professor J. A. Ouchterlony i Louisville, U. S. A.
En samling nyare arbeten öfver Nordamerikas geologi, paleontologi och etnografi, tillsammans 75 band.

Författarne.

Ljungman, A. V., »Fiskerinäringens understöd». Göteb. 1890. 8:o.
— Småskrifter. 4 häft. 8:o.
Petersohn, Th., Undersökning af de inhemska ormbunkarnes bladbyggnad. Lund 1889. 4:o.
Retzius, G., Muskelfibrille und Sarcoplasma. Sthm. 1890. 4:o.
— Zur Kenntniss des Nervensystemes der Crustaceën. Sthm. 1890. 4:o.
— Småskrift. 1 häfte. 4:o.
Benson, L. S., Mensuration. New York. 8:o.
— Småskrifter. 11 häft. 4:o & 8:o.
Caglievina, D., Die Messung der Lichtintensität in Graden. München 1881. 8:o.
Dames, W., Über die Schichtenfolge der Silurbildungen Gotlands . . . Berlin 1890. 8:o.
Darget, L., Théories directes de la somme des angles d'un triangle valant deux droits. Auch 1889. 4:o.
— La division à la nique ou la trisection de l'angle. Auch. 4:o.
Ganser, A., Die Wahrheit. Graz 1890. 8:o.
— Die Freiheit des Willens. Graz 1891. 8:o.
Goppelsröder, F., Die Feuerbestattung. Vortrag. Mülhausen 1890. 8:o.
Grieg, J. A., Bidrag til de Norske Alcyonarier. Bergen 1887. 8:o.
— Småskrifter. 4 häften. 8:o.
Ludvig, F. A., Das Buch vom Gottwissen. Lpz. 1891. 8:o.
Marie, M., Note sur un Mémoire de H. Poincaré . . . relatif aux résidus des integrales doubles. Paris 1891. 8:o.
Mohn, H., The physical conditions of Barents sea. 1889. 8:o.
Porro, F., Intorno all' ecclisse totale di luna del $^{28}/_{2}$ 1888. Torino 1888. 8:o.
— Småskrifter. 3 häften. 8:o.
Schramm, R., Adria-Zeit. Wien 1889. 12:o.
— Småskrifter. 4 Häften. 4:o & 8:o.
Schwörer, E., Le milieu intrastellaire et les nouvelles expériences de M. Hertz sur les interférences électriques. Colmar 1890. 8:o.
— Småskrift. 1 häfte. 8:o.
Sieger, R., Die Schwankungen der Hocharmenischen Seen seit 1800 . . . 8:o. Wien 1888. 8:o.
— Småskrifter. 2 häften. 8:o.

(Forts. å sid. 158.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1891. N:o 3.
Stockholm.

Ueber die Afrikanischen Arten der Gattung Xyris.

Von D:r ALB. NILSSON.

[Mitgetheilt den 11. März 1891 durch V. B. WITTROCK.]

Die Gattung *Xyris* ist in einer recht erheblichen Anzahl Arten durch sämmtliche tropischen Florenreiche, durch den südöstlichen Theil des borealen in Nordamerika und durch die australen im Kaplande und Australien verbreitet. Seit der zusammenfassenden Uebersicht der Arten von STEUDEL in Synopsis Plantarum Glumacearum 1856 und der SEUBERT'schen Bearbeitung der brasilianischen Xyrideen in Flora Brasiliensis 1856 sind nur spärliche Beiträge zur Kenntniss der Gattung geliefert worden. Theils hierdurch theils durch die reichen und schönen Sammlungen von brasilianischen Arten im Regnellschen Herbar des hiesigen Reichsmuseums veranlasst, habe ich eine eingehende Bearbeitung der ganzen Gattung in sowohl systematischer und pflanzengeografischer als auch morphologischer und anatomischer Hinsicht unternommen. Ich war dabei in der glücklichen Lage nebst die Sammlungen des hiesigen Museums auch die reichen Sammlungen der Museen zu Upsala, Berlin und München mit den Originalen von THUNBERG, KUNTH und MARTIUS benützen zu können. In der Hoffnung die Resultate dieser grösstentheils schon abgeschlossenen Untersuchung baldigst publicieren zu können beabsichtige ich hier vorläufig eine Uebersicht über die Afrikanischen Arten zu liefern.

Schon im Ende des vorigen Jahrhunderts wurden zwei Xyris-Arten aus Afrika bekannt, nähmlich *Xyris filiformis* LAMARCK, in Illustrations des genres 1791 beschrieben, und *Xyris capensis*

THUNBERG, in Prodromus plantarum capensium 1794 aufgestellt. Im Jahre 1808 wurde eine dritte Art *Xyris platycaulis* aus Zanzibar, Madagascar und Mauritius von POIRET in Encycl. met. Bot. T. 8 pag. 82 neu aufgestellt. Näher erläutert wurde diese Art durch KUNTH in Enumeratio plantarum IV 1843. In dieser Arbeit, die durch ihre ausführlichen und genauen Artenbeschreibungen als grundlegend für unsere Kenntniss über die Xyrideen zu betrachten ist, wurde die Afrikanische Flora mit der neu beschriebenen *Xyris humilis* aus Madagascar und Mauritius bereichert. In STEUDEL'S Synopsis Plantarum glumacearum 1856 — eine Arbeit, die wohl durch Zusammenfassung der bis dahin beschriebenen Arten Bedeutung hat, aber in welcher Arbeit die Beschreibungen zu sicherem Identifizieren kaum genügen, sind unter den Afrikanischen Arten *Xyris minima* aus der Insel Loss und *Xyris insularis* aus Madagascar neu aufgestellt. Weitere Beiträge zu unserer Kenntniss der Afrikanischen Arten sind in »Contributions to the Flora of Madagascar» von BAKER geliefert. Hier ist theils eine neue Art *Xyris semifuscata* BOJER aufgestellt und theils eine andere *Xyris capensis* THUNB.? näher beschrieben. Diese letztere Art ist doch *Xyris capensis* THUNBERG entschieden nicht. Da auch die Beschreibung BAKER'S mit keiner anderen Art übereinstimmt, nehme ich sie hier unter den Namen *Xyris Bakeri* auf.

Endlich hat BÜTTNER in Verhandl. des bot. Vereins zu Brandenburg Jahrg. 31 (1890) pag. 71 *Xyris congensis* neu aufgestellt und ausführlich beschrieben.

Abgesehen von einigen Notizen über die Verbreitung einzelner Arten ist dies alles, was bisher über die Afrikanishen Arten bekannt worden ist.

Folglich sind bisher 9 Arten als in Afrika vorkommend angegeben. Von diesen ist jedoch *Xyris semifuscata* wohl nur als eine Form der *Xyris capensis* zu betrachten und auch *Xyris minima* scheint eine Form von *Xyris humilis* zu sein. Weiter ist zu bemerken dass *Xyris insularis* STEUD. mir nicht völlig klar geworden ist.

Mit Gewissheit sind also nur 6 Arten als sicher anzusehen. Hierzu kommen 4 von mir in diesen Blättern neu aufgestellte Arten, nähmlich *Xyris straminea* und *nitida* aus dem westlichen, *Xyris natalensis* aus dem südöstlichen Afrika und *X. Hildebrandtii* aus Madagascar.

Gegenwärtig sind folglich 10 sichere und 1 noch nicht aufgeklärte Art aus Afrika bekannt. Das Verbreitungsgebiet der Gattung in Afrika scheint sehr weit zu sein. Wie aus der folgenden Darstellung hervorgeht sind Arten dieser Gattung bisher aus Senegambien, Sierra Leona, Kap, Natal, Madagascar, Mauritius, Zanzibar und auch Abessinien bekannt.

Unter den Arten sind 4 dem westlichen Afrika eigen, nähmlich *Xyris filiformis*, *straminea*, *nitida* und *congensis*, 1 ist zum südlichen Afrika eingeschränkt, nähmlich *Xyris natalensis*, 2 sind obwohl in etwas abweichenden Formen dem östlichen und westlichen Afrika gemein, nähmlich *Xyris platycaulis* und *humilis*. Eine Art nähmlich *Xyris capensis* ist obgleich in abweichenden Formen dem südlichen Afrika, Madagascar und Abessinien gemein.

Sehr reich an Arten scheint Madagascar zu sein. Hier sind nähmlich ausser *Xyris humilis*, *platycaulis*, *capensis β semifuscata*, *Hildebrandtii* und *Bakeri* auch die hier als ungenügend bekannt aufgenommene *Xyris insularis* gefunden.

Endlich ist über die geografische Verbreitung zu bemerken, dass eine Art — *Xyris capensis* — auch in Asien weit verbreitet ist. Die übrigen scheinen in Afrika beschränkt zu sein, obwohl ein grosser Theil derselben durch nahe stehende Arten in Asien vertreten sind, und eine Art — *Xyris natalensis* — mit Australischen Arten verwandt zu sein scheint.

Xyris filiformis Lam.

Illustrations des genres 1 pag. 132 (1791) char. emend.

Folia plana, anguste linearia, glabra, obtusiuscula, 3—4 cm. longa, $^1/_2$—1 mm. lata, basi $^1/_3$—$^1/_2$ complicata, margine complicationis albomembranacea; *scapus* filiformis, teres, glaber, 15—

17 mm. longus basi vagina aphylla, nervis 3 notata, 4—6 cm. longa instructus, ut folia et vagina rubro-striolatus; *spica* junior oblonga vel breviter lanceolata demum subglobosa 4—5 mm. longa sæpius 2—4 mm. lata, bracteis obovatis vel ellipticis 3—4 $^1/_2$ mm. longis, glabris, margine integris, læte castaneis vix nitidis, exterioribus area dorsali prominente cinerea notatis, interioribus concoloribus; *sepala* lateralia lineari-spathulata, carinata, carina vix alata superne hispidula bracteis æquilonga; *capsula* sepalis dimidio brevior inferne 3—locularis; *placentæ* centrales superne confluentes; *semina* glabra, ellipsoidea, utrinque acute umbonata.

Hab. Sierra Leona (AFZELIUS in herb. Holmiense et Berolinense), Senegal (ex herb. LAMB. in herb. Upsaliense).

Diese durch ihre unten 3-fächerige Kapsel und die oben in eine centrale Placenta zusammenfliesenden Placenten sehr ausgezeichnete Art stimmt vollständig (auch hinsichtlich der Heimath) mit der allerdings sehr kurzen Beschreibung LAMARCK'S überein, wofür ich über die Identifizierung keinen Zweifel hege, obgleich ich Originalexemplare nicht gesehen habe.

Xyris humilis KUNTH.

Enum. Plant IV pag. 15 (1843).

Hab. West-Madagascar pr Marovoay in palude mai 1880 (J. M. HILDEBRANDT N:o 3431. in herb. Monacense).

Exemplaria gracilia ad 35 cm. longa; *folia* 2 mm. lata; *bracteæ* exteriores area dorsali lanceolata, interiores area triangulari notatæ; *sepala* lateralia rosea.

Stimmt mit Ausnahme der Grösse vollständig mit den Originalexemplaren KUNTH'S, welche unter dem Namen *Xyris Willdenowii* n. sp. in herb. Berol. sich finden, überein. Diese sind nicht über 13 cm. lang.

β minima (STEUD).

Xyris minima STEUDEL, Synopsis Plant. glum. pag. 288.

Differt ab *α spicis* brevioribus; *bracteis* obtusioribus apice

non vel vix recurvatis; *area* dorsali minus distincta; *sepalis* lateralibus lanceolato-spathulatis.

Hab. Africa occidentalis, Crawford, Insula Loss. (JARDIN, B. 120 in herb. Holm.)

Die obige Pflanze stimmt nicht völlig mit der Beschreibung STEUDEL's überein, in dem STEUDEL »vaginis foliolo nunc setaceo nunc planiusculo (3—5 lineali) terminatis», angiebt. Die Bestimmung ist folglich nicht völlig sicher. Da aber die übrigen Karaktere übereinstimmen und auch die Heimath dieselbe ist, scheint mir die Identifizierung kaum gewagt.

Xyris platycaulis POIR.

In Encycl. met. Bot. T. 8. pag. 820 (1808).

Hab. Senegal (PERROTET 809 in herb. Holm.) Africa occidentalis Crawford. Insula Loss (JARDIN in herb. Holm.) Sierra Leona (AFZELIUS in herb. Holm.)

Bisher nur Zanzibar, Madagascar und Mauritius bekannt.

Xyris straminea ALB. NILSS. nov. spec.

Folia plana, linearia, acuta, apice obliqua, 10 cm. longa, $1\frac{1}{2}$ mm. lata, glabra, rugulosa, membranacea, $\frac{1}{2}$—$\frac{1}{3}$ complicata, margine complicationis tenui hyalino-membranacea; *scapi* filiformes, angulati, glabri, plus minus rugulosi ad 30 cm. longi, basi vagina aphylla in apice excurrente 5—6 cm. longa instructi; *spicæ* juniores ellipticæ, dein obovatæ vel subturbinatæ, paucifloræ, 5—6 mm. longæ, 2—4 mm. latæ, bracteis stramineis, concoloribus, subcoriaceis, ellipticis, interioribus acutis, 5—6 mm. longis, margine integris; *sepala* lateralia æquilateralia, lanceolata, carinata, carina haud alata, vix 4 mm. longa; *capsula* obovata 3 mm. longa, placentis 3 lateralibus; *semina* late ovata, utrinque acuto-umbonata, læte fusca, lævia.

Hab. Nupe (BAIKIES Niger Expedition 1857—59 colleg. BARTER N:o 764 in herb. Holm., Berol. & Monac.)

Xyris capensis THUNB.

Prodr. plant. cap. pag. 12 (1794) char. emend.

Folia plana, linearia, apice obliqua, membranacea, glabra, 16 cm. longa vel longiora, $1\frac{1}{2}$—$2\frac{1}{2}$ mm. lata, basi complicata; *scapus* angulatus 2 lineis magis eminentibus, glaber, 16—30 cm. longus basi vagina aphylla 8—12 cm. longa instructus; *spica* junior oblonga, demum globosa vel subglobosa, 6 mm. longa 8 mm. lata, bracteis oblongis vel late oblongis, concoloribus, læte fuscis, nitidis, subcoriaceis, margine integris; *sepala* lateralia æquilateralia, lanceolata, carinata, carina inferne alata, ala glabra, 6 mm. longa. Cetera ignota.

Hab. »in locis arenoso-lapidosis humidis in catarracta prope Zulbugh (in herb. Holm.) Feuchte Stellen an einem Bache der nördlichen Seite des Tafelberges (MACOZ 29 in herb. Holm.) Cap der guten Hoffnung (GRÖNDAHL in herb. Holm.)

Der kurzen Beschreibung THUNBERG'S zufolge sind die Bestimmungen dieser Art der früheren Auctoren unsicher und folglich auch die Angaben, die über ihre Verbreitung in der Literatur sich finden. Die Originale THUNBERG'S in herb. Ups. sind ziemlich unvollständig, was auch die übrigen Materialien, die mir zu Verfügung gestanden haben, gilt. Es war mir darum nicht möglich, der obigen Beschreibung die erwünschte Vollständigkeit geben zu können.

β semifuscata (BOJER).

X. semifuscata BOJER apud BAKER in Journal of the Linnean Society vol. 20 (1884) pag. 277.

f. spica læte fusca, scapus vagina aphylla 9—15 cm. longa; folia 16 cm. longa.

Cap der guten Hoffnung (WAHLBEG in herb. Holm.) Exemplare von BOJER aus Madagascar in herb. Monac. sind durch »vagina aphylla 6—8 cm. longa, folia 6—11 cm. longa, $\frac{1}{2}$—1 mm. lata» ausgezeichnet.

Da *Xyris semifuscata* BOJER nur durch schmälere Blätter und etwas schärfer abgesetzte Blattscheide von *Xyris capensis* sich unterscheidet, während die Aehren, in sofern sie bekannt sind, völlig übereinstimmen ist sie hier als eine Form von *Xyris capensis* aufgenommen.

Die Asiatischen Arten *Xyris schoenoides* MART. und *nilagirensis* STEUDEL sind ebenfalls nicht durch Karaktere von *Xyris capensis* zu trennen und darum als Formen dieser Art zu halten. Die geringen Merkmale durch welche diese Formen sowohl unter einander als von der Hauptform der capensis in den meisten Fällen unterschieden werden können, gehen aus folgender Uebersicht hervor.

X. capensis α	δ nilagirensis	γ schoenoides
planta gracilior,	planta robustior,	planta robustior,
bracteæ nitidæ, tenuiores,	bracteæ nitidæ, carinatæ qua re magis acutæ videntur,	bracteæ vix nitidæ, minus carinatæ qua re magis obtusæ videntur,
sepala lateralia acuta.	sepala lateralia sæpius acuta.	sepala lateralia sæpius obtusa.

Unter x *nilagirensis*, die eine weite Verbreitung in Vordere Indien zu haben scheint, ist eine von Prof. D:r ENGLER aus Abessinien mitgetheilte Form zu bringen.

Xyris Hildebrandtii ALB. NILSS. n. sp.

Folia linearia, plana, rigida, nervoso-striata, acuta, glabra 12—20 cm. longa, 2—3 mm. lata, basi 3—4 cm. complicata interdum spiraliter torta; *scapus* striatus, glaber, inferne triqueter superne applanatus uno angulo acuto 25—32 cm. longus basi vagina aphylla acuta dorso carinata 7—10 cm. longa instructus; *spica* (junior) obovata 8—9 mm. longa, 4 mm. lata, bracteis ellipticis, coriaceis, margine integris, læte fuscis, exterioribus concoloribus sæpius apice brevissime mucronulatis, interioribus area tri-

angulari punctata inconspicua notatis; *sepala* lateralia postice ad medium connata, linearia, carinata, carina alata, ala superne lacerato-fimbriata; cetera ignota.

Hab. Central-Madagascar, Ost-Imerina Andrangoloaka im Sumpf. (J. M. HILDEBRANDT nov. 1880 in herb. Monachense).

Xyris nitida ALB. NILSS. n. sp.

Folia plana, anguste linearia, rigida, nervoso-striata, acuta, spiraliter torta, 16—26 cm. longa, 1 $^1/_2$—2 mm. lata, basi circiter 5 cm. complicata ibique læte castanea, nitida; *scapus* striatus, glaber, præsertim inferne triqueter parum applanatus angulo acuto, 40—45 cm. longus basi vagina aphylla acuta dorso carinata inferne læte castanea 10—12 cm. longa instructus; *spica* obovata, 10 mm. longa, 6 mm. lata, bracteis inferioribus minoribus obovatis vel ellipticis, coriaceis, læte fuscis, omnibus concoloribus vel interioribus area minuta oblonga inconspicua instructis margine integris ciliolatis, mediis 5 mm. longis, 3$^1/_2$ mm. latis; *sepala* lateralia oblonga, curvata, 4 mm. longa æquilateralia carinata, carina vix vel anguste alata lacerato-fimbriata; flores generis, staminodiis penicillatis.

Hab. West. Trop. Africa (Coll. G. MANN 1858 in herb. Berol.)

Diese und die vorhergehende sind nahe verwandte Arten, die der Asiatischen *Xyris Walkeri* Wight am nächsten stehen. Nebst *Xyris congensis* BÜTTNER, die mir nur durch die ausführliche Beschreibung BÜTTNERS in Verhandl. des bot. Vereins d. Prov. Hamburg Jahrg. 31 p. 71 (1890) bekannt ist, bilden diese Arten eine kleine Gruppe die durch »sepala lateralia obtusa, ala hispidulo-spinulosa, scapus applanato-triqueter, folia acuta, rigida, nervoso-striata» von den übrigen Afrikanischen und Asiatischen Arten verschieden sind.

Xyris Bakeri nov. nom.

Descr. Xyris capensis THUNB.? apud BAKER in Journ. of Linn. Soc. vol. 20 p. 276.

Hab. Central-Madagascar Parker Baron 568, 1025. (sec. Baker.)

Diese Art ist mir nur durch die Beschreibung BAKERS bekannt, scheint den vorhergehenden Arten nächst stehen und besonders durch »bracteis orbicularibus, rigidulis, castaneis» ausgezeichnet zu sein.

Xyris insularis STEUD. Plant. Glum. II p. 288, ebenfalls aus Madagascar, ist wohl auch den obigen Arten nahe stehend.

Xyris natalensis ALB. NILSS. n. sp.

Folia teretiuscula, acuta, glabra, vagina bene distincta inferne læte castanea, 40—50 cm. longa vel longiora, vagina 5—8 cm. longa; *scapus* inferne triqueter, superne teres glaber circiter 50 cm. longus basi vagina aphylla acuta inferne læte castanea 6—12 c.m. longa instructus; *spica* late ovata vel oblonga 11 mm. longa 7—8 mm. lata bracteis coriaceis, margine integris, exterioribus sterilibus, ovatis, mucronulatis, glabris, concoloribus, læte fuscis, nitidulis, interioribus fertilibus ellipticis, obtusis, superne punctatis, opacis; *sepala* lateralia oblonga, curvata, æquilateralia, mm. longa, carinata, carina late alata, ala punctata, hispidulo-spinulosa.

Hab. Natal (J. SANDERSON 1860 N:o 456 in herb. Holm.), Caput Bonæ spei (WAHLBERG in herb. Holm.), in locis humidis planitici prope Natal-Bay (KRAUSS nov. 1839 in herb. Monach.)

Durch die fast stielrunden Blätter steht diese einzeln unter den Afrikanischen und Asiatischen Arten und nähert sich in dieser Beziehung mehr gewissen Australischen.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts. fr. sid. 148.)

VINCI, S., Della natura della luce . . . Catania 1890. 4:o.
WARMING, E., Grönlands Natur og Historie. Kjöb. 1891. 8:o.
WOODWARD, A. S. & SHERBORN, C. D., Catalogue of British fossil vertebrata: Supplement for 1890. London 1891. 8:o.
ZENGER, C. V., La périodicité des perturbations magnétiques et la période solaire. Paris 1887. 4:o.
— Småskrifter. 5 häften. 4:o.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1891. N:o 3.
Stockholm.

Iakttagelser rörande ephippierna eller vinteräggskapslarne hos små-kräftarten *Daphnia pulex*.

Af G. C. Cederström.

[Meddeladt den 11 Mars 1891 genom F. A. Smitt.]

Under forskningar rörande denna Daphnia-arts lefnadsförhållanden har det lyckats mig att i mikroskopet få åse dels början till omdaningarne i matrix i och för ephippiets utbildning, dels ock hur ephippiet afskiljes från djuret.

Ungefär samtidigt med att vinteräggämnet med sin mörkfärgade triangelformade cell börjar visa sig i äggsäckarne, börjar också inre väggen eller hinnan i matrix att undergå förändringar. Än ses der sprickor, än klara fläckar, än små nedhängande hinnflikar, men detta varar blott en kort stund, hvarefter de matrix omslutande skalväggarne först synas något klarare än förut men snart fördunklas, blifva ogenomskinliga liksom till hälften koagulerade och utsvälla med nyutbildade celler, till den grad att öfverhuden omkring matrix spränges eller lyftes från sköldskalens öfverhud med hvilken den förut varit intimt förenad; och i den nära halfcirkelformade remna eller öppning, som derigenom uppkommer mellan sköldskalen, framväller från de inre skaldelarne (corion) ett ljusfärgadt slemlikt ämne som der aflagras i form af ett bräm, hvilket bräm, sedan ephippiet afskiljts från djuret, fortfarande omgifver ephippiet. Hela hudlagret under den öfra, från sköldskalens epidermis sprängda eller upplyfta epidermis-andelen börjar småningom allt mer och mer mörkna och antar slutligen en nästan svart färg. Under tiden utbildas inom de båda inre sidorna af detta hudlager, som takformigt omsluter matrixrummet,

tvenne ovala urholkningar eller s. k. lober, i hvilka det från äggsäckarne ditgjutna vinterämnet småningom inrymmes. Detta ämne, som, medan det omslutes af äggstockarne, synes vara mörkfärgadt eller nästan svart, afskiljer, sedan det inkommit i loberna, det svartfärgade innehållet från sig, aflagrar detsamma på lobernas insidor, omgifver sig der sedermera med ett kompakt structurlöst skal, och på det sättet utbildadt till ägg, framvisar det numer ett ljusbrunt harzlikt innehåll.

Medan dessa förändringar försiggå, kunna de båda takformigt hopfogade hudlagren, som omgifva matrixrummet och omsluta främre öfre delarne af djurets bakkropp, både hvad angår form och läge anses vara lyckligt betecknade med namnet ephippie eller sadel. Jemte den ofvan omförmälda uppgiften att emottaga och forma vinteräggämnet har ephippiet i detta tillstånd tillika en annan ganska vigtig uppgift, nemligen den, att skyla, kanske ock att lemna bidrag och medverka till utbildningen af en ny matrix; men när denna förrättning är fullbordad och då ephippiet sedermera afskiljes från djuret, sammansluta sig och hopklibbas detsammas båda sidor eller blad, så att det s. k. ephippiet sedermera till formen mer liknar en hopfallen portmonnä än en sadel. Rätta anledningen till ifrågavarande sammanslutning kan numera lätt inses, då man vet, att i de inre delarne af ephippiet finnes aflagradt ett från äggsäckarne ditgjutet kitt-artadt ämne, emedan beskaffenheten af nyss omnämnda företeelse otvetydigt synts mig ådagalägga, att detta kitt måste hafva varit elastiskt och klibbande, och i följd deraf torde ock kunna slutas, till hvilken klass af kemiska ämnen det bör hänföras, nemligen under 3:dje gruppen kolhydrater betecknad med formeln $C^6 H^5 O^5$ eller med multipler deraf.

Forskningen rörande förloppet vid ephippiernas tilldaning är mycket försvårad derigenom att de här förut omnämnda förändringarne af den inre hinnan i matrix mycket lätt kunna förbises, innan man om dem blifvit underrättad, emedan de pågå vanligen blott en kort stund och hinnan är mycket tunn samt också till en viss grad skymd af de ofvanliggande hudlagren, hvartill

kommer, att vinteräggämnet i ovariet ibland snart förändras och försvinner, i hvilket fall det icke är säkert att de nämnda företeelserna i hinnan tydligt utbildas. Det var endast en lycklig tillfällighet, att jag fick sigte på en liten flik af hinnan som visade sig i matrix, hvarigenom min uppmärksamhet på förhållandet framkallades.

Uti Beiträge zur Naturgeschichte der Daphnoiden pag. 148 anför professor Weissman omständigheter, som antyda, att matrix skulle vara fylld af en vätska, som ej är bara vatten utan som i sin osmotiska verkan på tunna hinnor förhåller sig annorlunda. Någon dylik vätskas närvaro har jag icke iakttagit, men mig har det förefallit, att meranämnda hinnas osmotiska egenskaper föranledt densammas sönderfallande genom utdunstningen och utgjutningarne från äggsäckarne, då vinteräggämnet börjar deri utbildas och utgjutningen från äggsäckarne har redan länge varit tillräckligt bekräftad både genom Jurines och Bairds iakttagelser.

Då jag förlidet år började forska i denna riktning, vidtog jag dervid åtgärden att granska ephippie-bärande Daphnier, isolera dem och sedan ephippiet var afskiljdt ånyo granska både djuren och de afkastade skalen.

I de afkastade skalen igenfinnas vanligtvis alltid djurets alla ytterst finbildade lemmar och öfriga skalbetäckning med undantag af de partier som utgöra ephippiet. Det är således giltig anledning antaga, att den felande andelen blifvit på något sätt borttröjd vid eller före skalömsningen; och i allmänhet antages också, att ephippiet afskiljes från djuren vid skalömsningen, hvilken dock kanske för ifrågavarande fall borde benämnas skalafskiljandet, men det dröjde icke länge vid mina omförmälda förehafvanden, förr än en af de ephippiebärande Daphnierna, innan sköldskalen afskiljts, lemnat sitt ephippie; och då hon granskades, befans den gamla öfverhuden till matrix hänga qvar å djuret likt ett till hälften öppnadt lock öfver dess med nytt skal utrustade matrix, hvilket lock var fästadt vid sköldskalens öfre bakre hörndelar nära intill det nyutbildade sprötet. Några dagar derefter träffade jag ett afskildt skalskelett, vid hvilket

ett dylikt öfverhudslock, då något anfrätt, ännu hängde qvar också det fästadt vid sköldskalens bakre vinklar. Då jag sedermera varseblef en Daphnia, som bar sitt ephippie mer än vanligt högt upplyftadt och ämnade deröfver uppgöra en teckning samt i sådant afseende lade djuret på en glasskifva under mikroskopet sågs snart den nydanade matrixhuden glida fram till ungefär halfva sin längd under ephippiebladen, hvarvid ephippiets undre bräddar vredos så, att då ephippiet förut haft ett horizontelt läge mot djurets kropp höjdes nu dess bakre delar och sänktes dess främre, så att ephippiets öfre brädd bildade en trubbig vinkel mot det framglidande nya matrixskalet, hvarefter djuret tog ett skutt och det gamla skalskelettet samt det derifrån lösgjorda ephippiet och detsammas fordna epidermis lågo bakom det. Ephippiets bakre undre bräddar hade nu således först släppt sina fästen vid djurets sköldskal eller kropp, men derunder qvarhållits af någon sorts häfta mellan ephippiets främre delar och der bakom varande partier af sköldskalen. Äfven dessa företeelser ådagalägga, att det i ephippiet befintliga ämnet måste vara elastiskt och klibbande och att det vid nu omnämda fall varit något segare vid den framtill belägna delen deraf; och i allmänhet torde af hvad här angifvits framgå, att ephippiets afskiljande från djuret icke alltid försiggår på ett och samma sätt. Än afskiljes det före skalafkastningen, sedan den täckande öfverhudshinnan lossnat, än lösgöres det vid skalafkastandet, då ibland ännu betäckt af den gamla öfverhudshinnan, ibland åter, sedan denna blifvit i mer eller mindre mån ansväld och förstäld.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1891. N:o 3.
Stockholm.

Observationes mycologicæ. I.

De genere Russula.

Auctore L. ROMELL.

[Meddeladt den 11 Mars 1891 genom V. B. WITTROCK.]

Præfatio.

ELIAM FRIES, restauratorem illum, ne dicam conditorem, mycologiæ peritissimum et ingeniosissimum, Russulis, saltem per postremos annos vitæ, operam dedisse multo minorem quam ceteris Hymenomycetum generibus, me docuit Doctor ROBERT FRIES, filius ejus clarissimus. Ex eo factum est, ut illud genus in ultimis operibus Friesii, v. c. Monographia Hymenomycetum et Hymenomycetibus Europæis, minore verisimiliter diligentia et subtilitate quam plurima alia tractatum sit. Quod quidem mihi videor invenisse. Hæc opinio præterea ex eo affirmatur, quod nonnullas species hujus generis diversi mycologi diverse interpretantur. Quæ perturbatio non solum apud externos regnat, sed etiam inter Friesii ipsius collaboratores vel discipulos. Inter has ita vexatas species sunt R. heterophylla, R. æruginea, R. vesca, R. ochroleuca, R. rubra, R. sanguinea, R. sardonia, R. xerampelina.

Ut, si possem, in hac confusione aliquid certi assequerer, sumtibus Regiæ Societatis Scientiarum et Litterarum Gothoburgensis et Regiæ Academiæ Scientiarum Holmiensis autumnum anni 1890 degi in agro Femsjönensi et Lundensi, ubi ELIAS FRIES plurimas fungorum species iterum iterumque vidit, legit, descripsit multasque pingendas curavit. Hic Russulas omnes obvias (nulla tamen mycologiæ parte neglecta) diligenter observabam, confere-

bam plurimasque pingebam. Sed omnium consensu annus ad studia mycologica aptus non fuit. Vix duas species criticas Russularum mihi licuit absolvere. Plurimæ quætiones adhuc restant. Inutile tamen non existimo esse observationes paucas jam factas publicare.

Color sporarum.

Sporæ Russularum formâ, magnitudine, naturâ superficiei parum variant. Etiam cystides et basidia magis uniformia esse videntur, quam quæ ut characteres in speciebus determinandis adhiberi possint. Ad hanc rem color autem sporarum, qui magis varius est, sæpe multum affert adjumenti. Cuique fere speciei suus est color sporarum, et hic constantissimus. Sed inter omnes has varietates coloris tres classes distingui possunt: 1) sporæ albæ, 2) sporæ ochroleucæ, 3) sporæ ochraceæ.[1] De maturis scilicet sporis loquor. Harum color semper est investigandus. Sæpe is colore lamellarum speciminum exoletorum indicatur. Sed tutissime observatur, quum sporæ in substrato aliquo copiose sunt elapsæ et conglomeratæ. Methodum sporas in charta colligendi et solutione resinæ affigendi Herpellianum[2] valde commendo. Sed charta alba semper est utenda et stratum sporarum, præsertim pallidarum, sat crassum esse debet, quod sæpe non fit prius quam post 40—50 horas.

Sapor.

Sapor quoque in Russulis maximi est momenti, quare semper est observandus et notandus. Tamen non solum pileum vel stipitem, sed etiam lamellas gustatu explorari necesse est. Nam interdum hæ acres, illi submites sunt, ut in Russula delica. Præterea sapor acris, amarus etc. non semper statim, sed interdum post tempus sentitur. Hinc forte desperatio Friesii in Obs. myc. I

---

[1]) Schroeter in Kryptogamen- Flora v. Schlesien, Pilze (1889) p. 550 species ochrosporas duxit ad genus proprium, »Russulina» dictum, quod nomen de cetero etiam apud Karsten in Krit. Öfversigt p. 125 occurrit.

[2]) Herpell, G.: Präpariren u. Einlegen der Hutpilze. Bonn, 1880.

p. 69: »Nulli enim omnino dantur varietatum limites. Et sapor, quod jam Persoon aliique annotaverunt, maxime in iisdem formis ludit.» Cui sententiæ assentiri non possum. Constantissimum enim inveni saporem in omnibus formis, quas alioquin tute determinare mihi licuit. Tantum in protea et verisimiliter collectiva Russula integra formas contra normam acres aliquoties observavi, sed suspicor has formas ad proprias species rectius pertinere.

Ordinem, in quem species a FRIES in Hym. Eur. redactæ sunt, multis de causis in præsenti servavi, quamquam una alterave species alibi, mea sententia, locanda est. R. lilacea QUÉL., Friesio ignota, post R. depallentem, ut in QUÉL. Flore myc., est posita, sed nec R. æruginosæ PERS. nec R. heterophyllæ FR., inter quas in Fl. myc. ambæ locatæ sunt, neutra mearum est affinis.

Holmiæ [Stockholm, Karlavägen 28] $^2/_3$ 1891.

LARS ROMELL.

Russula PERS.

R. nigricans BULL.

KRAPF I. t. 11 f. 4—7. BARLA t. 17. COOK. t. 1015.

Lamellæ ad stipitem circa 70, ad marginem circa 200. Caro secta post 1—5 min. pulchre lateritio-rubescit.

Hæc species in Suecia meridionali sat frequens, septentrionem versus rarescit.

R. adusta FR.

Syn.: *R. densifolia* GILL. t. 173 et COOK. t. 1017, vix t. 1051. — *R. adusta* PERS. ad priorem tantum spectare videtur.

Lamellæ ad stipitem circa 100, ad marginem circa 300. Caro secta post tempus leviter rosea, non intense incarnata ut in priori.

In Suecia media sat frequens.

R. albo-nigra
R. semicrema } Has species non vidi.

R. delica FR.

COOK. t. 1068. GILL. t. 174.

Sapor lamellarum acris, pilei stipitisque submitis. Lamellæ præsertim circa stipitem in ærugineum vel glaucum leviter vergunt fere ut in *Ag. chloroide* KROMBH. t. 56 f. 8, 9, qui a QUELÉT huc ducitur.

R. elephantina
R. mustelina } Hæ sunt mihi ignotæ.

R. olivascens FR.

Icon. t. 172 f. 2. COOK. t. 1035; t. 1044 (R. heterophylla) forte status junior.

Ad hanc speciem forte ducenda forma, quam in silva abiegna fagis intersparsa in monte Omberg Ostrogothiæ ($^{20}/_{7}$ 1889) parce legi. Figuris citatis non erat dissimilis, sed discus pilei fere saturatius coloratus quam margo; ergo dubia et cum *R. integra* vel *R. alutacea* potius forte comparanda.

R. furcata LAM.

Hæc species, mihi nondum obvia, in Suecia verisimiliter est rarissima, si omnino exstat. Forma exoleta *R. virescentis* KROMBH. pro hac interdum forte habetur; nam figuræ simillimæ et sapor a quibusdam mycologis, v. c. HARZER p. 98, mitis vel haud notandus describitur. — BULL. t. 26 (A. *bifidus*), quæ a FRIES huc citatur, potius ad *R. æruginosam* PERS. videtur referenda, ut vult QUÉLET, Flore myc. p. 348.

R. sanguinea BULL.

Haud satis scio, quamnam formam FRIES hoc nomine spectet. Figura in musæo Holmiensi deposita nullam mihi obviam bene refert. BULL. t. 42 cum *R. rubra* Fr. Sv. ätl. sv. t. 49 sat congruere videtur. Cfr sub. *R. sardonia* et *R. rubra*.

R. rosacea BULL.

Hanc speciem pluries legi, sed non nuper, quare in præsenti mihi haud licet dijudicare, quomodo ad affines se habeat.

R. sardonia FR.

Hæc species sec. Monogr. II p. 189 a FRIES tantum ad Femsjö Smolandiæ lecta. Et figura in musæo Holmiensi deposita (»varietas») cum forma a me »juxta vias in pinetis» ad Femsjö frequenter observata optime convenit. Sed hæc statum juniorem vel ægrum *R. rubræ* FR. Sv. ätl. sv. t. 49 sistere mihi videtur. SCHÆFF. t. 16. f. 5, 6 non abhorret, sed KROMBH. t. 68. f. 1—4 ob saporem mitem etc. hujus loci esse non potest. — R. *sardonia* BRES. t. 94 et imprimis COOK. t. 1037 longe diversæ.

Formam Femsjönensem hoc loco describam.

Stipes subæqualis vel sæpius sursum, raro deorsum leviter attenuatus, primo valde durus, interdum rima longitudinali ruptus (quod præcipue in hac et æque dura R. vesca, rarius tantum in R. heterophylla observavi), adultus vero hinc inde mollior et demum totus spongiosus, semper lævis, interdum albus, sæpissime autem primo plus minus lilacinus vel violaceo-rubellus, deinde dilute purpurascens, 1—2 cm. crassus, 2—5 cm. altus. *Pileus* primo semper convexus, interdum fere umbonatus, exoletus planiusculus et demum nonnihil concavus, lævis vel exoletus levissime rugulosus, glaber, subsiccus, margine lævi, subpruinato, interdum viscidulo, 3—8 cm. et ultra latus. Quoad colorem vulgo sordide purpureus vel cruentus, etiam fere badius vel atropurpureus lectus, junior non raro, præsertim margine vel zona circa discum, sordide virescens vel interdum lutescens, immo fere totus viridiluteus vel pallidus, sed tum purpureo- vel atroviolaceo- maculatus vel zonatus. In adulto colorem luteum vel virescentem rarissime, in exoleto numquam observavi; verisimile ergo videtur hunc colorem junioris sensim in sordide sanguineum mutari. Vetustus plus minus decolor fit et hinc sæpe maculatus. *Lamellæ* primo sat angustæ, antice et adultæ

latiores, circa stipitem adnatæ et interdum furcatæ, sat crebræ, juniores nunc fere albæ vel albidæ et siccæ, nunc fere sulphureæ vel sulphureo-maculatæ et quasi morbose plorantes, adultæ albidæ, exoletæ pallidæ. *Caro* pilei stipitisque primo compacta, durissima et, præsertim exsiccata, nonnihil sulphurea, sub cute pilei rubroviolacea, sensim autem mollior et albidior, demum omnino spongiosa et fere alba. *Sapor* valde acris et urens. *Sporæ* cremeæ v. ochroleucæ (SACC. Chrom. n:is 27, 28), 8—10 × 7—7$^1/_2$ mmm. Basidia clavata, 4-spora, 30—45 × 9 mmm. Cystidia numerosa, granulis repleta, sursum fere subulato-acuta vel obtusiuscula, 60—75 × 9—10 mmm.

Hanc speciem pluribus locis, v. c. ad Holmiam, in monte Omberg et ad Gothoburgum parcius legeram, priusquam eam ad Femsjö vidi. Sed consistentiam junioris compactam etc. non observaveram, quare primo statum juniorem Femsjönensem ut propriam speciem habui, donec in loco subhumido inter lacus Stensjön et Metsjön juxta viam inter Femsjö et Elmhult formam exacte intermediam inveni. Quæ formam Holmiensem statim in memoriam revocavit et stipes ejusdem speciminis uno latere durus, altero mollis (non tamen a larvis destructus) erat. Deinde observavi, consistentiam e loco natali multum pendere: in regionibus siccis fungus compactior, in humidis mollior fit. Formam ad Bygget Hallandiæ in prato humido graminoso et muscoso juxta rivulum inter Betulam, Alnum, Juniperum lectam longius tamen, ob consistentiam mollissimam et fragilem, colorem pilei demum sordide albidum et lamellas dente decurrentes, distinctam retinui[1]). Sed prope oppidum Halmstad inter campum Skedalahed et fluvium Nissan sub Pinis hanc formam cum vulgatiori supra descripta et hic copiosissima (status adultus et exoletus) tam mixtam ($^3/_{10}$ 1890) inveni, ut de identitate vix dubitare possem.

---

[1]) Ob substantiam demum mollissimam atque fragilem et saporem acrem hanc formam, etiam ad Holmiam etc. obviam, olim pro varietate Russulæ fragilis habui, sed sporis coloratis etc. certissime est diversa.

Mense octobri 1890 etiam ad Lund (versus Sliparmöllan), ad viam inter Holmeja et Eksholm et, ni fallit memoria, ad Alnarp Scaniæ inter abietes cultas hanc speciem legi, sed tantum statum exoletum, statura sæpe minori, pileo plus minus obconico, angulo usque ad 110°, et nonnihil concavo, unà cum stipite obscure et sordide sanguineo, hinc inde decolore.

SCHÆFF t. 15. f. 5, 6 et t. 16. f. 5, 6 statum juniorem, t. 15. f. 2 statum senilem non male exprimit. HARZ. t. 26 et t. 59 historiam evolutionis exponit, sed color plurimarum figurarum nimis lætus, ceterum ob saporem debilem v. mitem vix hujus loci. KRAPF I. t. 2. f. 5, 7 huc forte pertinet. *R. rubra* FR. Sv. ätl. sv. t. 49 sine dubio hujus statum adultum vel exoletum sistit. (Maculas rubellas ad apicem stipitis non quidem vidi, sed hæ probabiliter atypicæ). Dicitur l. c. vulgaris ad Femsjö Smolandiæ, quod in hanc speciem optime, in R. rubram veram (vide infra) minime quadrat. Etiam *R. drimeia* COOK. t. 1023 forte huc trahenda, sed lamellæ nimis flavæ. Cfr quoque *R. expallentem* GILL. t. 195. COOK. t. 1029.

Ad *R. sanguineam* BULL. potissimum trahenda species, sed omnes hæ formæ ulteriori examini diversis locis subjiciendæ. Nam sententia mea in observationibus unius fere tantum autumni nititur.

R. depallens FR.

Duobus locis in fageto prope Bökebergsslätt Scaniæ parcius legi formam, quæ cum COOK. t. 1021 multa communia habere videtur, sed pileus in meis speciminibus depallens non erat.

Stipes albus, demum cinerascens $3^1/_2$—$5 \times 1^1/_2$—$2^1/_2$ cm. Pileus ex hemisphærico vel convexo plus minus depressus, 6—7 cm. latus, atropurpureus, unicolor. Lamellæ sat angustæ vel mediocriter (5—7 mm.) latæ, circa stipitem leviter rotundatæ, semper albæ. Sporæ albæ. Caro alba, demum cinerascens. Sapor mitis.

A *R. depallente* FR. in musæo Holmiensi depicta mea videtur toto coelo diversa, sed quum adhuc parce tantum legerim, eam in præsenti separare non volo, præsertim quum nondum

cognoverim R. depallentem veram, quæ ex Prof. H. VON POST (in litt.) est affinis *R. rubræ* FR.

R. lilacea QUÉL.

Duobus tantum locis in silva acifolia ad Femsjö Smolandiæ parce legi formam huc forte trahendam, licet tam a descriptione QUÉLETII (Fl. myc. p. 348) quam a fig. COOKEI (t. 1054) multum recedit.

Stipes farctus et demum cavernosus, lævis, totus albus. Pileus subsiccus, hic illic leviter granulato-atomatus. Color pilei fere idem ac in *R. purpurea* GILL. t. 186, COOK. t. 1022 sed expallens, dilute violaceus. Lamellæ, sporæ et caro pure albæ. Sapor mitis. Sporæ 9—10 × 8 mmm.

Primo aspectu pro R. fragilis var. lilacea sumsi.

R. cærulea PERS.

Huic forte pertinent duo specimina exoleta et a larvis destructa, quæ sub Betulis ad viam inter Bellmansro et Rosendal in Djurgården ad Holmiam ($^{21}/_{8}$ 1888) inveni. — KROMBH. t. 64 f. 10, 11 et t. 68. f. 5—8 non obstant, sed mea forma erat major, lamellis vitellinis, stipite pure albo, 2—3 cm. crasso, et ad *Russ. alutaceam* prope accedere mihi visa est.

R. lactea PERS.

Hæc pulchra species tantum in silvaticis ad Ronneby Blekingiæ (mens. Aug. 1887), sed heic sat copiose mihi obvia.

Mea forma habuit carnem pilei sursum subsulphuream, ceterum cum fig. COOK. t. 1070 et 1071 sat congrua et inter duas quasi media, ut *Russ. incarnatam* QUÉL. vix pro diversa specie habere possim.

R. æruginosa PERS.

Obs. myc. 1 p. 103 et Comment. ad SCHÆFF. p. 37. KROMBH. t. 67. f. 1—10. *R. virescens* SCHÆFF. t. 94. f. 2—5 (non bona). PERS. Syn. p. 447. FR. Epicr. etc. VITT. t. 31 (omnium optima). GILL. t. 175. COOK. t. 1039.

Nomen SCHÆFFERI, »virescens», multis de causis mutandum:

1) duas species complectitur, nempe, ut videtur, R. virescentem (vel viridescentem) KROMBH. t. 67. f. 12—15 et R. æruginosam KROMBH. t. 67. f. 1—10;

2) in hanc male, in illam optime quadrat;

3) si non mutaretur, necesse esset novum nomen pro R. *virescente* KROMBH. facere [nomina »virescens» et »viridescens» nimis consona], sed tum altera species nomen retineret pravum, altera optimum amitteret.

Stipes impolitus, (sub lente) quasi flocculoso- vel farinoso-punctatus. Pileus primo cute vel crusta æruginea, punctato-farinacea obductus. Hæc crusta sensim in verrucas vel areolas solvitur, fere ut in Amanita, tum pileus in fundo albido æruginneo-maculatus vel verrucosus; demum fere totus denudatus et decolor (albidus).

Hanc prædistinctam speciem tantum in Oelandia (mens. Jul. 1887, parce), ad Ronneby (mense Aug. 1887, sat copiose) et ad Gothoburgum (mens. Aug. 1889) legi.

R. lepida FR.

GILL. t. 176. COOK. t. 1072. *R. rosea* QUÉL. Fl. myc. p. 349.

Stipes farctus, extus (sub lente) quasi reticulato- vel punctato-flocculosus, pure albus vel interdum ad basim leviter rubellus. Pileus siccus, hinc inde atomatus, pellicula tamen non raro separabili, amoene roseus v. incarnato-roseus mox plus minus, præcipue disco, pallescens vel albicans. Lamellæ albæ, circa stipitem plus minus rotundatæ, hic illic (oblique) furcatæ, interdum margine serratæ. Sporæ albæ. Caro alba, minus compacta quam sequentis. Sapor semper mitis.

FR. Sv. ätl. sv. t. 59 vix huc citanda, nam lamellæ coloratæ. KRAPF I. t. 1. f. 2, 3 (5, 7) et t. 3. f. 4 videntur hujus loci. COOK. t. 1072 sine dubio huc referenda, sed figura media sinistra, pilei cute areolato-diffracta, omnino atypica.

Hanc pulchram speciem tantum in fagetis Sueciæ meridionalis [ad Femsjö Smolandiæ, ad Bökebergsslätt Scaniæ et ad Ronneby Blekingiæ] legi.

R. rubra DE CAND.

Syn.: *Ag. sanguineus* VITT. t. 38. *R. lepida* QUÉL. Fl. myc. p. 350.

A *R. lepida*, cui valde affinis, substantia compactiore, superficie sicciore et plus velutino-farinoso, colore pilei vulgo obscure et pulcherrime miniato-cinnabarino vel sanguineo, et præsertim sapore e miti *nauseoso vel acerbo* (non tamen acri), nec non loco natali distincta. Interdum discus albicat et ob consistentiam duram rimosus fit. Lamellæ sæpe rubromarginatæ.

Hanc omnium Russularum pulcherrimam tantum circa Holmiam et Gothoburgum (ad Jonsered copiosissime) et semper sub vel prope Quercus legi. Ad Femsjö Smolandiæ frusta quæsivi.

Ag. sanguineus VITT. t. 38 meam optime refert. Descriptio etiam absolute quadrat, excepto hoc: »sapor nauseosus, subacris, amarus», quod aliquantulum a mea differt. KROMBH. t. 65 f. 15 etiam valde similis. Descriptio saporis: »acri, nauseoso, fere caustico», recedit quidem, sed hoc est forte minoris momenti, quum attineat totam tab. 65, quæ diversas species continere videtur. Etiam SCHÆFF. t. 15 f. 4 et KRAPF I. t. 1 f. 4 videntur hujus loci. COOK. t. 1025 et 1087 mihi dubiæ (tam atratam non vidi). FR. Sv. ätl. sv. t. 49 ad hanc minime pertinet (vide sub R. sardonia).

Descriptio Friesii integra in nullam mihi cognitam bene quadrat, sed partim [præcipue: »pileo sicco» . . . »in silvis frondosis» . . . »carne subgrumosa» . . . »colorem intense cinnabarino-miniatum» . . . »lamellæ acie sæpe rubræ»] ad hanc, partim [»acris» . . . »pileo polito-lævigato» . . . »lamellæ lutescentes»] ad longe diversam *R. sanguineam* BULL. (Sv. ätl. sv. t. 49) spectare videtur. Sub R. lepida dicitur: »Sequenti (R. rubræ) admodum similis», quod in Sv. ätl. sv. t. 49 omnino non, sed in hanc meam R. rubram optime quadrat.

R. Linnæi Fr.

Icon. t. 172 f. 3. Gill. t. 177. Cook. t. 1026.

Forma in fageto ad Bökebergsslätt Scaniæ lecta ob lamellas sporasque albas vix huc trahenda, licet cum figuris citatis sat bene conveniat. Potius habeatur ut f. incarnato-miniata *R. lepidæ*, a qua recedit lamellis adnatis vel fere dente decurrentibus, stipite sublævi, colorato, pileo vix decolorante. Accedit etiam ad *R. rubram*, sed sapore omnino miti distincta.

R. xerampelina Schæff.

Ind. p. 49, 50, t. 214, 215, verisimiliter etiam 204.

Hæc species hic illic, sed fere tantum in pinetis [ad Femsjö Smolandiæ juxta viam versus Elmhult etc. copiose] mihi obvia.

Etiam in hac est stipes (sub lente) subtiliter quasi reticulato-vel punctato-flocculosus, sed, ut in omnibus, hoc rete facile deteritur. Caro in mea semper alba (non vel vix albo-lutescens) Lamellæ demum intense alutaceæ, fere ut in R. alutacea, lutea etc. Sporæ ochraceæ (Sacc. Chrom. n:o 29).

Forma typica valde distincta, sed tantum variat, ut interdum a formis *R. luteæ* vel *integræ* vix tute dignoscatur. Sæpe altera pars pilei typice sicca et farinosopunctata, altera glabrata et viscida.

R. olivacea Schæff.

Schæff. t. 204 (nisi potius R. xerampelina). Cook. t. 1041.

Hæc species videtur cum priori commixta, sed est omnium ere distinctissima et immo in herbario facile recognita.[1])

Stipes farctus, albus vel plerumque roseolus, *tactu semper olivaceo-lutescens*. Color pilei valde variabilis, nunc pulcherrimus, intense coccineo-sanguineus (Krombh. t. 64. f. 16—18 certe hujus loci), nunc fuscus, nunc fere olivaceus vel sæpius olivaceo-fuscus, olivaceo-ruber, sordide rufus, disco olivaceo-pallescente e. s. p. *Caro* ex alba *semper sordidescens* (non pure lutescens nec

[1]) Specimen a C. Kalchbrenner ad El. Fries sub nomine »*Russula alutacea* Fr.» missum et in herbario Friesii (Upsaliæ) servatum huc, ni fallor, pertinet.

cinerascens). Hæc nota in fungo sicco optima. *Odor peculiaris*, fere nauseosus vel crustacea cocta nonnihil in memoriam revocans. Sporæ pallide ochraceæ.

Sat frequenter occurrit in multis locis Sveciæ mediæ et meridionalis, v. c. circa Holmiam, Gothoburgum, ad Femsjö Smolandiæ, prope Halmstad Hallandiæ, sed ex Scania eam notatam non habeo.

R. rhytipes Secr.

Est mihi omnino ignota.

R. vesca Fr. (?)

Omnium maxime compacta. *Stipes* nunc æqualis, nunc sursum, nunc deorsum nonnihil attenuatus, lævis (non reticulato-rugosus), albus[1]), durissimus, exoletus vix mollior, 2—4 × $1^1/_2$—$2^1/_2$ cm. *Pileus* e hemisphærico plano-concavus, centro ab initio plus minus umbilicato, lævis vel disco leviter subradiato-rugosus, glaber, subsiccus, *epidermide* semper (jam ab initio) *circa marginem* plus minus *retracta*, badio-incarnatus vel fere livido-badius, nunc intensius, nunc pallidius (disco non vel vix obscuriori), demum vulgo expallens vel sordide albicans, 5—10 cm. latus. Lamellæ sat angustæ, albæ, exoletæ hic illic sæpe brunneo-maculatæ vel punctatæ, 5—8 mm. latæ. Sporæ albæ, 7 × 6 mmm. Caro alba, valde dura. Sapor mitis.

Ad Femsjö ($^{25}/_9$ 1890) observavit nonnulla individua cute versus marginem valde diffracta exacte ut in Cook. t. 1024 et 1040, sed in mea hæc facies omnino atypica.

Hanc prædistinctam speciem multis locis in Suecia media et meridionali, v. c. circa Holmiam et Gothoburgum, ad Kalmar, Bolmen, Femsjö Smolandiæ, ad Bygget et Halmstad Hallandiæ, ad Bökebergsslätt Scaniæ, sed numquam copiose legi. Tam in silvis acifoliis (ad Femsjö), quam præcipue frondosis occurrit.

Nullam vidi figuram hanc speciem exacte referentem excepta Friesii in musæo Holmiensi deposita, sed sub hac legitur nomen

[1]) Ex Prof. H. von Post stipite colorato interdum occurrit. Etiam in schedulis meis habeo unum specimen stipite pallide rubello depictum. Sed hoc, quod ad Holmiam ($^4/_8$ 1888) legi, sole erat exsiccatum, pileo nitido, margine rimoso, stipite intus molle, et vix rite determinandum.

R. heterophylla(!). *R. vesca* FR. Sv. ätl. sv. t. 63 est longe diversa. COOK. t. 1075 huc forte spectat, sed ob stipitem rubellum dubia. BRITZ. f. 43 meæ similior est. Var. *rufa* KARST. Krit. Öfv. p. 463 [ex litteris ipsius ($^{15}/_{3}$ 1890) ad R. æruginea pertinens] ob lamellas excedentes (»Lamellerna utskjutande») forte hujus loci. BRES. t. 95 recedit colore etc.

Ad interpretationem hujus speciei secutus sum Prof. H. von POST, qui me benigne docuit ELIAM FRIES viva hujus speciei specimina pro *R. vesca* FR. pluries habuisse. Doctor M. A. LINDBLAD hanc pro *R. heterophylla* [ex figura in musæo Holmiensi deposita] et R. heterophyllam aliorum pro *R. æruginea* habet. In hac re valde ancipite mihi necesse videtur descriptiones Friesii publicatas litem discernere, si possint. Ex his omnino elucet R. heterophyllam primariam et typicam colorem plus minus viridem habere, et in Monogr. II p. 104 dicitur sub R. heterophylla: . . . »pileo . . . *numquam rubente* vel purpurascente». Sed etiam si hæc species a FRIES R. heterophyllæ quondam subjuncta sit, nunc necesse est eam distinguere. Nam, præter alias differentias, sporæ in altera albæ, in altera ochroleucæ (SACC. Chrom. n:o 28).

R. vesca FR. Sv. ätl. sv. t. 63 a mea, ut dixi, valde diversa. Hæc est quidem ex Friesio ipso, Hym. Eur. p. 446, »recedens forma», sed etiam descriptio Friesii a mea ita recedit, ut vix huc spectet. In præsenti tamen meam separare non volo, præsertim quum formam in Sv. ätl. sv. t. 63 depictam non viderim, nisi forte ad R. lepidam pertineat, ut suspicatur QUÉLET, Flore myc. p. 350 (sub R. rosea).

R. virescens SCHÆFF.

SCHÆFF. t. 94 f. 1 (?) KROMBH. t. 67 f. 12—15, *Ag heterophyllus* VITT. t. 27. *R. cyanoxantha* GILL. t. 184. *R. cyanoxanthæ var.* COOK. t. 1043 (lamellæ contra naturam sursum cremeæ depictæ).

A *R. cyanoxantha*, cum qua jungitur a FRIES (Mon. II. p. 323), COOKE etc., bene distincta species.[1]) Recedit imprimis

[1]) SCHÆFFER cum multo longius distante R. æruginosa PERS. confundit.

lamellis et sporis albis. Pileus demum obscure viridis. Stipes albus, interdum tinctura tenuissima lilacina vel violacea, intus demum sæpe scalariter cavernosus. Caro sub cute lilacina.

Ob lamellas sæpe furcatas et colorem pilei virescentem facile pro *R. furcata* haberem, sed sapor omnino mitis.

Legi ad Gothoburgum, prope Femsjö Smolandiæ, ad Bökebergsslätt Scaniæ, ad Ronneby Blekingiæ et in Dyrehaven prope Hafniam. Verisimiliter ubique in fagetis occurrit, quamquam cum R. cyanoxantha, quam in statu juniore nonnihil æmulatur, commixta et prætervisa.

R. cyanoxantha SCHÆFF.

ICON. t. 93; COOK. t. 1076, 1077.

Hæc pallescit (non virescit). Stipes, ut in priori, albus vel interdum tenuissime violaceus. Lamellæ in cremeum vergunt. *Sporæ cremeæ* (SACC. Chrom. n:o 27).

Etiam in hac vidi cutem rimose-diffractam (scilicet monstrose).

In fagetis non rara.

R. heterophylla FR.

Syn.: *R. æruginea* LINDBL. FR. ICON. t. 173 f. 3.

Inter R. heterophyllam et R. ærugineam limites haud reperio. Hæc statum exoletum illa statum juniorem et adultum ejusdem speciei sistere mihi videtur, quare censeo nomen R. æruginea omnino delendum.

Quoad formam cum *R. vesca* sæpe sociâ convenit, sed non raro major et non ita durus. Color pilei plus minus sordide virens, nunc in griseum vel cæsium vel albidum nunc in olivaceum vel fuscum vergens, disco sæpe obscuriori, interdum tamen pallidori. Lamellæ, ut in omnibus, primo angustæ et confertæ, sensim latiores et inter se remotiores, *demum in cremeum vergentes. Sporæ cremeæ v. ochroleucæ.*

R. cyanoxanthæ videtur affinis, sed a *R. æruginosa* PERS. toto coelo diversa.

In betuletis fere numquam deest.

COOK. t. 1044 a mea nonnihil recedere videtur et forte potius ad Russ. olivascentem pertinet. COOK. t. 1045 est longe diversa; talem numquam vidi. COOK. t. 1089 et 1090 videntur hujus loci, sed color vix typicus. In fig. Friesii, ICON. t. 173 fig. 3, color est quoque insolitus (nimis purus). PAUL. t. 75 f. 1—5 huc non citanda. In musæo Holmiensi nulla figura sub nomine R. heterophylla est deposita præter illam supra (p. 174, 175) citatam, quæ R. vescam meam sistit.

R. consobrina est mihi ignota.

R. sororia FR.

Hanc tantum ad Gothoburgum legi.

R. adustam in memoriam nonnihil revocat, sed pileus margine striatus et tenuior, caro nullo modo rubescens, tantum cinerascens. Stipes in mea intus scalariter cavernosus ut in R. *foetente*, extus cinerascens vel grisescens. COOK. t. 1056 (var. *intermedia*) in meam fere melius quadrat quam Fr. ICON. t. 173 f. 1.

R. foetens PERS.

FR. Sv. ätl. sv. t. 40. KRAPF II. t. 6 f. 8, 9 (»Schmierling»). COOK. t. 1046.

Vulgaris, sæpe copiosa; facillime dignota.

In Djurgården ad Holmiam inter Betulas [eodem loco, ubi *R. cærulea* (?) occurrit]legi ($^{21}/_{8}$ 1888) formam minorem, subsiccam, durissimam, disco rimoso, odore nullo, sapore acri, quæ forte ad *R. subfoetens* SMITH COOK. t. 1047 pertinet, sed mea pallidior.

R. fellea FR.

ICON. t. 173 f. 2. COOK. t. 1058.

Vulgaris in fagetis. — Lamellæ coloratæ, sed *sporæ albæ*. — Est, ni fallor, sola species, cujus sapor indicatur a SECRETAN, qui tamen fere in omnibus odorem diligenter observavit.

R. Queletii FR.

COOK. t. 1028. — Ipse non vidi. Sed Premieraktören C. F. THEGERSTRÖM, sagacissimus et peritissimus mycologus,

qui complures Hymenomycetum species rarissimas in Suecia detexit, hanc speciem in silva acifolia vel mixta in insula Wermdön prope Holmiam mense Jul. 1889 et 1890 se legisse me benigne docuit.

R. emetica (SCHÆFF.) FR.

FR. Sv. ätl. sv. t. 21. COOK. t. 1030, 1031.

Sat vulgaris præcipue in silvaticis humidiusculis.

R. pectinata BULL. est mihi ignota.

R. ochroleuca PERS. (?)

Stipes farctus, deorsum incrassatus, lævis vel prope basim interdum punctatus vel granulatus (non reticulato-rugulosus), albus vel deorsum in ochraceum leviter vergens, demum cinerascens, 3—10 × 1—4 cm. Pileus ex hemisphærico demum planus, vel leviter depressus, sæpe (ut in R. vesca, heterophylla etc.) ab initio leviter umbilicatus, lævis vel demum margine nonnihil striatus, glaber, ochroleucus, centro vix saturatiori nec pallidiori, demum sordidescens, 5—15 cm. latus. Lamellæ angustæ vel mediocriter (4—11 mm.) latæ, circa stipitem plus minus rotundatæ, albæ. *Sporæ albæ*, in cremeum levissime tantum vergentes, 9—11 × 7—9 mmm. *Caro* alba, *demum cinerascens*. Sapor mitis, vel leviter amaricans.

BRITZ. f. 51 a, b meam sat bene refert. COOK. t. 1049 statum senilem exhibet. KROMBH. t. 64 f. 7, 8 colore multum recedit et vix eadem. Figura Friesii in musæo Holmiensi deposita quoque ita dissimilis, ut ad meam verisimiliter non spectet.

Hæc species in fagetis, v. c. ad Femsjö Smolandiæ, ad Bökebergsslätt Scaniæ, in Dyrehaven prope Hafniam, fere vulgatior est quam subsimilis et sæpe socia R. fellea, cui præterea vix affinis. »In pinetis» puris numquam vidi, sed in fagetis pinis intersparsis sæpe occurrit.

R. æruginea FR.

Vide sub R. heterophylla.

R. fragilis PERS.

GILL. t. 189. COOK. t. 1091, 1060.

Vulgatissima et sat variabilis, sed una cum valde affini R. *emetica* pellicula viscida, sapore acri, carne, lamellis sporisque candidis semper facile recognita.

R. veternosa FR.

COOK. t. 1033, 1092.

Descriptioni Friesii et figuris Cookei mea bene respondet, sed sapor e miti rancidus (non acris). Lamellæ ex albidis subochraceæ. Sporæ ochraceæ.

Pluribus locis legi, v. c. ad Holmiam, Gothoburgum, Ronneby.

R. integra (L.) FR.

Sub hoc nomine complures species videntur coactæ, sed in præsenti mihi non licet eas stricte limitare.

R. decolorans FR.

Hujus speciei tres exstant formæ sat affines, sed constanter, ut videtur, diversæ, quare pro speciebus propriis facile haberi possunt. Hæ sunt

a) *R. obscura* mihi

b) *R. decolorans* FR. COOK. t. 1079.

c) *R. constans* KARST. (et forte BRITZ.)

Nota communis est: sporæ ochroleucæ, stipes albus, demum una cum carne cinerascens, sapor mitis.

R. obscura mihi.

Pileus sordide violaceo-rufus vel rufofuscus vel purpureofuscus, vix expallens, margine subpruinato, sæpe in violaceum vergente. Sporæ 9—10 × 7—9 mmm.

In pinetis non rara, sed exoleta tantum facile recognita, ergo sæpe prætervisa.

Legi ad Upsaliam, Holmiam, Högtorp Sudermanniæ, Kumla Nericiæ, Femsjö Smolandiæ, Ronneby Blekingiæ. — Ad Bygget

Hallandiæ in prato humido graminoso et muscoso inter Betulam, Juniperum, Alnum vidi varietatem sordide sanguineam et expallentem. — Vulgo media magnitudine, sed ad Holmiam individuum 13 cm. altum, stipite 3 cm. et quod excurrit crasso legi.

R. decolorans FR.

In Hym. Eur. p. 451 describitur. Sporæ nonnihil majores quam in f. obscura, nempe 10—15 × 9—11 mmm. — Ad colorem pilei quasi media inter præcedentem et sequentem, quas jungit, licet in neutram evidenter transeat.

Legi ad Holmiam, Gothoburgum, Wislanda Smolandiæ, Kumla Nericiæ etc.

R. constans KARST.

Krit. Öfv. p. 464 (ut var. R. decolorantis). Ag. (Russula) ochroleucus SWARTZ in K. V. A. Handl. 1809 p. 91.

Pileus ochroleucus. Sporæ 9—12 × 7—9 mmm. — KARSTEN describit marginem pilei rugoso-sulcatum (»knottrigt fårad»), sed in mea est margo fere lævis. — Ab R. ochroleuca (p. 178) facile dignoscitur sapore omnino miti, lamellis cremeis et sporis ochroleucis.

Hæc prædistincta forma vel, si mavis, species locis humidis in silvis acifoliis vel (Betula, Alno) mixtis non raro occurrit. Legi ad Holmiam et Gothoburgum, ad Bolmen et Femsjö Smolandiæ et in insula Stekön prope Ronneby.

In descriptione breviuscula BRITZELMAYRI, Hym. aus Südb. IV p. 141, de cinerescentia stipitis nil dicitur; fig. 33 quoque ita prava, ut eam certe determinare non liceat.

R. aurata WITH.

COOK. t. 1080. Huc forte trahenda KROMBH. t. 68 f. 1—4, ut monet BRES. p. 86.

Hanc pulchram speciem duobus tantum locis adhuc legi: ad Holmiam (parce) et in monte Omberg (copiose).

R. nitida PERS. est mihi ignota.

R. puellaris FR.

COOK. t. 1065. — Est vulgata species.

R. alutacea PERS.

Ampla, 15 cm. vel ultra lata. Stipes albus, sæpe tinctura tenui luteola. Pileus sordide purpureo-violaceus vel lividus (SACC. Chrom. 49), plus minus pallide olivascens, præsertim in disco, sæpe totus pallide olivaceus, interdum obscure viridis. Lamellæ latæ, ochroleucæ. Sporæ intense ochraceæ vel vitellinæ. Caro saltem sursum leviter sulphurea.

Legi in fagetis ad Femsjö Smolandiæ, ad Bökebergsslätt Scaniæ, ad Ronneby Blekingiæ et in Dyrehaven prope Hafniam.

Color carnis subsulphureus videtur bonus character, quem tantum apud KRAPF I. p. 16 notatum vidi. — Forma pileo viridi, prope Hafniam obvia, statum exoletum R. virescentis KROMBH. refert, sed toto coelo diversa. — Formam erythropodam non vidi vel forte non intellexi. (Cfr sub R. olivacea.)

R. ochracea Alb. et Schw. est mihi ignota.

R. lutea HUDS.

COOK. t. 1082 (color pilei nimis sordidus).

Stipes (sub lente) subtiliter reticulato-flocculosus ut in R. xerampelina.

Non rara in silvis frondosis.

Exstant formæ ochrosporæ, in silvis acifoliis vel mixtis sæpius obviæ, quæ huc forte trahendæ, licet colore pilei plus minus recedant. In omnibus est (ut in R. lutea) stipes mollissime farctus vel sæpe cavus et fragilis, immo fragillimus, semper candidus, Caro tota vesiculosa, friabilis, candida. Sapor mitis Hæ sunt præcipue.

a) *R. armeniaca* COOKE t. 1064, pileo in fundo pallido plus minus roseo- vel incarnato-rubellus.

Hanc maxime in silvis frondosis et mixtis legi.

b) *R. Postiana* mihi (R. alutacea var. virescens et R. alutacea var. cærulescens von POST in litt.). R. chamæleontina BRITZ. f. 47 (?). Pileus plus minus pallide olivaceus, interdum lividescens vel violascens.

Hanc præcipue in silvis acifoliis, ad Holmiam, in monte Omberg et ad Femsjö, legi.

Hæ formæ a FRIES (ex Prof. H. von POST in litt.) pro varietatibus R. luteæ habitæ sunt. Ceterum a quibusdam formis minutis R. xerampelinæ vel integræ interdum ægre discernuntur.

Formam alteram adhuc non denominatam Professori H. von POST meritissimo dicavi. Hic vir humanissimus et in mycologicis peritissimus annuas excursiones in regione Upsaliensi etiamnunc facit et omnes formas sibi obvias assidue describit, delineat, depingit. Numerus tabularum, quas autographice coloravit, 2500 excedit, quarum 2000 et quod excurrit fungos agaricinos repræsentant. Plurimæ sunt ab ELIA FRIES recensitæ et approbatæ vel determinatæ. Hic thesaurus majoris fere momenti mihi videtur quam figurarum collectio in musæo Holmiensi deposita; nam in hac vulgo una tantum forma cujusque speciei, sed in illa sæpe multæ occurrunt: ergo collectionem Friesianam optime profecto complet.

R. ravida FR.

Hæc est mihi ignota.

R. nauseosa PERS.

COOKE t. 1147. — Hæc ad Holmiam tantum mihi obvia. Ad Femsjö legi valde similem et forte eandem, sed inodoram.

R. vitellina PERS.

Nescio, an huc sit trahenda forma, quam in Uggleviksskogen prope Holmiam $^4/_8$ 1888 legi. Hæc ad colorem pilei fere media inter R. armeniacam et R. Postianam, sed ab utraque pilei margine rugoso-striato distincta. Odorem haud notavi. Ab figura COOKEI (t. 1102 f. B) mea pilei lamellarumque colore nimis recedit. Propius (quoad colores) accedere videtur ad *R.*

pulchralem BRITZ. COOK. t. 1095 f. A vel ad *R. nauseosæ var. flavidam* COOK. t. 1102 f. A.

R. chamæleontina FR.

COOK. t. 1098. GILL. t. 197.

Formam a Prof. H. v. POST huc relatam prope Upsaliam ($^{11}/_{9}$ 1885) legi. Deinde non vidi vel forte non recognovi. Quod mirum videtur, quum ex FRIES non rara sit. An ergo eadem ac *R. Postiana* mihi? Descriptio Friesii traditioque tamen negant. In musæo Holmiensi nulla exstat icon hanc speciem illustrans.

Hæc opera

supra citata mihi licuit adire.

ALBERTINI et SCHWEINIZ: Conspectus fungorum in Lusatiæ superioris agro Niskiensi crescentium. Lipsiæ 1805.

BARLA, J. B.: Les Champignons de la province de Nice. Nice 1859.

BRESADOLA, J.: Fungi Tridentini novi. Tridenti 1881.

BRITZELMAYR, M.: Hymenomyceten aus Südbayern. Berlin 1879—1891.

BULLIARD, P.: Herbier de la France. Paris 1780—1793.

COOKE, M. C.: Illustrations of British fungi. London 1881—1891.

FRIES, E.: Observationes mycologicæ. I. Hafniæ 1815.

—— Systema mycologicum. I. Lundæ 1821.

—— Anteckningar öfver de i Sverige växande ätliga svampar. Upsala 1836.

—— Epicrisis systematis mycologici. Upsaliæ 1836—1838.

—— Monographia Hymenomycetum. Vol. II. Upsaliæ 1863.

—— Sveriges ätliga och giftiga svampar. Stockholm 1860—1866.

—— Hymenomycetes europæi. Upsaliæ 1874.

FRIES, E.:
FRIES, Th. M.:
FRIES, R.: } Icones selectæ Hymenomycetum. Holmiæ et Upsaliæ 1867—1884.

GILLET, D. C.: Les Champignons de la France. Hyménomycètes. Alençon, 1874—1890.

HARZER, C. A. T.: Naturgetreue Abbildungen der vorzügl. essb. gift. u. verdächt. Pilze. Dresden 1842(—1844).

KARSTEN, P. A.: Kritisk Öfversigt af Finlands basidsvampar. Helsingfors 1889.

KRAPF, K.: Ausfürliche Beschreibung der in Unterösterreich wachsenden essb. oder giftigen Schwämme. Wien 1782.[1])

KROMBHOLZ, J. V.: Abbildungen und Beschreibungen der essb., schädl. und verdächt. Schwämme. Prag 1831—1846.

PAULET: Traité des Champignons. Paris 1793.

PAULET et LÉVEILLÉ: Iconographie des Champignons de PAULET accompagné d'un text nouveau par H. LÉVEILLÉ. Paris 1855.

PERSOON, C. H.: Observationes mycologicæ. I. Lipsiæ 1796.

PERSOON, C. H.: Synopsis methodica fungorum. Gottingiæ 1801.

—— Commentarius Schæfferi icones illustrans. Erlangæ 1800.

QUÉLET, L.: Flore mycologique de la France. Paris 1888.

SACCARDO, P. A.: Chromotaxia. Patavii 1891.[2])

SCHÆFFER, J. C.: Fungorum qui in Bavaria et Palatinatu circa Ratisbonam nascuntur icones. Ed. nova. Erlangæ 1800.

SCHROETER, J.: Kryptogamen-Flora von Schlesien. Pilze. Breslau 1885—1889.

SECRETAN, L.: Mycographie Suisse. I. Genève 1833.

VITTADINI, C.: Fungi mangerecci. Milano 1835.

---

[1]) För lånet af detta arbete står jag i tacksamhetsskuld hos Bibliotekarien vid Kongl. Universitetet i Köpenhamn: Riddaren S. BIRKET SMITH.

[2]) Opus optatissimum!

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1891. N:o 3.
Stockholm.

Härledning af en formel inom den matematiska statistiken.

Af G. Eneström.

[Meddeladt den 11 Mars 1891 genom D. G. Lindhagen.]

Inom befolkningsstatistiken behöfves som bekant vid beräkningen af dödlighets- och lifslängdstabeller lösning af följande problem:

Man känner antalet personer, som vid början och vid slutet af ett visst år befunnit sig i åldersklassen $x/x+1$ år[1]) äfvensom antalet under året aflidna personer, som vid dödstillfället fyllt x år, men icke uppnått $x+1$ års ålder. Huru stor är för en person vid x års ålder ($x \geqq 1$) sannolikheten att dö inom ett år?

För lösningen af detta problem hafva olika formler blifvit framställda. Vid Statistiska centralbyråns bearbetning af folkmängdsuppgifterna för år 1870 användes för beräkningen af den sökta sannolikheten w_x formeln

$$w_x = \frac{D_x}{L_x + \frac{1}{2}D_x},$$

där D_x betecknar antalet under året aflidna personer, som vid dödstillfället fyllt x år, men icke uppnått $x+1$ års ålder, och L_x utmärker antalet vid årets slut befintliga personer i åldersklassen $x/x+1$ år. Däremot har vid bearbetningen af folkmängdsuppgifterna för år 1880 den något noggrannare formeln

---

[1]) Med åldersklassen $x/x+1$ år förstås här sammanfattningen af de personer som fyllt x år, men icke fyllt $x+1$ år.

$$w_x = \frac{D_x}{\frac{1}{2}(L_x + L'_x) + \frac{1}{2}D_x}$$

begagnats, där D_x och L_x hafva den ofvan angifna betydelsen, och L'_x betecknar antalet personer, som vid årets början befunnit sig i åldersklassen $x/x+1$ år. Att denna formel ungefärligen angifver den sökta sannolikheten, kan på ett ganska enkelt sätt ådagaläggas.[1]) Vill man åter söka strängt matematiskt bevisa formelns riktighet, måste man äfven angifva, om och under hvilka förutsättningar den är fullt exakt, och i detta fall erfordras en noggrannare undersökning af frågan.

Vid utförandet af en sådan undersökning synes det vara lämpligast att utgå från antalet vid årets början lefvande personer inom de åldersklasser, hvilka vid problemets lösning böra tagas i betraktande, och söka med tillhjälp af den sökta storheten w_x bestämma dels huru många bland dessa under årets lopp sannolikt komma att dö i åldern mellan x och $x+1$ år, dels huru många vid årets slut sannolikt befinna sig i åldersklassen $x/x+1$ år. På detta sätt bör man till slut kunna erhålla en ekvation, i hvilken utom w_x blott bekanta storheter ingå, och genom lösning af hvilken ekvation w_x således bör blifva bekant.

Då nu alla personer, som under årets lopp aflida i åldern mellan x och $x+1$ år, måste vid årets början hafva tillhört antingen årsklassen $x-1/x$ år eller årsklassen $x/x+1$ år, och då alla, som vid årets slut befinna sig i årsklassen $x/x+1$ år, måste vid årets början hafva tillhört årsklassen $x-1/x$ år, så är det klart, att vi bland de personer, som lefva vid årets början, blott behöfva taga i betraktande dem, som då tillhöra de två årsklasserna $x-1/x$ år och $x/x+1$ år. Dessa båda årsklasser uppdela vi i $2n$ olika åldersklasser, nämligen:

$$x-1 \Big/ x-1+\frac{1}{n} \text{ år}, \quad x-1+\frac{1}{n} \Big/ x-1+\frac{2}{n} \text{ år}, \ldots$$
$$\ldots, x-1+\frac{n-1}{n} \Big/ x \text{ år},$$

[1]) Se *Bidrag till Sveriges officiella statistik. Statistiska centralbyråns berättelse för år 1880.* III. (Stockholm 1885), sid. LII—LIII.

$$x \Big/ x + \frac{1}{n} \text{ år}, \quad x + \frac{1}{n} \Big/ x + \frac{2}{n} \text{ år}, \ldots\ldots, \quad x + \frac{n-1}{n} \Big/ x + 1 \text{ år},$$

där talet n är så stort, att alla personer, som tillhöra samma åldersklass, utan nämnvärdt fel kunna antagas hafva den lägsta inom klassen förekommande åldern. Vidare beteckna vi med $a_{x-1+\frac{r}{n}}$ antalet personer, som vid årets början tillhöra åldersklassen $x - 1 + \frac{r}{n} \Big/ x - 1 + \frac{r+1}{n}$ år, och med $a'_{x+\frac{r}{n}}$ antalet personer, som vid samma tidpunkt tillhöra åldersklassen $x + \frac{r}{n} \Big/ x + \frac{r+1}{n}$ år.

Vi skola nu söka bestämma dels för hvar och en af de $2n$ åldersklasserna huru många under årets lopp sannolikt aflida i åldern mellan x och $x+1$ år, dels för hvar och en af de n första åldersklasserna huru många vid årets slut sannolikt lefva kvar. För detta ändamål måste vi dock göra ett antagande rörande dödsfallens fördelning på de olika tidsintervallerna inom ett åldersår, och välja härvid det enklaste, nämligen att dödsfallen fördela sig likformigt öfver hela åldersåret, så att, om vid början af x-te åldersåret l_x personer lefva, och sannolikheten för en x-årig person att dö inom åldersåret är w_x, antalet aflidna inom ett intervall af $\frac{1}{n}$ år är $\frac{w_x \, l_x}{n}$, vare sig detta intervall tillhör åldersårets början eller dess slut. Enligt detta antagande blir för en vid kalenderårets början $\left(x - 1 + \frac{r}{n}\right)$-årig person sannolikheten att lefva till fyllda x år

$$\frac{1 - w_{x-1}}{1 - \frac{r}{n} w_{x-1}},$$

sannolikheten för samma person att lefva till kalenderårets slut

$$\frac{1 - w_{x-1}}{1 - \frac{r}{n} w_{x-1}} \left(1 - \frac{r}{n} w_x\right),$$

och sannolikheten för honom att dö under kalenderårets lopp i åldern mellan x och $x+1$ år

$$\frac{1-w_{x-1}}{1-\frac{r}{n}w_{x-1}}\frac{r}{n}w_x.$$

På samma sätt blir sannolikheten för en vid kalenderårets början $\left(x+\frac{r}{n}\right)$-årig person att under kalenderårets lopp dö i åldern mellan x och $x+1$ år

$$\frac{\left(1-\frac{r}{n}\right)w_x}{1-\frac{r}{n}w_x}.$$

På grund af det föregående[1]) kan man således för hvar och en af de $2n$ åldersklasserna angifva, i hvad mån den bidrager till antalet vid årets slut kvarlefvande och under årets lopp aflidna personer inom den ålder, hvarom här är fråga. Sammanställer man för öfversiktlighetens skull resultaten i tabellform, får tabellen det utseende, som pag. 189 utvisar.

Men nu är, om de i början af denna uppsats använda beteckningarna bibehållas, summan af talen i den tredje kolumnen lika med D_x, summan af talen i den andra kolumnen lika med L_x och summan af de n sista talen i den första kolumnen lika med L'_x. Man erhåller således ekvationerna

$$D_x = a_{x-1+\frac{1}{n}}\frac{1-w_{x-1}}{1-\frac{1}{n}w_{x-1}}\cdot\frac{1}{n}\cdot w_x + a_{x-1+\frac{2}{n}}\frac{1-w_{x-1}}{1-\frac{2}{n}w_{x-1}}\cdot\frac{2}{n}\cdot w_x + \ldots$$

$$+ a_{x-1+\frac{n-1}{n}}\frac{1-w_{x-1}}{1-\frac{n-1}{n}w_{x-1}}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot w_x + a'_x w_x + a'_{x+\frac{1}{n}}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)w_x}{1-\frac{1}{n}w_x}$$

$$+ a'_{x+\frac{2}{n}}\frac{\left(1-\frac{2}{n}\right)w_x}{1-\frac{2}{n}w_x} + \ldots + a'_{x+\frac{n-1}{n}}\frac{\frac{1}{n}\cdot w_x}{1-\frac{n-1}{n}w_x},$$

[1]) För härledningen af de olika sannolikheterna må hänvisas till TH. WITTSTEINS uppsats: *Die Mortalität in Gesellschaften mit successiv eintretenden und ausscheidenden Mitgliedern;* Arch. der Mathem. **39**, 1862, 67—70.

Antal lefvande personer vid årets början.	Antal kvarlefvande personer vid årets slut i åldersklassen $x/x+1$ år.	Antal under årets lopp aflidna personer i åldern mellan x och $x+1$ år.
a_{x-1}	$a_{x-1}(1-w_{x-1})$	—
$a_{x-1+\frac{1}{n}}$	$a_{x-1+\frac{1}{n}}\frac{1-w_{x-1}}{1-\frac{1}{n}w_{x-1}}\left(1-\frac{1}{n}w_x\right)$	$a_{x-1+\frac{1}{n}}\frac{1-w_{x-1}}{1-\frac{1}{n}w_{x-1}}\cdot\frac{1}{n}\cdot w_x$
$a_{x-1+\frac{2}{n}}$	$a_{x-1+\frac{2}{n}}\frac{1-w_{x-1}}{1-\frac{2}{n}w_{x-1}}\left(1-\frac{2}{n}w_x\right)$	$a_{x-1+\frac{2}{n}}\frac{1-w_{x-1}}{1-\frac{2}{n}w_{x-1}}\cdot\frac{2}{n}\cdot w_x$
⋮	⋮	⋮
$a_{x-1+\frac{n-1}{n}}$	$a_{x-1+\frac{n-1}{n}}\frac{1-w_{x-1}}{1-\frac{n-1}{n}w_{x-1}}\left(1-\frac{n-1}{n}w_x\right)$	$a_{x-1+\frac{n-1}{n}}\frac{1-w_{x-1}}{1-\frac{n-1}{n}w_{x-1}}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot w_x$
a'_x	—	$a'_x w_x$
$a'_{x+\frac{1}{n}}$	—	$a'_{x+\frac{1}{n}}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)w_x}{1-\frac{1}{n}w_x}$
$a'_{x+\frac{2}{n}}$	—	$a'_{x+\frac{2}{n}}\frac{\left(1-\frac{2}{n}\right)w_x}{1-\frac{2}{n}w_x}$
⋮	⋮	⋮
$a'_{x+\frac{n}{n-1}}$	—	$a'_{x+\frac{n-1}{n}}\frac{\frac{1}{n}\cdot w_x}{1-\frac{n-1}{n}w_x}$

$$L_x = a_{x-1}(1 - w_{x-1}) + a_{x-1+\frac{1}{n}} \frac{1 - w_{x-1}}{1 - \frac{1}{n} w_{x-1}} \left(1 - \frac{1}{n} w_x\right) + \ldots .$$

$$+ a_{x-1+\frac{n-1}{n}} \frac{1 - w_{x-1}}{1 - \frac{n-1}{n} w_{x-1}} \left(1 - \frac{n-1}{n} w_x\right),$$

$$L'_x = a'_x + a'_{x+\frac{1}{n}} + a'_{x+\frac{2}{n}} + \ldots + a'_{x+\frac{n-1}{n}}.$$

Adderar man de två första ekvationerna och subtraherar från summan den tredje ekvationen, blir

$$D_x + L_x - L'_x = a_{x-1}(1 - w_{x-1}) + a_{x-1+\frac{1}{n}} \frac{1 - w_{x-1}}{1 - \frac{1}{n} w_{x-1}} + \ldots$$

$$+ a_{x-1+\frac{n-1}{n}} \frac{1 - w_{x-1}}{1 - \frac{n-1}{n} w_{x-1}}$$

$$- \left[a'_x(1 - w_x) + a'_{x+\frac{1}{n}} \frac{1 - w_x}{1 - \frac{1}{n} w_x} + \ldots + a'_{x+\frac{n-1}{n}} \frac{1 - w_x}{1 - \frac{n-1}{n} w_x} \right].$$

Kände man nu för något lämpligt n-värde (t. ex. för $n = 365$) alla talen a och a', kunde man med tillhjälp af denna ekvation och ekvationen för L_x beräkna w_{x-1} och w_x. Då emellertid enligt förutsättningen några uppgifter om antalet personer i de $2n$ olika åldersklasserna icke finnas att tillgå, måste man för att erhålla w_x göra ytterligare ett antagande, hvarigenom en relation mellan de olika talen a och mellan de olika talen a' fastställes. Det ligger då närmast till hands att antaga alla åldersklasserna mellan $x - 1$ och x år härröra från lika manstarka kullar nyfödda och göra samma antagande för alla åldersklasserna mellan x och $x + 1$ år. Härigenom erhåller man relationerna

$$a_{x-1+\frac{r}{n}} = a_{x-1}\left(1 - \frac{r}{n} w_{x-1}\right),$$

$$(r = 1,\ 2,\ 3, \ldots, n - 1)$$

$$a'_{x+\frac{r}{n}} = a'_x\left(1 - \frac{r}{n} w_x\right),$$

och de förut härledda ekvationerna förenklas till

$$L_x = a_{x-1}(1 - w_{x-1}) + a_{x-1}(1 - w_{x-1})(1 - \frac{1}{n} w_x) + \ldots$$
$$+ a_{x-1}(1 - w_{x-1})(1 - \frac{n-1}{n} w_x)$$
$$= a_{x-1}(1 - w_{x-1})(n - \frac{n-1}{2} w_x),$$
$$L'_x = a'_x + a'_x(1 - \frac{1}{n} w_x) + \ldots + a'_x(1 - \frac{n-1}{n} w_x)$$
$$= a'_x(n - \frac{n-1}{2} w_x),$$

$$D_x + L_x - L'_x = a_{x-1}(1 - w_{x-1}) + a_{x-1}(1 - w_{x-1}) + \ldots$$
$$+ a_{x-1}(1 - w_{x-1}) - [a'_x(1 - w_x) + a'_x(1 - w_x) + \ldots + a'_x(1 - w_x)]$$
$$= n a_{x-1}(1 - w_{x-1}) - n a'_x(1 - w_x).$$

Genom elimination af $a_{x-1}(1 - w_{x-1})$ och a'_x erhåller man

$$(D_x + L_x - L'_x)(1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) w_x) = L_x - L'_x(1 - w_x).$$

Sätter man nu $n = \infty$ och löser den sista ekvationen i afseende på w_x, får man slutligen

$$w_x = \frac{D_x}{\frac{1}{2}(L_x + L'_x) + \frac{1}{2} D_x},$$

eller just den formel, som skulle härledas. Denna formel är således exakt under förutsättning, att för de båda åldersklasserna $x - 1/x$ år och $x/x + 1$ år dödsfallen under åldersåret äro jämnt fördelade öfver hela året, och att likaledes barnsbörderna för hvart och ett af de år, under hvilka dessa föddes, voro jämnt fördelade öfver hela året. Den första förutsättningen gäller ej för $x = 1$, enär som bekant dödsfallen under det första lefnadsåret är mycket talrikare i början af året än vid dess slut. Emellertid finner man lätt, att formeln kan användas äfven för beräkning af w_1, därför att under formelns härledning en kompensation af felen inträder med hänsyn till de n första åldersklasserna. Bortsedt från detta specialfall äro de båda förutsättningarna visserligen i allmänhet icke fullt riktiga, men ett för-

sök att på grundvalen af mera exakta hypoteser framställa en ny formel torde komma att utfalla tämligen gagnlöst, åtminstone så länge verkan af emigration och immigration icke tages i betraktande. Det är nämligen mycket sannolikt, att den i sig själf obetydliga korrektion, som på grund af emigrationen egentligen borde anbringas å den härledda formeln, är vida större än den korrektion, som skulle erhållas, om riktigare förutsättningar uppställdes rörande barnsbördernas och dödsfallens fördelning.

Det kan vara af intresse att undersöka, huru formeln för w_x skulle modifieras, om man valde en annan enkel hypotes rörande mortalitetens variation under loppet af ett åldersår, nämligen så att man antoge dödssannolikheten vara densamma för ett tidsintervall af gifven längd, vare sig detta intervall är beläget vid början eller vid slutet af åldersåret. I detta fall blir[1]) för en vid kalenderårets början $\left(x - 1 + \frac{r}{n}\right)$-årig person sannolikheten att lefva till fyllda x år

$$(1 - w_{x-1})^{1-\frac{r}{n}},$$

sannolikheten för samma person att lefva till kalenderårets slut

$$(1 - w_{x-1})^{\frac{n-r}{n}} (1 - w_x)^{\frac{r}{n}},$$

sannolikheten för honom att dö under kalenderårets lopp i åldern mellan x och $x + 1$ år

$$(1 - w_{x-1})^{\frac{n-r}{n}} \left(1 - (1 - w_x)^{\frac{r}{n}}\right),$$

och sannolikheten för en vid kalenderårets början $\left(x + \frac{r}{n}\right)$-årig person att under kalenderårets lopp dö i åldern mellan x och $x + 1$ år

$$1 - (1 - w_x)^{\frac{n-r}{n}}.$$

Förfar man nu på alldeles samma sätt som förut, erhåller man till slut ekvationen

---

[1]) Jämför WITTSTEIN, anf. st., sid. 72—73.

$$\frac{w_x(D_x + L_x - L'_x)}{n\left[1 - (1 - w_x)^{\frac{1}{n}}\right]} = L_x - L'_x(1 - w_x),$$

och sätter man äfven här $n = \infty$, blir

$$\frac{-w_x}{\log(1 - w_x)}(D_x + L_x - L'_x) = L_x - L'_x(1 - w_x),$$

ur hvilken ekvation w_x kan genom sukcessiva approximationer beräknas. Utvecklar man $\frac{-w_x}{\log(1 - w_x)}$ i serie erhåller man

$$1 - \frac{w_x}{2} - \frac{w_x^2}{12} - \ldots;$$

bortkastar man här alla termer, som innehålla andra eller högre digniteter af w_x, har man att beräkna w_x ur ekvationen

$$\left(1 - \frac{w_x}{2}\right)(D_x + L_x - L'_x) = L_x - L'_x(1 - w_x)$$

och man återfår då värdet

$$w_x = \frac{D_x}{\frac{1}{2}(L_x + L'_x) + \frac{1}{2}D},$$

hvilket värde således i detta fall är en första approximation.

För $x = 0$ är naturligtvis hela den ofvan använda härledningsmetoden obrukbar, enär ingen åldersklass $-1/0$ år kan finnas; i alla händelser gäller, såsom ofvan påpekades, antagandet om dödsfallens jämna fördelning icke för det första åldersåret. Också begagnas, vid beräkningen af sannolikheten att dö under det första lefnadsåret, inom befolkningsstatistiken en helt annan formel än den, hvarom här varit fråga.

Stockholm 1891. Kongl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 48. 1891. № 4.

Onsdagen den 8 April.

INNEHÅLL:

På tillstyrkan af Komiterade antogs till införande i Akademiens Handlingar en af Kyrkoherden H. D. J. WALLENGREN författad afhandling: »Skandinaviens Neuroptera. Andra afdelningen. Neuroptera Trichoptera».

Ingeniören C. W. SCHMIDT från Paris förevisade och beskref en af honom konstruerad kronograf, som angifver tusendedelar af sekunden.

Hr PETTERSSON meddelade en af Ingeniören K. SONDÉN författad uppsats: »Ein neues Hygrometer». (Se Bihang till Vet.-Akad. Handl.).

Sekreteraren öfverlemnade för intagande i Akademiens skrifter följande uppsatser: 1:o) »Fortsatta anmärkningar om den Grönländska vegetationens historia», af Prof. A. G. NATHORST*; 2:o) »Bidrag till kännedomen om Salix-floran i sydvestra Jemtlands fjelltrakter», af Med. Kandidaten B. G. O. FLODERUS (se Bihang etc.); 3:o) »Studier öfver Enstatit och dess omvandlingsprodukter», af studeranden K. JOHANSSON (se Bihang etc.); 4:o)

»Untersuchung über eine Gruppe von langperiodisch elementären Gliedern in der Zeitreduction», af Dr K. G. OLSSON (se Bihang etc.); 5:o) »Tetrao bonasiotetrix, Bogdanow. Bastard mellan orre och hjerpe funnen i Sverige», af Konservatorn K. G. KOLTHOFF (se Bihang etc.); 6:o) »Beiträge zur Kenntniss der Actiniengattung Bolocera», af Fil. Kandidaten O. CARLGREN*; 7:o) »Om måttet för dödligheten inom en bestämd åldersklass», af Amanuensen G. ENESTRÖM*.

Efter Hr FORSSELL, som afsagt sig det honom af Akademien lemnade uppdraget att vara ledamot af Kongl. Direktionen öfver Stockholms stads undervisningsverk, förordnades Hr HAMMARSKJÖLD till ledamot af denna Direktion för en tid af tre år.

Genom val utsågs Hr ALMÉN till Præses under det ingående akademiska året, hvarefter Hr DAHLANDER nedlade præsidium med ett tal om belysningsteknikens utveckling under de sista årtiondena.

Följande skänker anmäldes:

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

Stockholm. *Biologiska föreningen.*
Förhandlingar. Bd. 1(1887/89): H. 1—8; 2(1889/90): 1—8. 8:o.
Adelaide. *Public library, museum and art gallery.*
Report. Year 1889/90. F.
Baltimore. *Johns Hopkins university.*
American chemical journal. Vol. 12: N:o 6—8; 13(1891): 1. 8:o.
» journal of mathematics. Vol. 13: N:o 1—2. 1890—91. 4:o.
» » » philology. Vol. 11: N:o 2—3. 1890. 8:o.
Studies from the biological laboratory. Vol. 4: N:o 7. 1890. 8:o.
» in historical and political science. Ser. 8: 5—12. 1890. 8:o.
Berlin. *Physikalische Gesellschaft.*
Verhandlungen. Jahrg. 9(1890): 8:o.
Bonn. *Naturhistorischer Verein der Preussischen Rheinlande...*
Verhandlungen. Jahrg. 47(1890): H. 2. 8:o.
Budapest. *K. Ungarische geologische Anstalt.*
Földtany Közlöny. K. 20(1890): F. 5—12. 8:o.
Mittheilungen. Bd. 8: H. 9; 9: 2. 1890. 8:o.
Cambridge, U. S. *Astronomical observatory of Harvard college.*
Annals. Vol. 23: P. 1; 27. 1890. 4:o.
Annual report. 45, 1890 $^{31}/_{10}$. 8:o.

(Forts. å sid. 240.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1891. N:o 4.
Stockholm.

Fortsatta anmärkningar om den grönländska vegetationens historia.

Af A. G. NATHORST.

[Meddeladt d. 8 April 1891.]

I ett nyligen utkommet arbete, »Grönlands Natur og Historie»,[1]) har professor E. WARMING sökt besvara de invändningar mot hans uppfattning af Grönlands ställning i växtgeografiskt hänseende, som jag uttalat i en sistlidne år offentliggjord uppsats.[2]) Beklagligtvis synes dock professor WARMINGS »antikritik» ej vara skrifven med det lugn och den besinning, som man väl kunde hafva rätt att fordra af ett inlägg i en vetenskaplig diskussion, något som tillräckligt torde komma att framgå af det följande. I sak innehåller den intet, som ens i någon mån skulle kunna förringa de slutsatser, som i mitt anförda arbete blifvit uttalade, och jag skulle derför helt och hållet lemnat densamma obesvarad, om den ej innehållit så många origtiga framställningar och om ej en del af professor WARMINGS mot mig rigtade beskyllningar vore af den art, att de icke kunna lemnas obesvarade. Jag ser mig derföre nödsakad att mycket mot min vilja ånyo upptaga frågan till behandling.

---

[1]) EUG. WARMING, Grönlands Natur og Historie. Antikritiske Bemærkninger til Prof. NATHORST. Videnskabelige Meddelelser fra den Naturhistoriske Forening i Kjöbenhavn 1890. Sid. 265—300. Uppsatsen är daterad den 30 December 1890 och är tryckt 1891. Vid citat i det följande betecknas den såsom WARMINGS antikritik.

[2]) A. G. NATHORST, Kritiska anmärkningar om den grönländska vegetationens historia. Bihang till Sv. Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Bd 16, Afd. 3, N:o 6. Betecknas vid citat i det följande med N. En tysk delvis utvidgad upplaga af detta arbete är tryckt i ENGLERS Botanische Jahrbücher. Bd. 14. S. 183—220.

Dessvärre är det i nästan hvarje polemik oundvikligt, att en eller annan missuppfattning eger rum. Ehuru jag bemödat mig att uppfatta WARMINGS uttryck så korrekt som möjligt, finner jag dock, att jag misstagit mig, då jag på ett ställe uppgifver, att WARMING kallat floran på Danmarkssundets vestsida »utprägladt» arktisk-amerikansk. WARMING hade talat om en »udpræget europæisk Flora paa dets Östside (Island) og en arktisk-amerikansk paa dets Vestside (Grönland)». Jag antog nu, att »udpræget» hänförde sig till såväl »arktisk-amerikansk» som »europæisk», men finner af WARMINGS senaste arbete att så ej är fallet. Jag måste sålunda erkänna mitt misstag härutinnan — som visserligen i sak gör hvarken till eller från — och jag måste på samma gång vara tillfreds med, att detta är den enda missuppfattning, till hvilken jag synes hafva gjort mig skyldig.

Redan i inledningen framhåller WARMING, att han måste inskränka sig till mycket få anmärkningar, emedan han f. n. v. har ondt om tid och emedan han anser, att diskussionen helst bör hvila, tills de senaste årens botaniska insamlingar blifvit bearbetade, Grönlands zoogeografiska förhållanden upplysta och tills resultaten af löjtnant RYDERS tillämnade expedition föreligga. Naturligtvis är det alltid önskligt, att en undersökning grundar sig på så omfattande material som möjligt, och det hade onekligen varit bättre, om WARMING i sitt arbete om Grönlands vegetation,[1]) hvilket utgjort föremål för mina kritiska anmärkningar, helt och hållet afstått från att sysselsätta sig med ifrågavarande vegetations historia. Sedan han nu en gång upptagit frågan med de fakta, som föreligga, får han naturligtvis finna sig uti, att denna hans framställning blir underkastad kritik. För öfrigt tror jag icke, att den uppfattning, som af mig uttalats, skall komma att väsentligt förändras af de nya fynden, ty den lagbundenhet, som med hänsyn till växternas utbredning

---

[1]) WARMING, Om Grönlands Vegetation. Meddelelser om Grönland. Heft. 12. 1888. Denna uppsats betecknas vid citat i det följande med I, den densamma åtföljande franska resumén benämnes III. WARMINGS tabeller i Videnskabelige Meddelelser 1887 benämnas II, och hans uppsats »Über Grönlands Vegetation» i ENGLERS Bot. Jahrbücher, Bd 10, betecknas med IV.

på den väl kända vestkusten är rådande, synes mig redan nu bevisa rigtigheten af mina åsigter. Skulle mot förmodan de nya fynden gå i annan rigtning än jag antagit, så skall jag med största nöje erkänna mitt misstag, ty för fakta måste man böja sig. Såsom saken för närvarande gestaltar sig, talar deremot allt för rigtigheten af den af mig uttalade uppfattningen. Hvad de zoogeografiska förhållandena angår, så kan jag deremot ej finna, att de, om insekterna undantagas, kunna utöfva något inflytande på föreliggande fråga, lika litet som tvärt om, ty de för djurens spridning gynsamma vilkoren kunna gå i helt motsatt rigtning mot växternas. Hade t. ex. en landförbindelse nu existerat mellan Island och Grönland, så skulle tilläfventyrs moskusoxen kunnat sprida sig till förstnämnda land, utan att dess flora vore mindre europeisk för det. Ett land kan redan hafva erhållit sin flora från öster, då en invasion af djur eger rum från vester och tvärt om. De zoogeografiska undersökningarna i all ära, men någon afgörande betydelse för ifrågavarande spörsmål hafva de ej.

Att professor WARMING vid författandet af sin antikritik haft ondt om tid, framgår dessvärre deraf, att han icke närmare tagit reda på hvarken hvad jag yttrat eller hvad han i sina egna arbeten sagt. På grund häraf finna vi långa utläggningar, som helt och hållet bero på nya misstag från WARMINGS sida. Så t. ex. återkommer allt jemt, att en af mina hufvudinvändningar är, att WARMING »ikke studerer Udbredningen 'inom landet'», men något dylikt har jag visserligen icke påstått. Hvad jag sagt är, att WARMING ej »fäst *nog*[1]) afseende vid växternas utbredning i n o m Grönland» samt att han »alltför ensidigt användt den statistiska jemförelsemetoden», och detta står ej blott fortfarande fast, utan erhåller ytterligare stöd genom WARMINGS antikritik. Till detta skall jag sedan återkomma och går nu att bemöta WARMINGS invändningar i den ordning, som de af honom blifvit framställda[2]).

---

[1]) Kursiveradt här.

[2]) Nemligen de mera väsentliga bland desamma. En hel hop oväsentliga har jag deremot förbigått, enär de mestadels äro af den art, att de ej förtjena att

Till en början beklagar sig professor WARMING öfver, att jag, i det jag omnämner det första vigtigaste resultatet af min undersökning, eller att »WARMINGS påstående, att 'Danmarksstrædet gjör en bestemt Skillelinie mellem en udpræget europæisk Flora paa dets Östside og en arktisk-amerikansk paa dets Vestside (Grönland)' är origtigt», icke äfven intagit den i WARMINGS uppsats närmast följande punkten. Hvad jag anfört är emellertid just det, som WARMING sjelf med spärrad stil framhållit, och det enda, som för frågan om Grönlands ställning till öfriga länder, om hvilket det här är tal, har något intresse. Att den följande punkten skulle bevisa, att WARMING tillräckligt studerat arternas utbredning inom Grönland, är mer än jag kan fatta. Också är denna punkt af WARMING sjelf utelemnad i såväl den tyska (IV) som franska uppsatsen (III), der det talas om Danmarkssundet såsom gräns för de europeiska och amerikanska frororna. Att den omständigheten att jag utelemnat densamma, skulle hafva någon som helst betydelse, synes mig derföre knappast kunna vara allvarligt menadt.

I samband härmed anför WARMING, att jag icke påpekat, att han i sina »senere Opsatser» uttryckt sig försigtigare. Med anledning häraf vill jag till en början göra en erinran. WARMINGS danska uppsats (I) i Meddelelser om Grönland är tryckt 1888. I ENGLERS Botanische Jahrbücher, Bd 10, Heft. 4, utgifvet den 4 december samma år, finnes en på tyska språket författad uppsats af WARMING öfver samma ämne (IV). I inledningen till denna betecknar WARMING dess innehåll endast såsom ett utdrag ur det danska arbetet, till hvilket för öfrigt i fråga om detaljerna hänvisas (»deren Inhalt ich hier kurz besprechen will, indem ich für die Details auf die Abhandlung selbst verweise»). Icke med ett enda ord omnämnes, att det

---

bemötas och för öfrigt äro lika origtiga som de öfriga. Ej heller har jag ansett mig skyldig att besvara åtskilliga af WARMING till mig framställda frågor om geologiska spörsmål m. m., enär de ligga vid sidan af ämnet samt deras besvarande skulle kräfva mera utrymme än jag nu vill offra derpå. En fråga på en linie kan ofta kräfva ett svar på flera sidor.

tyska arbetet i något hänseende skulle innehålla förändrade uppfattningar af de åsigter, som uttalats i det danska. Det hade sålunda varit ursäktligt både för mig och andra, om vi endast fäst oss vid det större arbetet, till hvilket WARMING sjelf hänvisar. Ej heller har WARMING sändt mig något exemplar af den tyska uppsatsen, oaktadt han visste, att jag var sysselsatt med en kritik af hans arbete, och det var en ren tillfällighet, att jag erhöll kännedom om densamma.[1]) Att jag detta oaktadt och oaktadt WARMINGS inledande ord gjort mig mödan att taga del af den tyska uppsatsen, torde väl snarast kunna räknas mig såsom förtjenst i stället för tvärt om. Det är visserligen sannt, att WARMING i den sista punkten af denna uppsats uttalar sig försigtigare, men äfven här finna vi på ett annat ställe (sid. 403) nästan ordagrannt samma uttalande, som ofvan citerats: »dass nicht die Davis Strait, wie es HOOKER wollte, sondern eher die Meeresenge zwischen Grönland und Island, die Danmarksstrasse, eine Trennung bildet zwischen einer europäischen Flora an ihrer Ostseite (Island) und einer arktisch-amerikanischen an ihrer Westseite (Grönland).» Och om WARMING sjelf kommit till insigt derom, att hans uttalanden i de danska arbetena voro origtiga, så hade det väl varit hans ovilkorliga skyldighet att upplysa den danskläsande publiken derom. Än märkligare är det, att den franska uppsatsen (III) kunnat innehålla andra uttalanden än den danska, till hvilken den ju sluter sig som en resumé. Det är annars icke brukligt, att en resumé innehåller åsigter, som icke harmonierar med den uppsats, för hvars innehåll den skall redogöra och i anslutning till hvilken den är tryckt. I förlitande härpå hade jag verkligen hittills icke läst den franska uppsatsen i fråga, den åtföljde ej det mig af WARMING tillsända exemplaret af »Om Grönlands Vegetation», och på titeln till 12:te häftet af Meddelelser om Grönland tillkännagifves dess tillvaro med följande ord: »med resumé des communications sur le Grönland». I inledningen till den-

[1]) Vid den tid, då ifrågavarande häfte af Bot. Jahrbücher utkom, var jag nemligen ofta sjuk.

samma nämnes ej heller ett ord derom, att dess innehåll i något hänseende afviker från hufvudarbetet.

Oaktadt WARMING nu hänvisar till sina mera försigtiga uttalanden i de franska och tyska uppsatserna, vidhåller han emellertid fortfarande, att Danmarkssundet »i det Hele og Store gjör en Skillelinie mellem to forskjellige Naturer, en udpræget europæisk og en arktisk-amerikansk». Såsom bevis derför hänvisas bland annat till de statistiska data, som ådagalägga, att medan det i Island finnes ungefär 25 gånger så många östliga som vestliga typer, »er der i Grönland omtrent lige mange östlige og vestlige, naar Grönland tages som Helhed». Här ha vi ett tillfyllestgörande exempel på hvart man kommer, när man alltför ensidigt använder den statistiska metoden och på samma gång ej tar nog hänsyn till växternas utbredning inom landet. Detta påstående skall jag sedan närmare utveckla, men vill dessförinnan fästa uppmärksamheten vid ett annat förhållande. Såsom vi ofvan sett, anser WARMING, att man vid frågans afgörande äfven bör taga de zoogeografiska förhållandena i betraktande. Det är under sådana omständigheter mer än egendomligt, att han icke i första rummet tager hänsyn äfven till de lägre växterna, mossor, lafvar och svampar. Dessa äro nu bearbetade, men WARMING nämner ej ett ord om desamma, ehuru han i sin första uppsats (I) med rätta framhåller, att det i växtgeografiskt hänseende äfven är vigtigt att taga hänsyn till dem. Visserligen gå resultaten af denna bearbetning i helt annan rigtning än som med WARMINGS åsigter är förenligt. »Skjönt Grönland ligger forholdsvis nær ved det amerikanske Fastland», säger CHR. JENSEN,[1] »har det dog ikke en eneste af dettes ejendommelige Mosarter.»[2] Detsamma skrifver KINDBERG till mig i ett meddelande den 27 Januari 1891. »Någon äkta amerikansk art, som ej finnes i Europa, är icke påträffad i Grönland.» Deremot finnas på Grönland, enligt sistnämnde forskare, ej mindre än 23 europeiska mossarter, som icke äro funna i

[1]) Meddelelser om Grönland. Heft. 3, Forts., sid. 424.

[2]) Möjligen finnes dock en *Fontinalis*.

Amerika. Grönlands mossflora räknar ej mindre än 330 arter. Hvad lafvarne angår, upplyser oss DEICHMANN BRANTH:[1]) »*Umbilicaria pennsylvanica* er den eneste Art, der minder om Amerikas Nærhed.» Denna är funnen vid Ameralikfjorden (64° n. br.), sålunda, såsom man kunde vänta, just inom det område, der de amerikanska fanerogamerna äro företrädesvis rådande. I fråga om svamparnes användning för växtgeografiska slutsatser, måste man naturligtvis vara försigtig, enär deras utbredning i andra länder väl ännu ej är tillräckligt känd. Jag vill dock ej underlåta att påpeka hvad ROSTRUP[2]) om desamma yttrar: »Af de ogsaa udenfor Grönland fundne Svampe ere kun 4 Arter alene kjendte fra Amerika, Resten fra Europa eller Sibirien.» En af dessa arter, *Coremium fimetarium*, som förekommer på »Kalvemög», är funnen vid Nanortalik (60° n. br.), medan de tre öfriga, hvilka äro parasiter på växter, träffats på vestkusten inom området 64°—65° 30′ n. br., sålunda allt jemt der äfven de amerikanska fanerogamerna dominera.

Taga vi nu, såsom WARMING gör, Grönlands vegetation i klump, så kunde vi i fråga om mossorna säga, att, som Grönland har minst 23 gånger så många europeiska mossor som amerikanska, så måste detta land i bryologiskt hänseende vara en utprägladt europeisk provins.[3]) Då ju enligt WARMINGS eget vittnesbörd äfven de europeiska kärlväxterna äro öfvervägande de amerikanska, så blefve det en ytterligare anledning att räkna Grönland såsom en växtgeografisk provins af Europa. Då jag emellertid ej kan godkänna det förfaringssätt, som betraktar Grönland såsom ett växtgeografiskt helt, vore ett sådant resonnemang enligt mitt förmenande mindre rigtigt.

Se vi i stället till ostkusten af Grönland, så gestalta sig förhållandena på följande sätt. Mellan 63° och 66° n. br., eller på vestra sidan af Danmarkssträdet, finnes ingen amerikansk kärlväxt, ingen amerikansk mossa, ingen amerikansk

[1]) Meddelelser om Grönland. Heft. 3. Fortsættelse 2. Sid. 461.
[2]) » » » » » » » » 524.
[3]) Huru många europeiska lafvar och svampar, som förekomma på Grönland, men saknas i Amerika, derom upplysa ej de anförda arbetena.

laf, ingen amerikansk svamp. Island på östra sidan af samma sund har dock tre amerikanska kärlväxter.[1]) Huru WARMING under dessa förhållanden kan påstå (III), att »le détroit de Danemark . . . forme la ligne entre la flore européenne et la flore américaine», är mer än jag kan fatta. Hvad är det, måste man fråga, som skulle föranleda, att vegetationen på vestra sidan af sundet skall kallas amerikansk och på den östra europeisk? Amerikanska arter finnas ju endast på sundets östra sida (Island), ej på dess vestra mellan 63° och 66° n. br.

Äfven i Ostgrönland, mellan 74° och 76° n. br., finnas blott två amerikanska arter mer än på Island, nemligen inalles 5[2]), medan 4 europeiska äro för handen. Ingen amerikansk mossa, ingen amerikansk laf, ingen amerikansk svamp är angifven derifrån. Taga vi hela den kända delen af Ostgrönland norr om 63° n. br. i klump, så blir förhållandet, att 13 östliga och 5 vestliga der äro funna, och till de förra borde väl äfven räknas *Polemonium humile*, *Saxifraga hieraciifolia* och *S. hirculus*, *Arabis petræa* och *Draba arctica*, hvilka icke äro funna på vestkusten, och hvilka derföre här måste anses såsom östliga typer. Att här tala om en amerikansk vegetation vore påtagligen meningslöst.

I samband härmed vill jag framställa en fråga. Om Grönland i stället för 36 vestliga arter hade haft 360, af hvilka den större delen hade förekommit mellan 64° och 68° n. br. på vestkusten, medan de derifrån aftagit i antal åt alla håll, så att de vid 63° n. br. på östra kusten helt och hållet upphörde, medan endast 5 af dem förekomme mellan 73° och 76° n. br. på samma kust — skulle det då finnas den minsta rimlighet i påståendet, att Danmarkssundet utgjorde gränslinien mellan den europeiska och den amerikanska floran? WARMING, som ju betraktar Grönland såsom ett helt, skulle naturligtvis härpå svara ja, medan hvarje annan forskare deremot helt visst skulle svara, att gränsen ginge midt igenom landet och att sålunda snarast inlandsisen betecknade densamma.

---

[1]) Hur det förhåller sig med de härstädes befintliga lägre växterna känner jag ej.

[2]) WARMING upptager fortfarande 10 amerikanska arter från nordöstra Grönland, medan i verkligheten endast 5 derstädes äro funna.

I naturen finnas emellertid inga skarpa gränslinier, och derföre är det ej mer öfverraskande, att vi finna några få vestliga arter äfven på Grönlands ostkust än att några sådana ännu finnas på Island. Jag måste sålunda fortfarande anse mitt uttalande, att »det amerikanska elementet i Sydgrönlands nutida vegetation begränsas mot öster ej af Danmarksstrædet utan af inlandsisen», såsom till alla delar rigtigt.

WARMING har visserligen sökt förringa dessa slutsatser genom påståendet, att ostkustens flora ännu är för litet känd; till detta skall jag återkomma nedan och vill här endast påpeka, att hans påstående utgör ett ytterligare stöd för rigtigheten af mitt anförande, att han icke tagit nog hänsyn till växternas utbredning inom landet.

I mina kritiska anmärkningar har jag framhållit, att den jemförelse, som WARMING anställt mellan Islands och Grönlands vegetation, i många hänseenden är vilseledande, och detta bland annat derför, att WARMING anfört en mängd isländska arters frånvaro på Grönland såsom egendomlig, ehuru denna frånvaro utan tvifvel beror derpå, att de äro sydligare former, som på grund af Grönlands ogynsammare klimat icke kunna lefva derstädes. På detta svarar WARMING helt kategoriskt, att min invändning är »uden Betydning», men tills WARMING framlagt några verkliga bevis för detta påstående, torde den stå fast.

Redan i inledningen af min uppsats har jag fäst »uppmärksamheten vid de vanskligheter, som nödvändigtvis åtfölja de statistiska beräkningarne, och hvilka ej heller undgått WARMING sjelf». Efter att hafva redogjort för sagda vanskligheter, upprepar jag, att »professor WARMING sjelf påpekar» dem. Detta oaktadt beskylles jag nu för att hafva framställt saken så, som om »disse Tanker ere Nathorsts originale». Kan denna beskyllning vara allvarligt menad? I samband härmed kritiserar WARMING min jemförelse mellan Spetsbergens vegetation och växtligheten i Grönland norr om Melville Bay. Detta är alltför betecknande för det sätt, hvarpå professor WARMING här diskuterar vetenskapliga spörsmål, för att jag icke skulle

anföra hans uttalande in extenso: »Deraf at han (NATHORST) i mindre end 24 Timer har seet een eneste Lokalitet, Ivsugigsok, n. f. Melville Bay, slutter han, at hele Vegetationen over en Strækning af 6—7 Breddegrader er i 'väsentlig mån' afvigende fra Spitzbergens! NATHORST er virkelig nöjsom med Fundamenteringen.»

Denna anmärkning nödgar mig, huru obehagligt det än är, att med några ord vidröra mina egna iakttagelser i fråga om Spetsbergens och Grönlands vegetation. Hvad det förra landet angår, så tror jag mig utan fara kunna påstå, att jag är väl förtrogen med dess högre växtlighet. Så vidt jag har mig bekant, har ingen annan botanist haft tillfälle att iakttaga så många af dess kärlväxter som jag, och mina geologiska arbeten derstädes hafva fört mig till de mest skilda lokaler, från hafsstranden till 1,150 meters höjd ö. h. Då man är förtrogen med ett lands vegetation, fordras det i sanning icke mycken skarpsynthet för att vid besök på ett annat land märka de olikheter, som mellan båda äro rådande. Jag antager t. ex. att, när professor WARMING för första gången satte sin fot på Brasiliens jord, så behöfde han ej mer än 24 minuter för att märka, att dess vegetation var grundväsentligt skild från Danmarks — äfven om han ej vetat det förut. I fråga om Grönland har jag, utom vid Ivsugigsok (76° 7′ n. br.), gjort botaniska insamlingar vid Tasiusak[1]) och på öar i närheten (73° 22′), på Harön (70°), under längre tids uppehåll vid Waigattet, på Disco och Nugsuakhalfön, från hafsytan till 950 meter öfver hafvet, vid Godhavn (69° 15′), vid Ivigtut (61° 12′) och omgifningar (Arsukfjorden, Grönne Dal etc.), vid Igaliko (61°), botten af Kangerdluarsuk (60° 52′), vid Julianehaab (60° 43′) vid Friedrichsthal (60°) och Amitsok samt vid Kung Oskars hamn på Grönlands ostkust (65° 35′). Jag vet icke, om någon annan botanist haft tillfälle att till samma utsträckning studera vegetationen inom olika delar af landet, och hvad min egen erfarenhet angår, torde jag sålunda lika mycket

[1]) Kortare uppehåll vid Upernivik, Pröven, Ritenbenk och Egedesminde medräknas ej.

som någon annan varit berättigad att utföra den af professor WARMING kritiserade jemförelsen. Nu är det dertill helt enkelt icke sanning, då WARMING påstår, att jag dragit mina slutsatser för ifrågavarande sträcka endast af hvad jag sjelf sett. Detta kan hvem som helst öfvertyga sig om genom att rådfråga mitt arbete;[1]) af detsamma framgår, att jag anlitat all litteratur, som existerar öfver hela kuststräckan i fråga (DURAND, ROSS, KANE, SUTHERLAND, INGLEFIELD, MALMGREN, HAYES HOOKER, NARES, BESSELS, HART), deribland åtskilliga arbeten, som blifvit förbisedda af LANGE, hvarföre min lista öfver vegetationen inom ifrågavarande område innehåller vida fullständigare uppgifter än första delen af LANGES Flora grönlandica. Jag har sålunda dragit mina slutsatser ej blott från egna iakttagelser, utan äfven från all af andra samlad botanisk erfarenhet härifrån, och jag har sålunda varit i min goda rätt.

I och för sig är WARMINGS anmärkning således både origtig och omotiverad, och den framstår så mycket egendomligare, då man erinrar sig, att WARMING, som sjelf sett blott en mindre del af Grönlands vestkust, ej drar i betänkande att behandla hela landets vegetation och dervid särskildt, på grund af andras iakttagelser, redogör för hela björkregionens beskaffenhet, af hvilken han sjelf ej sett annat än pressade växter. Och WARMING behandlar ju likaledes den här afhandlade kuststräckan (76°—83°), inom hvilken han sjelf aldrig satt sin fot. Jag klandrar nu icke detta, och vi se ju, att författarne till handböcker i växtgeografi måste behandla hela jordens flora, oaktadt de sjelfve kanske sett blott en del af Europa. Men hvad jag klandrar, är att WARMING ej vill tillerkänna mig samma rättighet som andra, och jag måste dertill klandra det sätt, hvarpå hans anmärkning är framställd.

Ej stort bättre är WARMINGS nästa passus, i det han framhåller en brist, som skulle vara fästad såväl vid hans egna som »i alt Fald NATHORSTS plantegeografiske Studier», nemligen att

---

[1]) A. G. NATHORST, Botaniska anteckningar från nordvestra Grönland. Öfversigt af K. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. 1884.

man för att utreda en floras historia äfven måste taga hänsyn till arternas inbördes slägtskapsförhållanden. Sjelf säger han sig dock ej kunnat upptaga denna fråga. WARMING har skrifvit en diger afhandling »Om Grönlands Vegetation» (på 220 sidor i 8:o), i hvilken denna vegetation skulle allsidigt behandlas. I detta arbete äro afsedde slägtskapsförhållanden icke vidrörda. Huru kan då någon rimligtvis begära, att mina »kritiska anmärkningar» skola kunna sysselsätta sig dermed? Om emellertid professor WARMING slår upp »Polarforskningens bidrag» etc., sid. 279, skall han finna, att jag många år före honom fäst uppmärksamheten vid vigten af dylika utredningar, och detta fastän WARMING särskildt utpekat mig såsom hafvande förbisett desamma. Hvad skall man säga om dylikt?

I fråga om huruvida Grönland i växtgeografiskt hänseende bör betraktas såsom ett helt, har jag framhållit det origtiga i en dylik uppfattning och i samband dermed påpekat, att WARMING icke fäst nog afseende vid växternas utbredning inom Grönland. Med anledning häraf behagar WARMING påstå, »at disse Resultater (med et Par Ændringer af N.) ganske hvile paa mine (WARMINGS) Undersögelser.» Detta är ett fullkomligt misstag. För att få en verklig öfverblick af de vestliga och östliga elementens utbredning inom Grönland, har jag måst upprätta nya listor af den grund, att WARMINGS icke lemnade tillräcklig ledning. Sjelfva fakta har jag hemtat ur LANGES Conspectus med de tillägg, som på senare tid blifvit gjorda, och hvilka funnos strödda i en mängd skilda uppsatser. Att jag dervid äfven jemfört WARMINGS lista är tydligt, men denna jemförelse har skett för att kontrollera min förteckning, ifall någon uppgift skulle af mig blifvit förbisedd. Hade jag ensamt stödt mig på WARMINGS listor, så skulle t. ex. kartan blifvit alldeles origtig, enär det gröna strecket för de östliga arternas utbredning på vestkusten då skulle nått till 83° n. br., i stället för att, såsom nu sker, sluta strax norr om 76°, och likaledes skulle det röda streck, som angifver de vestliga arternas förekomst på ostkusten, nått söderifrån till 64° i stället för till 63°, detta för att endast tala

om kartan. Och då WARMING hänvisar till sin tabell (I, sid. 163) såsom visande »akkurat det samme» som mina listor, så är detta hvad man kallar sanning med modifikation. Att det finnes öfverensstämmelser är gifvet, ty vi hafva ju båda grundat våra uppställningar på samma material, men dermed är likheten slut. WARMINGS tabell är icke blott origtig — den angifver t. ex. mellan 76° och 83° n. br. på vestkusten 13 vestliga arter i stället för 9, och på ostkusten mellan 70° och 75° n. br. 10 vestliga arter i stället för 5 — utan äfven uppställd på ett sådant sätt, att man af densamma icke får någon öfversigt af ifrågavarande arters utbredning inom Grönland. Ty närmast intill området norr om Melville Bay på vestkusten ställes området vid Grönlands sydspets på ostkusten o. s. v. Hela denna tabell visar, att WARMING ej haft någon aning om, huru utbredningen af de vestliga arterna på Grönland i verkligheten gestaltar sig, ty då skulle han omöjligen kunnat uppställa densamma på ett så vilseledande sätt, som nu skett.

WARMING synes vidare vara mycket missbelåten dermed att jag framhållit, att LANGES studier i fråga om arternas utbredning inom Grönland stå framför WARMINGS, samt att »det är att beklaga, att den senare ej upprättat sammanfattande listor i enlighet med LANGES och med tillägg af de fynd, som på senaste tiden blifvit gjorda». I »Grönlands Vegetation» har WARMING ett särskildt kapitel IX, »Overgange mellem Vegetationsformationerne; Arts-Statistik m. m.» (I, sid. 153—169). På sidan 155 börjar den afdelning, som behandlar »Arternes Fordeling efter Breddegraden». Vi få der bland annat veta »Artsrigdommen i de forskjellige Bælter», »de Forandringer i Artsbestanden, der foregaa fra Bælte til Bælte», »hvor mange Arter der ere absolut ejendommelige for de enkelte Bælter», »Rigdom i Henseende til östlige og vestlige Typer». Om allt detta erhålla vi upplysningar — i siffror, men om vi t. ex. fråga, hvilka arter, som äro egendomliga för de särskilda bältena, så få vi — om distriktet A. undantages, hvars arter särskildt uppräknats vid skildring af björkregionens flora, samt med undantag för de två

arterne i distriktet B, hvilka nämnas i en not, intet svar. Vi få veta, att af Ostgrönland taget för sig har t. ex. distriktet S 53, distriktet M 12 och distriktet N 50 egendomliga arter. Dessa tal kunna ju vara intressanta nog, men än intressantare hade varit att få veta, hvilka arter som afses. Vi få vidare veta, att »naar Bæltet A sammenlignes med Bæltet B, finder jeg, at A har 119 Arter, som ikke findes i B, og B blot 10, som ikke findes i A; Totalantallet af Arter, der findes i begge Bælter er 295. B's ejendommelighed bliver = c. $^1/_{11}$.» Allt detta kan ju hafva sitt intresse, men jag tror, att vigtigare än dessa tal hade äfven här varit, om vi fått veta, hvilka dessa 119 och 10 arter äro. Så med alla WARMINGS uppgifter inom ifrågavarande kapitel. För att få veta, hvilka arter, som afses — frånsedt de obetydliga uppgifter, som lemnas sid. 34 (I) angående de arter, som upphöra i områdena B och C — måste vi vända oss från »Meddelelser om Grönland» till WARMINGS tabeller (II), leta igenom WARMINGS 20 sidor, anteckna de arter, som förekomma inom de olika områdena, och på så sätt sjelfva söka utröna, hvilka arter, som WARMING kan mena.

Till och med i den afdelning, som behandlar »Rigdom i Henseende til östlige og vestlige Typer» få vi ej veta annat än siffror Det kan ju vara intressant nog att erfara, att området A har 18 vestliga arter, medan B endast har 12, C 24 o. s. v., men hvilka dessa arter äro, derom få vi ingen som helst underrättelse, och lika litet få vi veta, om alla de 12 arterna inom området B återkomma inom A, C eller till och med G, hvarifrån 13 arter äro uppgifna. Ej heller lemnas oss någon upplysning derom, huruvida de vestliga typer, som finnas på ostkusten, äro de samma som på vestkusten eller andra. Siffror är allt; vi få ej den minsta upplysning om arternas utbredning inom landet. Detsamma gäller i fråga om östliga typer, förgäfves spörja vi efter, hvilka de arter äro, som finnas inom de olika områdena, på vestkusten, på ostkusten o. s. v. Här kan WARMING ej ursäkta sig dermed, att listorna skulle blifvit för stora, ty det gäller helt små tal. Och då man slutligen får veta, att Grön-

land, enligt WARMING, har 36 vestliga, 42 östliga typer, så frågar man äfven här förgäfves, hvilka dessa arter äro, på hvilka WARMINGS hela slutledning är baserad. Intet svar; man har sålunda intet tillfälle att kontrollera uppgiftens tillförlitlighet. Detta är de nakna statistiska jemförelserna i all sin prydnad! Först om vi gå till WARMINGS andra arbete (II), så kunna vi, genom att anteckna arterna i grupperna 7—9 å ena sidan, 10—18 å den andra, erhålla upplysning om de afsedda 36 och 42 arterna, men äfven här finnes ingen sammanfattande förteckning. Och vilja vi veta, huru dessa arter äro utbredda inom Grönland, så måste vi sjelfva upprätta listor och kunna dervid ej använda WARMINGS tabeller, som äro alltför summariska, utan vi måste vända oss till LANGES Conspectus och andra originalkällor.

När LANGE deremot låter oss veta, att t. ex. 118 arter då endast voro funna söder om 67° n. br., så meddelar han på samma gång hvilka dessa arter äro, och likaså få vi veta, hvilka de 50 arter äro, som då endast voro iakttagna norr om samma breddgrad. Äfvenså lemnar LANGE en förteckning på de 167 arter, som då voro funna endast på vestkusten, ej på den östra. Af WARMING erhålla vi icke någon dylik upplysning, utan vi måste sjelfva antingen genomsöka hans tabeller och göra anteckningar ur dem eller ock upprätta sådana efter LANGES Conspectus och andra tillgängliga källor. Det är denna frånvaro af »sammanfattande listor i enlighet med LANGES», d. v. s. der ej blott artantalet, utan äfven arterna sjelfva anföras, som jag måste anse såsom en kännbar brist i WARMINGS arbete. Att LANGES listor kunnat vara mera omfattande och uppställda på annat sätt, må vara sannt, men han har åtminstone icke, såsom WARMING, nöjt sig med blotta siffror. Såsom bevis på olämpligheten af LANGES listor anför WARMING, att »*Scirpus parvulus* paa Grund af Methoden faar sin Syd-Grænse ved 69° n. Br., hvor den een Gang[1]) er funden». Detta är ju visserligen en

[1]) I verkligheten är den sedermera funnen ännu på ett ställe, nemligen vid Sofias hamn, af BERLIN.

brist, men se vi till, huru denna växt upptages i WARMINGS egen förteckning, så få vi veta, att den finnes mellan 67° och 71° n. br., oafgjordt om blott på ett ställe eller öfver hela sträckan. Förbättringen är sålunda ej särdeles stor, för att få veta hvad vi önska, måste vi åter rådfråga LANGES Conspectus.[1])

Då WARMING i samband härmed påstår, att äfven mina tabeller innehålla »Smaaklumper», nemligen en för hvar breddgrad, så visar detta blott, att han ej har studerat dem. När en växt är funnen på ett ställe, så utmärkes detta icke genom tecken för hela breddgraden (se t. ex. hos N. *Rubus saxatilis* i tabellen sid. 25); är den funnen på två olika ställen med några minuters skilnad inom samma breddgrad, så utmärkes det genom ett kort streck (se t. ex. *Glyceria Kjellmani* i samma tabell), och om arten förekommer öfver ett större område, så att den betecknas genom ett sammanhängande streck, så behöfver dettas ändpunkter ej sammanfalla med breddgraderna (se t. ex. *Alchemilla alpina* i samma tabell). Mina tabeller visa sålunda arternas verkliga utbredning, såvidt de då voro kända.

Mitt påstående, att östra Grönland mellan 63° och 66° n. br., således genom tre breddgrader invid Danmarksstrædet, fullständigt saknar alla vestliga element, säges af WARMING vara af mig »som nye fremhævede Resultater», och strax förut få vi veta, att »hele den Basis, som NATHORST benytter, men som hos ham har faaet et löjerligt Skjær af Originalitet, findes hos mig (WARMING) og först hos mig» (WARMING). Icke har jag sagt, att detta är nytt, tvärtom heter det i den omedelbart följande punkten (N. sid. 16): »Derigenom att WARMING låter distriktet M. börja vid 64°, framgår detta förhållande enligt hans lista blott för två breddgrader, medan det i verkligheten gäller för tre». Här står ju uttryckligen, att det framgår af WARMINGS lista för två breddgrader; hvad är då meningen med hans be-

[1]) I fråga om Grönland norr om Melville Bay äro WARMINGS tabeller mycket mindre upplysande än de listor, som af mig 1884 publicerats, i hvilka breddgraderna upptagas 2 och 2 med uppgift på hvarje särskild lokal, så att man lätt kan sluta till förekomsten inom hvarje breddgrad.

skyllning? Det är sålunda alldeles öfverflödigt, då WARMING på sid. 273 (antikritiken) inför en tabell, som skulle ådagalägga, att hans uppställning visade detsamma som min (oafsedt två breddgrader i stället för tre). Jag anser mig emellertid böra påpeka, att denna tabell är uppställd i enlighet med mina och icke är ett upprepande af WARMINGS förut publicerade tabell (I, sid. 163), något som icke tillräckligt synes mig angifvas af WARMING. Den innehåller dessutom, såsom förut påpekats, åtskilliga origtigheter, och ingen kan af densamma tro annat, än att 7 vestliga och 17 östliga arter finnas upp till 64° n. br. på ostkusten. Då WARMING vidare framhåller, att våra resultat i hufvudsak, äro desamma, så gäller detta blott såsom en naturlig följd deraf, att våra tabeller äro grundade på samma fakta. Deremot erhåller man icke genom WARMINGS någon som helst tillfyllestgörande redogörelse för arternas verkliga utbredning inom landet. Att han icke alls studerat denna, har jag ju icke påstått, att han icke fäst nog afseende vid växternas utbredning inom Grönland står emellertid fast och torde icke behöfva ytterligare belysas. Ej heller har han förstått betydelsen af densamma.

Vi komma nu till den af WARMING framställda anmärkningen mot att jag låtit det genom närvaron af vestliga arter i Sydgrönland utmärkta området sluta vid 63° n. br. på ostkusten. Denna breddgrad går här genom ett relativt frodigt område, och gränsen skulle sålunda icke vara naturlig. Denna anmärkning är befogad, och det hade onekligen varit rigtigare, om den förlagts vid 62° 18′. Såsom af min framställning (N. sid. 18) framgår, antar jag, att den ursprungliga gränsen utgjorts af en isström, som skridit ut i hafvet »mellan Ikermiut (62° 18′) och Kangerdlugsuatsiak (60° 30′). De få vestliga typer, som nu finnas der och upp till 63°, torde hafva hunnit dit i jemförelsevis sen tid, sedan ifrågavarande isström afsmält så mycket, att en spridning längs kusten blifvit möjlig». För att emellertid icke beskyllas att hafva gifvit det vestliga elementet mindre än detta tillkommer, har jag låtit ifrågavarande område nå ända till 63°, detta dock med afseende uteslutande fäst vid de vest-

liga elementen (N. sid. 23). Det är tydligt, att i naturen ingen skarp gräns gifves, och jag antager, att efter åtskilliga årtusenden de vestliga arterna skola hafva spridt sig än längre norrut på ostkusten. Deras när- eller frånvaro här tillmäter jag icke den betydelse, som WARMING tyckes tro.

Denne säger å sin sida, att han ej kan tillägga sträckan mellan 63° och 66° n. br. på ostkusten »den allerringeste Betydning for Spörgsmaalet om Grönlands Natur m. m.». Detta förut emedan den är försvinnande liten mot hela Grönland. För att detta rigtigt skall framstå, räknar WARMING ej blott Grönlands vestkust, utan äfven ostkusten norr om 70° till det arktiskt-amerikanska floromrädet, men att detta för den senares vidkommande är origtigt eller oafgjordt, har jag förut ådagalagt (ofvan sid. 204). Dertill skulle ifrågavarande område (63°—66° n. br.) vara så ytterst smalt; ej mindre än två breddgrader skulle nästan helt och hållet vara betäckta af inlandsisen, hvilket påstående dock endast är sanning med modifikation, ty vid sjelfva kusten finnes äfven der åtskilligt isfritt land. Vidare äro dessa tre breddgrader »overmaade ufuldstændigt undersögte» i botaniskt hänseende. Detta är i synnerhet fallet under 64°, derifrån man, enligt WARMING, endast känner 2 arter. En rik flora träffades deremot af BERLIN och mig vid Kung Oscars hamn (65° 35′), från hvilket område, inberäknadt de två af oss ej observerade arter, som dessutom hemförts af KNUTSEN, och de af mig iakttagna *Veronica saxatilis* och *Sparganium*, hvilka ej äro upptagna i BERLINS lista, 108 arter äro kända. Af dessa äro 9 östliga typer (N. sid. 25), medan deremot icke en enda vestlig art är iakttagen. WARMING anser, att sådana framdeles skola träffas; mig synes det dock, att man bör draga sina slutsatser af hvad man känner och icke af det man icke känner; och det är i sanning en egendomlig »amerikansk» flora, inom hvilken det amerikanska elementet är så undanträngdt, att man efter ett dygns ihärdigt letande bland öfver 100 växtarter icke träffar en enda amerikansk art. Och egendomligt är, att ej heller KNUTSEN funnit någon sådan.

Nu menar WARMING, att man framdeles nog skall finna någon. Detta är ju möjligt, men kan för föreliggande fråga ej hafva någon betydelse, ty om man, i motsats mot WARMING, tar hänsyn till de vestliga arternas utbredning inom landet, så ådagalägger denna, att min uppfattning af desamma såsom sent invandrade i alla händelser står fast. Hade de varit lika allmänna öfverallt och så vid 63° på ostkusten upphört, så hade man visserligen kunnat tro, att deras frånvaro mellan 63° och 66° måste bero på vår bristande kännedom om denna sträcka, men så är icke förhållandet. Vi kunna tvärtom följa deras gradvisa aftagande mot söder från 66:te breddgraden på vestkusten genom i botaniskt hänseende väl kända områden. Och än hastigare sker detta aftagande på ostkusten norrut. »Medan vestra Grönland mellan 60° och 61° ännu har 17 sådana (vestliga) arter, har östra Grönland under samma breddgrad endast 7. Detta antal faller mellan 61° och 62° till 6 och mellan 62° och 63° till 4», hvarefter »mellan 63° och 66°, således genom tre breddgrader invid Danmarksstrædet, östra Grönland fullständigt saknar alla vestliga element» (N. sid. 16). Detta så att säga lagbundna aftagande af de vestliga elementen mot söder och öster bevisar rigtigheten af min åsigt, och det har dervid intet att betyda, om framdeles en och annan vestlig art inom anförda kuststräcka skulle blifva funnen, lika litet som förekomsten af de 3 amerikanska arterna på Island kan förringa åsigten, att detta land i växtgeografiskt hänseende hör till Europa.

Det klingar derföre något underligt, när WARMING utropar: »Det er altsaa denne elendige, lille og lidet kjendte Strækning paa Östkysten, hvor der af 3 Breddegrader findes 2 med Inlandsis» (men med åtskilligt bart land derutanför!), »fra hvilke to der kun kjendes 2 almindelige Arter, som skal være afgjörende for Spörgsmaalet om, hvor Grænsen mellem de to Floraer ligger! NATHORST er i Sandhed nöjsom, hvis han vil bygge videnskabelige Resultater paa et saadant Grundlag.» Detta visar endast, att WARMING icke med uppmärksamhet läst mina »kritiska anmärkningar» samt är ett ytterligare bevis på rigtig-

heten af mitt påstående, att han icke tagit nog hänsyn till växternas (här de vestliga arternas) utbredning inom landet.

Vi få vidare veta, att mina listor för denna kuststräcka skulle vara »aldeles urigtige», bland annat derför att under 64°, hvarifrån man endast känner två arter, har jag angifvit icke mindre än 7 östliga. Låtom oss nu se till WARMINGS egna uppgifter för denna breddgrad! Han upptager för ostkusten ett område M. för sträckan 64°—66°. För denna sträcka uppger han (I, sid. 163) 6 östliga typer, 104 gemensamma arter och 1 endemisk. I hans tabeller (II, sid. 45) uppgifves, att M betecknar »det mellemste, 64°—66°», och likaledes finnes samma sträcka upptagen på enahanda sätt i den förändrade tabellen i hans antikritik sid. 273. Det är ju ganska egendomligt, att han sjelf ej med ett ord omnämner, att man i verkligheten från 64° icke känner mer än två arter, utan först då han vill finna anmärkning mot mig, få vi veta något derom.

Hvad min uppställning angår, skall jag be att få anföra följande. När man talar om en arts utbredning öfver en viss sträcka, så menas naturligtvis dermed icke, att denna art upptager hvarje plats på marken inom ifrågavarande område. En vattenväxt, som är utbredd från Skåne till Upland, finnes naturligtvis endast i vattensamlingarne, en bergväxt endast på bergen o. s. v. Och likaledes anser man det sjelfklart, att ingen ifrågasätter att man särskildt behöfver omnämna, att t. ex. Bråviken föranleder ett afbrott i växtens utbredning. Ty finnes den på norra och södra sidan derom, så faller ju Bråviken äfven inom dess utbredningsområde. De 7 östliga arter, som jag upptagit från 64:de breddgraden, förekomma ej blott norr och söder om densamma, utan äro för öfrigt utbredda på sådant sätt, att sagda breddgrad för hvarje opartisk forskare måste anses ligga inom deras utbredningsområde. Jag tror mig sålunda på goda skäl hafva uppställt min lista såsom jag gjort. Hade denna breddgrad varit så väl känd, att man med säkerhet kunde säga, att afsedda arter saknades här, oaktadt lämpliga ståndorter funnes, så hade saken naturligtvis gestaltat sig annorlunda. Emellertid skall

jag gerna göra det medgifvandet, att det hade varit än bättre, om jag medelst prickning eller frågetecken hade utmärkt, att deras förekomst inom den 64:de breddgraden ännu ej blifvit konstaterad.

I samband härmed påstår WARMING, att endast 5 östliga arter äro kända från den 63:dje breddgraden. I LANGES Conspectus finnas dock uttryckligen angifna 6 — *Alchemilla alpina, Rubus saxatilis, Sedum annuum, Veronica saxatilis, Thymus serpyllum, Hieracium alpinum* — och för de begge öfriga, *Hieracium murorum* och *Aira alpina*, har jag af nyss anförda grunder ansett äfven 63:dje breddgraden böra betraktas såsom hörande till deras utbredningsområde. Låt nu äfven vara att detta är origtigt, så gör det ju hvarken till eller från, ty det är ej de östliga arternas närvaro, utan de vestligas frånvaro, på hvilken mina slutsatser äro grundade. Och om de vestliga arternas frånvaro berodde på vår bristande kännedom om denna kuststräcka, hvarföre skulle denna frånvaro då vara »merkwürdig», såsom WARMING sjelf säger? WARMING tyckes då ej hafva ansett ifrågavarande kuststräcka otillräckligt känd, ty annars borde han väl i samband med omnämnandet af detta »märkliga» förhållande, uttryckligen betonat detta. Han säger ej ens, att inga vestliga typer der hittills icke äro funna, utan han säger rent ut, att i området M. »er der paa det Sted, hvor Grönland er Europa nærmest, slet ingen vestlige mod 6 östlige» (I, sid. 163) och likaså i den tyska upplagan, att »gar keine westliche in dem Island nächsten Teile von Ostgrönland vorkommen».

Då WARMING nu försöker förklara detta, invecklar han sig i så besynnerliga motsägelser, att jag för min del ej kan komma underfund med hans verkliga mening. Vi få nemligen öfverst på sid. 280 (antikritiken) följande upplysning: »Allerede ved at anföre Ordene 'in dem Island nächsten Teile von Grönland'[1]) har jeg delvis antydet min Opfattelse: nemlig at denne Kyst har faaet sit islandske Præg ved Indvandringen fra Island», och

[1]) I den danska uppsatsen talas det deremot, såsom ofvan synes, ej om Island, utan om Europa!

för att styrka detta ytterligare, hänvisas till föregående uttalanden (I, sid. 213—214). Längre ned på samma sida tyckes WARMING emellertid, om jag fattat honom rätt, hafva ändrat åsigt, ty han säger der, att »der i Angmagsalikpartiet er en Del Arter, som hidtil slet ikke ere fundne i Island eller yderst sjælden ere fundne der, . . . i alt vel omtrent en halv Snes Arter, hvad jeg nu ikke har Tid at undersöge nærmere. Det samme gjælder, men i mindre Grad, for det af GRAAH undersögte Parti.[1]) Dette viser, at selv om der ingen vestlige Typer findes, men flere östlige, tör man ikke uden videre tro, at Floraen ved sin Sammensætning vil tyde hen paa Indvandring fra Island.» Sålunda först: »denne Kyst har faaet sit islandske Præg ved Indvandringen fra Island», senare: »man tör ikke uden videre tro, at Floraen ved sin Sammensætning vil tyde hen paa Indvandring fra Island»! Hvilken är nu WARMINGS egentliga mening? Jo, »den Slutning synes mig derimod ganske nærliggende: disse og andre Arter have maaske overlevet Istiden i disse Egne (eller længere Nord paa i Grönland)».

Emedan »omtrent en halv Snes Arter» finnas i Ostgrönland, men saknas eller äro sällsynta (eller ännu icke äro funna) på Island, så skulle sålunda en invandring från detta land icke vara sannolik. På detta vill jag här icke inlåta mig, enär jag vidrört frågan tillräckligt i min föregående uppsats, jag vill blott påpeka, att WARMING sjelf antager, att Islands flora invandrat öfver Färöarne. Dessa sakna[2]) ej mindre än 136 (eller 39,53 procent) af Islands arter, och om nu redan frånvaron af »en halv Snes» skall bevisa, att någon invandring från Island till Grönland ej egt rum, så borde väl sagde tal, enligt WARMINGS uppfattning, omöjliggöra hvarje tanke derpå, att Islands flora invandrat öfver Färöarne. Och dock antager WARMING, att så skett, en mig oförklarlig motsägelse.

---

[1]) På sid. 278 af antikritiken ha vi ju fått veta, att här endast 39 arter äro kända!

[2]) STRÖMFELT, Islands kärlväxter etc. sid. 103. Öfversigt af Vet.-Akad. Förh. 1884.

Vi återvända till frågan om de vestliga elementens frånvaro på ostkusten mellan 63° och 66° n. br. WARMING framhåller, att han på ett ställe i sin första uppsats uttalat, att de olika slags transportmedel, som naturen råder öfver, mera gynna en invandring till södra och östra Grönland från Island än från Amerika, och tillfogar nu, att »hvad der gjælder den direkte Indvandring fra Amerika, gjælder selvfölgelig ogsaa om den indirekte med Vestkysten som Mellemled».

Af detta sistnämnda uttalande ville det sålunda synas, som skulle WARMING numera, i enlighet med den af mig förfäktade uppfattningen, antaga, att de vestliga arterna invandrat från Amerika till vestkusten och sedermera derifrån spridt sig längs kusten mot söder och öster. I så fall måste han naturligtvis äfven anse det vestliga elementet såsom hafvande invandrat efter istiden samt att det sålunda ej kan höra till »Kjærnen» af Grönlands vegetation, hvilket dock, såsom vi längre fram skola finna, motsäges af hans uttalanden på andra ställen. Vi lemna derföre denna fråga för närvarande och öfvergå i stället till frågan, om något högre växtlif kan antagas hafva öfverlefvat istiden i Grönland. I sina föregående uppsatser har WARMING förfäktat den uppfattningen, att »Hovedmassen» af Grönlands vegetation derstädes öfverlefvat istiden. Han medgifver nu, att detta påstående var origtigt: »Sætningen er altsaa urigtig, men den er ogsaa et ukorrekt Udtryk for min Tanke, som er: Kjærnen i Landets Vegetation holdt sig» etc. Det är emellertid ej på ett utan på två ställen i den danska uppsatsen, som samma uttryck återkommer (I, sid. 198, 214), detsamma finna vi i den franska (»je suppose donc que la masse principale des espèces de Grönland a survécu à la période glaciaire dans le pays même») och i den tyska (»Die Annahme, dass die Flora Grönlands durch die Eiszeit ausgerottet oder jedenfalls fast ausgerottet wurde, ist meiner Meinung nach auch nicht richtig, die Annahme einer postglacialen Einwanderung daher auch nicht nötig, jedenfalls was die Hauptmasse der Flora betrifft; diese überlebte die Eiszeit im Lande selbst, welche ich aus Folgendem schliesse» etc.).

Oaktadt WARMINGS tanke var en annan, har sålunda samma inkorrekta uttryck för hans mening framkommit på tre olika språk, i tre olika uppsatser, skrifna vid olika tider.[1]) Detta må vara WARMINGS ensak, men då han nu förnekar, att han i den tyska uppsatsen har talat om hufvudmassan af landets vegetation, är detta, såsom af ofvanstående citat framgår, icke med sanningen öfverensstämmande, och det ådagalägger blott, att WARMING ej gifvit sig tid att taga reda på sina egna uttalanden. Att han flerestädes tillskrifvit mig yttranden, som jag aldrig haft, har redan förut påvisats. I det sista stycket af den tyska uppsatsen finna vi visserligen i denna sak, liksom äfven i fråga om gränslinien mellan den europeiska och amerikanska floran, ett mycket försigtigare uttalande, men det af mig citerade är med spärrad stil framhållet af WARMING sjelf och finnes just på det ställe i hans afhandling, der föreliggande fråga särskildt behandlas. Det är onekligen beqvämt att uttala sig på två olika sätt, ty huru det än går, kan man säga sig hafva fått rätt, men det vore väl rigtigare att öppet erkänna, att man ändrat sin åsigt. Nu har jag naturligtvis antagit, att det af WARMING särskildt framhållna stycket innehöll hans verkliga mening, detta så mycket mera, som det öfverensstämmer med hans yttrande i den danska uppsatsen (och äfven i den franska).

I fråga om växternas förekomst i Grönland under istiden utgår WARMING nu från följande antagande: »der var isfrit Land fra Sydspitsen af Grönland og op til idetmindste 74° n. Br. paa Vestkysten og paa Östkysten». Ja, gällde det blott att komma med kategoriska påståenden, så kunde jag härpå i enlighet med min uppfattning endast svara nej och dermed förklara saken afgjord. Frågan är dock vigtigare än hvem af oss, som får rätt, det gäller att söka utröna hvad som är rätt, och detta kan icke afgöras så lätt, som WARMING synes tro.

Beträffande området Disco, Nugsuakhalfön och Svartenhukshalfön har K. J. V. STEENSTRUP ådagalagt, att denna del af Grönland åtminstone till en höjd af 1,200—1,300 meter var

[1]) Se antikritiken sid. 265.

betäckt af en mägtig, i rörelse stadd ismassa, och han framhåller möjligheten deraf, att till och med Baffins Bay fordom varit fylld af inlandsis. För kuststräckan närmast söder härom, mellan 68° 20′ och 70° n. br., uppgifver SYLOW, att alla fjelltopparne äro afrundade och refflade samt att isen måste fullständigt hafva betäckt desamma. De nå här till omkring 785 meters höjd öfver hafvet. STEENSTRUP och KORNERUP hafva vidare påvisat, att äfven andra sträckor af vestkusten, som nu äro isfria, fordom helt och hållet varit isbetäckta, och att bergtoppar vid Buxefjorden och Ameralikfjorden äro refflade ända upp till 1,260 meters höjd, under det att toppar, som nå ännu högre, icke visa några refflor. Mellan Fiskernæset och Lichtenfels har HOLST iakttagit refflor på en 1,264 meter hög bergtopp, och Jensens nunatak **i** visade genom refflor och block, enligt KORNERUP, att isen fordom öfverskridit dess 1,570 meter höga topp. Om, såsom HAMMER antager och såsom väl rimligt är, fiskbankarne utanför Grönlands vestkust äro gamla moräner, så ådagalägga dessa äfven en större utsträckning och sålunda äfven större mägtighet af inlandsisen. För Julianehaabs område har STEENSTRUP visat, att det numera nästan isfria landet der varit helt och hållet betäckt af is, hvars mägtighet belöpte sig till åtminstone 950 meter; äfven här finnas dock enstaka högre toppar, som ej visa refflor. Äfven söder om 61° n. br. hade inlandsisen förr, enligt SYLOW, en större utbredning, och ännu vid Friedrichsthal (60°) finnas såväl glacierrefflor som väldiga moräner. Till och med ännu sydligare, vid handelsplatsen Pamiagdluk, finnas refflor, och toppen af fjellet Kipingajak (530 meter) visar jettegrytor. På grund af landets sönderrifna ytformer och de branta topparne derstädes antager emellertid SYLOW, att någon sammanhängande inlandsis icke fanns i denna del af landet, ehuru de olika glaciererna hade större utbredning — ett antagande, som dock ej synes mig alldeles oomtvistligt. För danska Ostgrönland angifver slutligen P. EBERLIN, att ehuru inlandsisen derstädes fordom haft en större utsträckning och äfven varit mägtigare, så skulle dock enstaka, af isen icke betäckta bergtoppar der hafva förefunnits.

Man kan härvid ifrågasätta, om frånvaron af refflor på de högsta bergtopparne verkligen bevisa, att dessa ej varit betäckta af isen. Antaga vi, att de varit betäckta af denna, så är det på samma gång gifvet, att just dessa högsta toppar vid isens aftagande först blefvo isfria. De utsattes då genast för frostens och förvittringens inverkan, och refflorna måste följaktligen just här hafva största utsigt att först blifva utplånade. I detta hänseende äro KORNERUPS iakttagelser på Jensens nunatak **i** särdeles lärorika. »Paa Nunatakken **i** saaes ingen Skurstriber eller polerede Flader paa Hornblendeskiferen, der ikke egner sig dertil, da den er altfor let hensmuldrende, hvorimod de fandtes paa et haardt Gnejslag i Nærheden af Fjældets Top.» Hade nu denna gneisinlagring saknats, så hade man följaktligen icke på hela nunatakken funnit några refflor, något som jag särskildt velat framhålla med hänsyn till de lätt förvittrade bergarterna i södra och sydöstra Grönland. »Det mörke Skiferfjeld», säger KORNERUP vidare, »var bedækket af sorte og grönlige, skarpkantede Brudstykker, som Frosten havde lössprengt, samt af en Mængde kantstödte og tildels afrundede Blokke, og iblandt dem var der mange, der bestode af lyseröd Gnejs. Da de næsten alle laa höjere, end de lave Rygge af rödlig Gnejs Öst for Skiferfjeldet, maa de være förte derop af Isen» etc. I detta fall kunde man inse, att blocken voro främmande, emedan de utgjordes af en annan bergart än nunatakken; hade båda deremot bestått af samma bergart, så hade afgörandet naturligtvis mött betydligt större svårigheter, i all synnerhet om denna hört till de mera lätt vittrande, så att blockens afrundning hade utplånats. Med hvad jag sålunda anfört har jag icke velat draga några generella slutsatser, utan endast velat betona, att de negativa vittnesbörden icke kunna tillmätas afgörande betydelse, såvida undersökningen ej skett med särskildt afseende fäst härpå. Naturligtvis kan resultatet inom olika trakter blifva olika.

Vidare kommer härtill en annan omständighet. Såsom hvarje annan glacieris måste äfven inlandsisen matas från firn- och snöområden, och vi veta genom NORDENSKIÖLDS och NANSENS is-

vandringar, att sådana betäcka de inre delarne af inlandsisen till, enligt NORDENSKIÖLD, vid Aulaitsivikfjorden, 170 kilometer från inlandsisens rand, medan snöområdet på ostkusten, enligt NANSENS iakttagelser, synes hafva nått betydligt längre ut. Detta snötäcke kan icke hafva frambragt några glaciala fenomen, såsom refflor och dylikt, och om ett berg till sin nedre del varit omslutet af isen, medan toppen inhöljts af snötäcket, så skulle det efter afsmältningen endast i sin nedre del visa spår af isens inverkan, medan sådana skulle saknas i den öfre. Detta manar sålunda till ytterligare försigtighet vid påståendet, att de bergtoppar, som icke visa glaciala fenomen, under tiden för isens största utbredning framstått som nunatakker öfver densamma.

Uppkomsten af inlandsisen förutsätter dessutom helt andra klimatologiska förhållanden än de närvarande, och HELLAND har med rätta betonat, att om inlandsisen nu toges bort från Grönland, så skulle någon ny sådan icke under närvarande förhållanden kunna bildas. Dess bildning förutsätter nemligen en oerhördt ökad nederbördsmängd (snö), och det är för geologerna väl bekant, att kalla och fuktiga somrar, hvilka just äro allra ofördelaktigast för växtligheten, företrädesvis befrämja glaciererernas tillväxt Beakta vi nu inlandsisarnes utbredning i angränsande länder (jemför N. sid. 31), så böra vi få ett åtminstone aflägset begrepp om den kolossala snönederbörd, som var en nödvändig förutsättning för att dessa skulle kunna bildas. Det är sålunda, såsom jag redan i mitt förra arbete framhållit, långt ifrån gifvet, att de af isen tilläfventyrs obetäckta bergtopparne varit blottade för snö. Denna åsigt delas äfven af K. J. V. STEENSTRUP, som skriftligen meddelat mig, att han mot professor WARMING uttryckligen framhållit, »at fordi vi ikke fandt Spor af Isskuring, saa var dermed ikke sagt, at Landet havde været bart for Sne». En nödvändig följd af de på alla sidor förhandenvarande snö- och ismassorna var naturligtvis äfven en sänkning af temperaturen, och jag har redan i min förra uppsats, der detta påpekats, erinrat om den af NANSEN iakttagna låga temperaturen inne på inlandsisen. Med anledning häraf hänvisar WARMING till det

sedan gammalt kända sakförhållandet, att skogar finnas i Sibirien inom områden, der medeltemperaturen för Januari är — 49° C. Jag förstår ej alls hvad detta hör hit; NANSEN iakttog den låga temperaturen redan i Augusti, d. v. s. slutet af sommaren, hvilken för de arktiska växterna ensamt kommer i betraktande, medan vinterns större eller mindre kyla är utan betydelse. Hvarföre WARMING då hänvisar till vinterkölden är mer än jag kan fatta; den gör ju hvarken till eller från.

Denna ökade snönederbörd och åtföljande sänkning af temperaturen måste dessutom hafva haft med sig äfven en betydlig sänkning af snögränsen och på samma gång af vegetationsgränsen. På allt detta svarar WARMING ej, utan hänvisar till sina föregående jemförelser, hvilka äro allt annat än rigtiga. Det är sålunda icke sannt, att alla berg, som äro isfria, äfven i sina högsta regioner hysa fanerogama växter. Så meddelar HEER,[1]) att i Berninaalperna, af hvilka flere toppar nå öfver 3,898 meter, den högsta till 4,051, upphörde fanerogamerna på t. ex. Piz Palü vid 3,454 meter, »höher oben waren die aus dem Firn hervortretenden Felsgräte völlig kahl», och HEER uttalar derföre den förmodan, att fanerogamerna i dessa alper nå en höjd af högst 3,573 meter. Det var endast två arter, som träffades vid ofvan angifna höjd på Piz Palü. På Monte Rosa (4,638 meter) fanns den sista, en enda art, vid 3,825, på Mont Blanc (4,810 meter), vid 3,667 och på Matterhorn (4,482) vid 3,978 meters höjd öfver hafvet. Den högst iakttagna fanerogama växten i alperna är *Ranunculus glacialis*, som på Finsteraarhorn funnits vid 4,269 meters höjd, endast 6 meter från toppen, men såsom vi ofvan sett nå fanerogamerna i allmänhet ej på långt när så högt, och hade somrarne varit kalla och molnhöljda med riklig snönederbörd, så hade de naturligtvis stannat vid ännu betydligt lägre nivå. För Spetsbergens vidkommande har jag redan i mitt förra arbete framhållit, att jag vid 78° n. br. på vestkusten funnit den fanerogama vegetationen upphöra redan vid 900 meters höjd öfver hafvet, något som ej med ett ord

---

[1]) O. HEER, Uebersicht der nivalen Flora der Schweiz. Jahrb. d. Schweiz. Alpenclubs. Bd. 19. 1884

omnämnes af WARMING. Jag kan här äfven anföra ett liknande exempel från Grönland sjelft, tack vare ett meddelande från assistent K. J. V. STEENSTRUP, hvilken äfven tillåtit mig att offentliggöra detsamma. Denne berättar, att han 1888 från Igaliko en varm sommarafton besteg det ungefär 1,727 meter höga Kistefjeldet, på hvars topp ej syntes spår af snö. Då han vid midnattstid nått upp, insveptes emellertid toppen af dimma, som, under loppet af ett par timmar, på jorden afsatte ett par tum mägtigt lager af snö och is (»Isslag»), under det att temperaturen samtidigt sjönk ett par grader under fryspunkten. I Igaliko antog man, att vädret varit utmärkt, ty dimman tog sig derifrån helt obetydlig ut. På toppen syntes, såvidt STEENSTRUP kunde iakttaga, inga andra växter än lafvar, först ungefär 630 meter längre ned, d. v. s. vid ungefär 1,100 meters höjd ö. h., träffades en enstaka *Saxifraga*.[1])

STEENSTRUP framhåller vidare, att äfven nu är ju den isfria delen af Grönland relativt obetydlig, och än mindre måste ju den isfria delen hafva varit, då inlandsisen var ungefär 950 meter mägtigare än nu. Han anser det derföre otänkbart, att t. ex. Igalikos vegetation skulle kunnat existera, om den flyttades 950 meter högre upp på bergen — äfven under förutsättning, att de meteorologiska förhållandena under istiden hade varit desamma som nu, hvilket naturligtvis ej var förhållandet — ty till och med nu finnas ju vid sagde höjd nästan inga växter, fastän bergen der bestå af den lätt förvittrade eleolitsyeniten. Temperaturen aftager ju hastigt med höjden, och den dimma, som om sommaren så ofta inhöljer bergtopparne, afsätter sig der såsom snö och is.

Så långt STEENSTRUP. Det har varit mig en särskild tillfredsställelse att erfara, att en med Grönlands naturförhållanden

---

[1]) På andra ställen synes den fanerogama vegetationsgränsen ligga något högre. I WARMINGS förteckning på de 112 arter, som äro funna högre än 628 meter, gå 34 till och öfver 952 meter, 26 öfver 1,256 och 7 öfver 1,413 meter. Den högst iakttagna växten är *Papaver nudicaule* vid 1,507 meters höjd öfver hafvet.

inom olika delar af landet så förtrogen forskare alldeles oberoende kommit till samma åsigter, som de af mig förfäktade.

När WARMING hänvisar till Grinnell land, hvarest vid Discovery Bay (81° 42′) iakttagits omkring 70 kärlväxter, och sedermera påstår: »Jeg gaar altsaa den ganske naturlige Vej: jeg opsöger de Steder paa Jorden, hvor jeg antager, at der er störst Overensstemmelse med Istidsforholdene, og ud fra dem drager jeg mine Slutninger»; — så måste jag på det bestämdaste bestrida att han gjort detta. Det finnes intet land inom högre breddgrader, som visar större motsats till istidens förhållanden, än just Grinnell land. Under istiden var Grönland ej blott betäckt af inlandsis, utan denna var ännu ansenligare än nu; Grinnell land saknar i anförda del inlandsis helt och hållet. Under istiden hade Grönland en oerhördt stor nederbörd; Grinnell land utmärkes genom ovanligt torr luft. Under istiden voro somrarne i Grönland relativt kalla, i Grinnell land äro de tvärtom relativt varma; och medan luften i Grinnell land ofta är klar, så att solljuset kan verka med all sin kraft, måste den under istiden i Grönland varit öfvervägande molnhöjd. Det af WARMING anförda exemplet är derföre det sämsta möjliga, och jag har redan i min föregående uppsats framhållit, att det hade varit vida rigtigare, om WARMING vid sin jemförelse anfört den andra sidan af Smith Sound, eller Grönland norr om 81° n. br., der dock en inlandsis ännu finnes, ehuru förhållandena äfven der, på grund af den ständiga sommardagen och det torra klimatet, onekligen numera torde gestalta sig gynsammare än under istiden i mellersta och södra Grönland. Ett ännu större närmande till istidsförhållandena torde vara att finna inom Frans Josefs land, hvars firngräns, enligt PAYER, är belägen redan vid omkring 300 meter öfver hafvet, och hvilket »t. o. m. under sommaren synes vara begrafvet under ett snötäcke, som endast afbrytes af klippväggar samt ryggarne och sluttningarna af enstaka bergsträckor» (PAYER). Härifrån äro hittills endast 14 kärlväxter kända.[1])

---

[1]) Enligt PAYER samt insamlingar under LEIGH SMITHS båda expeditioner.

Det är härvid särskildt beaktansvärdt, att just de områden inom de arktiska trakterna, der molnhöljd himmel med dimmor och kall blåst äro rådande — d. v. s. de yttre kuststräckorna — äro så ytterligt fattiga på högre växter. Detta har blifvit framhållet af nästan alla resande i de arktiska trakterna, bl. a. äfven af WARMING sjelf,[1]) och förhållandet framträder i all sin bedröflighet på nordspetsen af Prins Charles Foreland utanför Spetsbergen, der TH. FRIES träffade den yppigaste lafvegetation, som han iakttagit på Spetsbergen, medan »fanerogamvegetationen deremot var reducerad till så godt som ingen». Här torde vi kanske hafva en vigtig fingervisning om huru vegetationen förhållit sig under istiden.

Sammanfatta vi nu det ofvan sagda om förhållandena under istiden — större nederbörd, kalla, fuktiga somrar med molnhöjd himmel, större utbredning och mägtighet af inlandsis och glacierer, sänkning af snögränsen och på samma gång äfven af vegetationsgränsen, — så synes mig, att man skall vara bra djerf för att våga påstå, att hufvudmassan eller ens »kärnan» af Grönlands vegetation kan hafva öfverlefvat istiden i landet. Af isen drefvos växterna upp på bergen, genom snögränsens och temperaturens sänkning — möjligen äfven genom landets högre läge öfver hafvet — flyttades vegetationsgränsen nedåt, så att det är osäkert om någon lämplig plats för växterna slutligen fanns qvar. Min personliga öfvertygelse är den, att fanerogamfloran varit inom Grönland under istiden fullständigt eller nästan fullständigt utrotad, men då detta ej kan med säkerhet bevisas, så har jag ansett riktigast att uttrycka mig så som i förra arbetet skett: på sin höjd några få tiotal arter torde under istiden i Grönland kunna hafva egt bestånd,[2]) medan det är lika möjligt, att hela den fanerogama vegetationen derstädes varit utdöd.

---

[1]) Meddelelser om Grönland. 8. Sid. 186.

[2]) Och detta i så fall snarare i norra Grönland än i det södra. Ty om nederbörden, såsom antagligt är, härrört från Atlanten, så torde den varit minst i de nordligaste trakterna.

Då Warming icke närmare säger, hvad han menar med »kärnan» af Grönlands vegetation, så är det ju svårt att ingå på någon diskussion om densamma. Af ett yttrande sid. 285 i antikritiken ville det emellertid synas, som afsåges dermed »det arktiske og en stor Del af det amerikanske Element». Låt oss nu för ett ögonblick antaga rigtigheten af min åsigt, att de högre växterna voro försvunna från Grönland under tiden för isens största utbredning, samt att de sålunda först under den senglaciala eller postglaciala tiden till Grönland invandrat. Huru skulle då de amerikanska växterna vara fördelade öfver landet? Jo, den största mängden skulle väntas förekomma på vestkusten mellan 66° och 68° n. br., der Davis Strait är smalast, mera sydliga former skulle man dessutom vänta sig närmare landets sydspets, medan mera högarktiska kunde väntas förekomma vid Smith Sound. Så är i verkligheten också förhållandet, och de amerikanska växternas utbredning på Grönland är i och för sig ett bevis derför, att det vestra elementet icke öfverlefvat istiden derstädes, utan först senare invandrat till landet. Detsamma framgår vidare af deras aftagande utbredning mot söder och öster samt deras fullständiga frånvaro mellan 63° och 66° n. br. på ostkusten. Antager man deremot, att de amerikanska växterna funnos i Grönland före istiden och der öfverlefvat densamma, så är deras utbredning fullkomligt obegriplig. De borde väl då ha funnits till största mängd i södra Grönland, borde icke hafva saknats mellan 63° och 66° n. br. på ostkusten samt borde till stor mängd funnits i nordöstra Grönland. Hvarföre de just till öfvervägande mängd skulle finnas midt för det smalaste stället af Davis Strait, kan ingen menniska begripa. Ty äfven detta område har ju förr till största delen varit betäckt af inlandsisen. Och då Warming erkänner, att de flesta östliga arterna invandrat efter istiden, »fordi de ere for ömtaalige til at have kunnet være der under denne», så är det mer än märkligt, att han icke vill erkänna, att de vestliga äro sent invandrade. Ty dessas utbredning inom Grönland bör, enligt min mening, icke lemna något som helst tvifvel derom, att så varit förhållandet och

kan endast genom ett sådant antagande tillfredsställande förklaras.

På tal om det östliga elementets invandring är WARMING missnöjd dermed, att jag icke mera än jag gjort det framhållit, att han »herom udtalt samme Anskuelser». På öfre delen af N. sid. 26 nämner jag på tre ställen (på 15 rader), att vi härom äro ense. WARMING är dock icke nöjd härmed, han tycker, att det hade varit rigtigare, »at han (NATHORST) havde nævnt mig (WARMING) först og saa sig selv». Mig sjelf har jag nu visserligen icke nämnt, men om jag vetat, att jag dermed kunnat bereda professor WARMING någon tillfredsställelse, skulle jag förvisso icke underlåtit att stilisera stycket så, att hans namn på ett eller annat sätt kommit att börja detsamma. I sak hade dock dermed icke någon förändring skett, ty äfven såsom det nu står har jag gifvit honom allt hvad honom tillkommer.

Hvad WARMING anför om invandringen från vester (sid. 285—289) kunna vi förbigå, då det icke innehåller något i sak nytt eller något, som är af den beskaffenhet att det ens i ringaste mån skulle kunna modifiera hvad jag förut uttalat derom. Blott en liten anmärkning i förbigående med anledning af WARMINGS yttrande om följande uttalande af mig: »Troligen hafva de arter, som hafva största spridningen, såsom *Dryas integrifolia*, *Potentilla tridentata*, *Alsine grönlandica*, *Saxifraga tricuspidata*, invandrat först, medan deremot de, som hafva mera sydlig utbredning, inkommit senare». »Denne Slutning», säger WARMING, »er naturligvis urigtig, thi det kan lige saa godt være etc. etc.; deres store Almindelighed kan være en simpel Fölge af rent biologiske Forhold». Ja, naturligtvis; på grund af vissa biologiska förhållanden har den ena växten en större utbredningsförmåga än den andra, vare sig nu detta beror på frönas beskaffenhet eller växtens fullkomliga tillpassning till de yttre förhållandena, härdighet o. s. v. Men denna spridningsförmåga hade växten äfven innan den kom till Grönland, och med min uppfattning, enligt hvilken de amerikanska arterna äro till detta land invandrade efter istiden, är det gifvet, att de, som voro

härdigast, mest utbredda och utrustade med bästa spridningsförmåga, skulle anlända först, alldeles såsom en fågel med stor utbredning och kraftig flygförmåga har större utsigt att nå ett annat land än en mindre allmän fågel, hvars flygförmåga är klen. Den förra kan redan under normala förhållanden komma dit, den senare blott undantagsvis. WARMINGS anmärkningslusta drifver honom i samband härmed att lika obefogadt söka kritisera hvad jag 1883 yttrat i mitt arbete om Spetsbergens kärlväxter i samma sak. Jag förstår för öfrigt ej hvad detta har med Grönlands vegetation att skaffa.

Mot mitt ådagaläggande deraf, att inlandsisen begränsar det amerikanska elementet i Sydgrönlands nutida vegetation säger WARMING, att »ogsaa dette er naturligvis urigtigt, for saa vidt som det er ensidigt». På hvad sätt bevisar nu WARMING detta? »At Inlandsisen . . . spiller en Rolle ved de floristiske Grænser i Öst, saaledes som NATHORST siger, betvivler jeg heller ikke, men det er selvfölgelig ikke Isen fortrinsvis, der sætter en Grænse, lige saa lidt som anden Steds Havet, men den Omstændighed, at der ingen Vandringsmidler findes over den eller forbi den netop paa det paagjældende Sted.» Ja, då man talar om en gräns af ett eller annat slag, som hindrar växternas utbredning, så menar man naturligtvis, att deras spridningsmedel här ej räcka till. Hvad WARMINGS upplysning skall tjena till, är mig derföre obegripligt, och ej har han dermed i ringaste mån kunnat ådagalägga, att mitt påstående var »urigtigt», tvärtom.

Vi komma nu till frågan om den forna landförbindelsen mellan Grönland och Europa. I sina föregående arbeten hade WARMING origtigt antagit, att förbindelsen — om den egt rum — skulle beträffat Grönland söder om 66° n. br., hvilken origtighet jag i mitt förra arbete med hänvisning till den åtföljande kartan påpekat. Vidare hade WARMING anfört åtskilliga geologiska förhållanden, som enligt hans mening skulle utgöra geologiska bevis mot den fordna landförbindelsen. Att dessa förhållanden icke kunde utgöra något bevis för hans åsigt, har jag lika-

ledes ådagalagt, och jag antager, att äfven WARMING sjelf insett origtigheten af sina antaganden härom. Deremot är det icke sannt, att jag behandlat honom såsom »Ignorant» i geologiskt hänseende, hvilket han nu påstår, ty jag har ej nöjt mig med några kategoriska uttalanden, utan framlagt bevis, hvilkas rigtighet eller origtighet kunna pröfvas af hvem som helst. Sjelf hade WARMING i fråga om landförbindelsens geologiska berättigande äfven för äldre tider yttrat sig på ett så tvärsäkert sätt, att det väl torde förtjenat ett skarpare svar än han fått. Jag nöjde mig emellertid med att påpeka, att han i geologiskt hänseende icke kunnat anföra ett enda bevis mot densamma.

Nu få vi emellertid höra, att enligt WARMINGS mening, skulle jag »heller ikke anfört et eneste Bevis for samme». Detta är åter hvad man plägar kalla sanning med modifikation. Ty jag har verkligen bevisat, att Island förr sträckt sig längre mot nordvest, hvilket framgår af basaltbäddarnes beskaffenhet och af de sänkningar, som bevisligen utanför vestkusten af Island egt rum och väl ännu delvis pågå. Vidare har jag påpekat, att hafvet under istiden stod betydligt lägre än nu, hvilket äfven måste haft väsentligt inflytande på förbindelsen mellan Island och Grönland. Jag har dock icke stannat härvid, utan jag har sanningen likmätigt framhållit, att man från geologisk sida ännu icke kan uppgifva måttet på förändringen, hvarför man följaktligen icke vet, om landförbindelsen mellan Island och Grönland under istiden var fullständig. Det enda vi kunna påstå, är att »afståndet mellan de båda länderna då i alla händelser måste hafva varit minskadt». Af detta medgifvande vill nu WARMING begagna sig för att kategoriskt förklara, att jag icke kunnat framlägga ett enda geologiskt bevis för den forna landförbindelsen. Detta är emellertid alldeles origtigt. WARMING borde sagt, att jag ej kunnat bevisa, att landförbindelsen varit fullständig, hvilket är något helt annat, och samtidigt hade bort erinras derom, att man lika litet kan anföra något bevis mot denna landförbindelses fullständighet. Alldeles detsamma gäller om tiden för dess upphörande; om den egt bestånd, så har detta

snarast (oafsedt äldre tider) skett under istiden, huru snart den derefter förstördes, kunna vi ännu icke säga. Hvad som deremot måste anses såsom en märkvärdig inkonseqvens hos WARMING, är då denne antager, att en landförbindelse väl har existerat mellan Island och Europa, men icke mellan Island och Grönland. För den förra kunna emellertid inga andra skäl anföras än för den senare, och man har svårt att tänka sig den ena landförbindelsen ega bestånd utan den andra.

Eftersom WARMING i samband med denna fråga citerar äfven mitt arbete öfver Spetsbergens kärlväxter, vill jag ej underlåta att anföra, hvad jag der yttrar om tiden för landförbindelsen mellan Grönland och Europa. Der heter det (sid. 67), att »det är icke troligt, att denna egt rum under någon senare afdelning af den postglaciala tiden». I »Polarforskningens bidrag» yttras om samma fråga, att landförbindelsen existerat ännu »vid allra första början af isens afsmältning». I mina »kritiska anmärkningar» yttras härom (N. sid. 46): »Det är möjligt,[1]) att detta antagande var origtigt, i alla händelser torde den glaciala florans circumpolära utbredning stå i samband med en närmast före istiden och vid dennas början existerande landförbindelse mellan Europa och Grönland» etc. Så långt mina uttalanden om tiden för landförbindelsens existens. Nu meddelar WARMING en skrifvelse från professor A. BLYTT i Kristiania, enligt hvilken denne ej skulle påstått, att landförbindelsen existerat under den postglaciala tiden. Mot hvem WARMING egentligen drager i härnad,[2]) då han nu vidt och bredt söker bevisa, att någon postglacial landförbindelse mellan Island och Grönland icke existerat, är derföre svårt att inse. Då emellertid dessa resonnemanger innehålla en mängd origtigheter och motsägelser, skall jag här påpeka ett och annat. WARMING menar, att om landförbindelsen egt rum under istiden och efter denna, så att golf-

[1]) Men derföre icke så alldeles säkert.

[2]) I samband med denna fråga talar WARMING i sina föregående danska, tyska och franska arbeten om en viss »GEICKIE», som skulle antagit den postglaciala landförbindelsen. Så vidt jag vet, finnes ingen forskare med detta namn, utan förmodligen syftas härvid på professor J. GEIKIE i Edinburg.

strömmen här kunnat verka, obehindrad af kalla hafsströmmar (något som jag för öfrigt påpekat både i »Spetsbergens kärlväxter» och »Polarforskningens bidrag»), »saa vilde dog sikkerlig navnlig Kystene i betydelig Bredde være dækkede med Plantevæxt især efter den og Plantevandringer foregaa baade fra Grönland til Island langs Broens Sydside og omvendt. En Blandingsflora vilde være Resultatet, og ikke blot Artsbestanden vilde være bleven meget mere lig, end Tilfældet nu er, men selve Vegetationen vilde være bleven langt mere overensstemmende. Mon Islands Heder da havde havt det Særpreg, som Mangelen af *Cassiope tetragona*, *Saxifraga tricuspidata*, *Dryas integrifolia*, *Rhododendron lapponicum*, *Phyllodoce cærulea* o. a. give dem?» WARMING antager sålunda här, att ifrågavarande växter funnos på Grönland under istiden, hvilket hvarken är troligt eller af honom kunnat bevisas. Vidare förbiser WARMING äfven här dessa växters utbredning inom Grönland. *Saxifraga tricuspidata* finnes blott på Grönlands vestkust norr om 64°, och *Dryas integrifolia* är icke funnen någonstädes på ostkusten norr om 61°. *Cassiope tetragona* finnes, enligt WARMINGS egna listor, icke på Grönlands vestkust söder om 64°, och på den östra är den icke funnen söder om 73° n. br. Huru dessa växter då skulle kunnat invandra till Island öfver landförbindelsen är derföre svårt att inse. Hvad så *Rhododendron* och *Phyllodoce* angår, så äro båda dessa arter funna på Island, fastän de der nu äro sällsynta. Men hvem garanterar, att de förr ej varit allmänna der, fastän de numera blifvit till största delen undanträngda af de senare invandrade hedväxterna, såsom *Calluna vulgaris*, *Arctostaphylos uva ursi*, *Vaccinium myrtillus* o. s. v.? Äfven dessa WARMINGS invändningar reducera sig sålunda vid närmare granskning till helt och hållet betydelselösa.

Och skall frånvaron af en »halv Snes» grönländska arter på Island bevisa, att ingen landförbindelse med Grönland egt rum och att ifrågavarande arter nödvändigt öfverlefvat istiden på Grönland, så måste man ju i analogi härmed antaga, att frånvaron af de 136 isländska arterna på Färöarne än mera bin-

dande måste ådagalägga, att en landförbindelse mellan Island och dessa varit omöjlig samt att samma 136 arter måste hafva öfverlefvat istiden på Island. Men WARMING vill här ej höra talas om hvarken det ena eller det andra, utan han antager, såsom vi sett, ej blott denna landförbindelse, utan i fråga om Island heter det, att isen under istiden der »fortrænger den störste Del af dets Vegetation og udrydder mange Arter (men maaske ikke alle)», samt vidare »hvis der ikke har været isfrit Land, eller kun lidet, maa Tallet af overlevende Planter været 0 eller meget mindre end i Grönland.» Huru WARMING vill förklara dessa motsägelser, skulle vara intressant att veta.

I min föregående uppsats har jag redan påpekat det origtiga i de af WARMING anställda jemförelserna mellan Island och Grönland och kan derföre här hänvisa till densamma. Dessa invändningar hafva lika litet som de öfriga kunnat af WARMING vederläggas. På samma gång jag vidare framhållit, att landförbindelsens postglaciala betydelse — förutsatt att den ännu under denna tid existerat — i alla händelser måste hafva varit af underordnad vigt, har jag sökt ådagalägga den stora betydelse, som en sådan måste egt under den preglaciala tiden, enär först härigenom den arktiska vegetationens circumpolära utbredning erhåller en tillfredsställande förklaring.[1]) Denna efter långvarigt öfvervägande framkastade och af många sannolikhetsgrunder stödda hypotes anser sig WARMING kunna affärda med följande ord: »Om præglaciale Landforbindelsers Betydning og NATHORSTS Spekulationer over Vandringer, synes det mig ikke værd at ofre noget Ord; dertil er det hele for usikkert».

Vår tids vetenskap erkänner icke kategoriska uttalanden, utan den fordrar bevis. Hade anförda yttrande kommit från en auktoritet på det växtgeografiska området, så hade det möjligen kunnat ursäktas, ty man hade då måst antaga, att förkastelsen berodde på en sakkunnig pröfning af de åsigter, som kritiserats. Såsom nu är förhållandet betyder uttalandet mindre än intet;

[1]) Se härom min föregående uppsats samt i synnerhet den tyska uppsatsen i ENGLERS Botanische Jahrbücher. Bd. XIV.

jag är tvärtom säker derpå, att de i dessa frågor opartiske och sakkunnige forskarne skola gifva erkännande åt det försök till förklaring jag sökt afgifva öfver en af växtgeografiens gåtfullaste frågor.[1])

Jag hade hoppats, att här kunna sluta, men professor WARMING har i sin uppsats ett särskildt kapitel »personlige Bemærkninger», hvilket ej alldeles kan förbigås. Jag har i min föregående uppsats framhållit, att WARMING icke nämner mina »visserligen obetydliga» observationer med svärtade termometrar, men jag säger dervid uttryckligen, att jag antager detta »bero på förbiseende». WARMING säger nu, att han icke vet, hvar dessa uppgifter finnas; de stå emellertid i »Den andra Dicksonska expeditionen till Grönland» sid. 270. Då WARMING vidare förbisett, att jag i samma arbete, sid. 329—330, anfört KANES iakttagelser öfver växtligheten på ett ställe mellan Kap York och Kap Dudley Diggs, så skulle man kunnat tro, att detta arbete helt och hållet undgått hans uppmärksamhet, men det citeras dock (I, sid. 198, noten) vid en annan fråga.[2])

Såsom svar på min förundran deröfver, att STRÖMFELTS arbete icke af WARMING citerats, fastän det innehåller en efter dåvarande fynd fullständig förteckning öfver Grönlands, Islands och Färöarnes växter samt dessutom behandlar frågan om invandringen af Grönlands flora från Skandinavien, svarar denne, att »det er en Forglemmelse». Efter denna förklaring har jag natur-

---

[1]) Sjelf anser sig ju WARMING (I, sid. 206, noten) kunna antaga en preglacial landförbindelse mellan Grönland och Norge blott af den grund, att dessa länder »have samme Snyltesvampe»!

[2]) WARMING säger nemligen här på grund af NORDENSKIÖLDS anmärkning, att expeditionens zoologer ej funno skalbaggar af det slag, om hvilka entomologerna säga »habitat in stercore bovino» och som kunde vara införda med kreaturen från Europa, »hvorledes dette skal gaa til, begriber jeg for övrigt ikke, da Skarnbasser og lignende jo ikke findes paa eller i Kvæget, og Gödning eller Jord med Dyr eller Æg i förte Nordboerne vel ikke over fra Island». Den, som sett fartyg, på hvilka kreatur transporteras, vet dock, att åtskillig »Gödning» hopas derstädes, och om kreaturen förts ombord en eller ett par dagar före afresan, torde lukten af »Gödningen» nog kunnat locka åtskilliga skalbaggar dit, hvilka sedermera kunnat medfölja på resan. Möjligheten kan sålunda icke förnekas.

ligtvis alls intet att säga, och jag betviflar ej ett ögonblick, att det verkligen förhåller sig så, som WARMING säger, ehuru jag för dennes egen skull måste beklaga, att »Forglemmelsen» egt rum.

I mina kritiska anmärkningar har jag vidare framhållit det egendomliga deruti, att WARMING, då han (I, sid. 170 och 175) talar om Grönland såsom glacialväxternas hemland, icke med ett ord omnämner, att samma åsigt redan uttalats på flere ställen af mig i »Polarforskningens bidrag» etc., hvilken WARMING annars brukat citera, då det gällt anmärkningar. Jag tillfogar på samma gång uttryckligen: »om den (åsigten) först uttalats af mig eller dessutom före mig af någon annan är härvid likgiltigt» etc. Detta tyckes WARMING hafva förbisett, ty han utbreder sig nu på två sidor (295—296) deröfver, om jag är den förste, som uttalat detta eller ej. Jag kan försäkra professor WARMING, att detta är mig alldeles likgiltigt samt att jag ej ens sjelf kommer ihåg, huru dermed förhåller sig, »men det synes mig, som borde WARMING i sin till stor del mot mig rigtade framställning äfven hafva citerat mig, då han uttalar åsigter, som redan stå att läsa i min uppsats». Detta är allt. I samband härmed uttalar WARMING, att anförda arbete (»Polarforskningens bidrag» etc.) icke kan anses annorlunda än såsom »et populært Arbejde — i det höjeste halvvidenskabeligt». Så är också meningen med såväl denna som andra uppsatser i NORDENSKIÖLDS »Studier och forskningar», men det är ju endast till framställningssättet, som ett populärt arbete skiljer sig från ett vetenskapligt.

Så återkommer WARMING slutligen till hvad jag sagt om de östra arternas utbredning på Grönlands vestkust, i samband med påvisandet deraf, att ett särskildt utbredningsområde för dessa arter äfven tyckes finnas längre upp på vestkusten. Då jag i sammanhang härmed nämner, att detta område — hvilket, så vidt jag kan erinra mig, icke förut blifvit särskildt uppmärksammadt — möjligen torde stå i samband med fröspridning genom storisen, anser WARMING, att jag här bort anföra, hvad han redan sagt om transport med samma is. En half sida längre upp har jag emel-

lertid redan framhållit, att WARMING och jag i fråga om de östliga arternas postglaciala invandring öfver hafvet till hufvudsaklig del äro ense, och jag kan derför ej förstå, hvarföre jag skulle behöfva ånyo upprepa samma sak några rader längre ned. För öfrigt talar WARMING uttryckligen om »en Plante-Vandring fra Island til Syd- og Östgrönland» (I, sid. 214), medan det här var tal om spridning till högre breddgrader på vestkusten. Sjelf har han ej med ett ord omnämnt GRISEBACHS åsigter derom, att Grönlands vegetation härstammar från norra Asien, hvarifrån den medelst frötransport på drifisen skulle funnit sin väg till och längs ostkusten samt sedan längs vestkusten norrut.

Jag har, såsom i det föregående nämnts, icke vid min undersökning kunnat använda WARMINGS tabeller, då det gällt att få närmare reda på en arts utbredning, enär de i detta hänseende icke erbjuda tillräckliga upplysningar. Jag har i stället måst hålla mig till samma källor som WARMING sjelf, och då tvenne forskare behandla samma fakta — i detta fall Grönlands vegetation, sådan vi känna den genom LANGES Conspectus och andra arbeten — är det på förhand gifvet, att anförandet af desamma måste hos båda förete åtskilliga likheter. Men att på grund deraf, såsom WARMING slutligen gör, komma med det påståendet, att i mina kritiska anmärkningar »fra först til sidst repeteres Meninger og Resultater der . . . allerede findes hos mig (WARMING), i alt Fald i Hovedtræk», är dock alltför meningslöst. Utom i en och annan fråga af underordnad betydelse, äro väl resultaten af våra undersökningar så skilda som gerna möjligt är. Jag torde ej närmare behöfva ådagalägga detta, det framgår af nästan hvarje sida såväl i denna som i min föregående uppsats. Och då WARMING slutligen lemnar en resumé af de resultat, till hvilka han kommit, så behöfver jag ej annat än hänvisa till hvad som ofvan anförts i denna uppsats för att på samma gång kunna säga, att äfven dessa resultat äro origtiga, måhända med undantag af punkten F, om nemligen med »mange af Grönlands Arter» icke afses mer än en ringa bråkdel af vegetationen.

Såsom bekant, hade HOOKER kommit till den slutsatsen, att Baffins Bay bildade en skarp gräns i växtgeografiskt hänseende mellan en nästan rent europeisk flora på dess ostsida och en flora med rik inblandning af amerikanska arter på dess vestsida. Denna slutsats var då (1860) helt naturlig, medan man deremot numera vet, att Grönlands vestkust i verkligheten är betydligt rikare på amerikanska arter än HOOKER antagit. WARMING uttalade i motsats härtill, att Danmarkssundet bildade gränslinien för en utprägladt europeisk flora på dess östra, en arktisk-amerikansk på dess vestra sida. Till denna slutsats kom han, i det han utgick från Europa (och samtidigt betraktade Grönland såsom ett växtgeografiskt helt). Om man emellertid i stället utgår från Amerika, och använder samma undersökningsmetod som WARMING, så skulle man komma till den slutsatsen, att Baffins Bay (Davis Strait) bildade gränslinien mellan en utprägladt amerikansk flora på dess vestsida och en arktisk- och subarktisk-europeisk på dess ostsida.

I sjelfva verket gestalta sig ju förhållandena sålunda, att de europeiska och amerikanska växterna på Grönland delvis äro blandade med hvarandra, gränserna skjuta in öfver hvarandra. Om man derföre ville betrakta Grönland såsom ett växtgeografiskt helt, hvilket det emellertid icke är, så kan dess vegetation hvarken kallas rent europeisk, såsom HOOKER velat, och ej heller arktisk-amerikansk såsom WARMING yrkat. Man kan då ej gerna definiera landet på annat sätt än såsom ett gränsområde, der en del vestliga arter hafva sin ostgräns och en del östliga sin vestgräns. Gränsen för de senare är, såsom HOOKER velat, Baffins Bay och Davis Strait, medan gränsen för de förra i södra Grönland icke sammanfaller med Danmarkssundet, utan betecknas af inlandsisen och en från denna på östra kusten fordom utskjutande isström söder om 62° 18′ n. br. Nordöstra Grönland är ännu för litet kändt för att man skulle kunna yttra sig om gränsens närmare förlopp derstädes.

De vestliga arternas utbredning inom Grönland är mycket enkel och lätt att fatta. De hafva invandrat jemförelsevis sent och hafva derföre ännu ej hunnit sprida sig rundt kring landet. Det finnes derföre ännu kuststräckor, inom hvilka de helt och hållet saknas (ostkusten mellan 63° och 66° n. br.), eller der de äro få (nordöstra Grönland). Svårare är att förklara de östra arternas utbredning, och denna synes mig ej ännu i alla delar vara klar. Det skulle ej förundra mig, om man framdeles blefve nödsakad att delvis sätta densamma i förbindelse med en invandring redan under den interglaciala tiden.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts. fr. sid. 196.)

Cincinnati. *Cincinnati Society of natural history.*
Journal. Vol. 13 (1890/91): N:o 1–4. 8:o.

Firenze. *R. Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento.*
Pubblicazioni. st. 8:o.
Sezione di scienze fisiche e naturali. N:o 12—14. 1884—88.
» » medicina. N:o 9: Vol. 3–4. 1885—1886.
» » filosofia e filologia. N:o 21. 1888.

Frankfurt a/M. *Senckenbergische Naturforschende Gesellschaft.*
Hartert, E., Katalog der Vogelsammlung im Museum der Gesellschaft. 1891. 8:o.

Harlem. *Hollandsch Maatschappij der Wetenschappen.*
Huygens, Chr., Oeuvres complètes, publiées par la Société Hollandaise des sciences. T. 3. 1890. 4:o.

— *Teylers godgeleerd Genootschap.*
Verhandelingen rakende den natuurlijken en geopenbaarden Godsdienst. (2) D. 12. 1890. 8:o.

La Plata. *Observatorio.*
Anuario. Año 1891. 12:o.

London. *Entomological society.*
Transactions. Year 1890. 8:o.

Luxemburg. *»Fauna», Verein Luxemburger Naturfreunde.*
Mittheilungen aus den Vereins-Sitzungen. Jahrg. 1(1891): H. 1. st. 8:o.

Madison, U. S. *Washburn observatory.*
Publications. Vol. 7: P. 1. 1890. 4:o.

Meriden, U. S. *Scientific association.*
Proceedings and transactions. Vol. 4 (1889—90). 8:o.

New York. *Academy of sciences.*
Annals. Vol. 4: Index; 5: N:o 4–8. 1890. 8:o.
Transactions. Vol. 9 (1889/90): N:o 5–8. 8:o.

— *American museum of natural history (Central park).*
Bulletin. Vol. 3: N:o 1. 1890. 8:o.

Melbourne. *Geological society of Australasia.*
Transactions. Vol. 1: P. 5. 1891. 4:o.
List of members. Year 1890/91. 12:o.

Palermo. *Società di scienze naturali ed economiche.*
Giornale di scienze naturali ed economiche. Vol. 20 (1890). 4:o.

Paris. *Société géologique de France.*
Mémoires. (3) T. 5: 2. Cotteau, G., Échinides éocènes de la province d'Alicante. F. 2. 1891. 4:o.

Pennsylvania. *Geological survey.*
Second geological survey. AA 3: Atlas; I: 5; P 4: Vol. 2–3. Harrisburg 1889—90. 8:o & F.

(Forts. å sid. 260).

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1891. N:o 4.
Stockholm.

Beiträge zur Kenntniss der Actinien-Gattung Bolocera Gosse.

(Vorläufige Mitteilung.)

Von Oskar Carlgren.

[Mitgeteilt den 8 April 1891 durch S. Lovén.]

Johnston beschrieb im Jahr 1832 in Loudon's Magazine of Natural History eine Actinia Tuediæ mit der Diagnose: »corpore crasso, cylindraceo, lævi aut rugis sponte circinato, tentaculis crassis, numerosis, conicis, striatis, castaneis, corpore brevioribus». Einige Jahre später führt Johnston[1]) diese Form zu dem Genus Anthea. Gosse[2]) stellt, mit Hinsicht der leicht abfallenden Tentakeln, für diese Art ein neues Genus, Bolocera auf, und führt es mit Bunodes, Tealia u. a. zu einer Familie: Bunodidæ zusammen. Alle späteren Forscher, so wohl Studer[3]), der eine Boloceraart von den antarktischen Meeren beschrieben hat, als Andres[4]) in seiner schönen Arbeit über Actinien, folgen Gosse. Auch Danielssen[5]) sagt von dieser Gattung (p. 14) . . . . . »I enkelte Henseender nærmer den (Sideractis glacialis) sig vistnok til slägten Bolocera Gosse, som er underordnet Familien Bunodidæ.»

---

[1]) G. Johnston, A History of the British Zoophytes. London 1847.
[2]) P. H. Gosse, A History of the British Sea-Anemones and Corals. London 1860.
[3]) Th. Studer, Monatsberichte d. K. Preuss. Akademie d. Wiss. z. Berlin 1878.
[4]) A. Andres, Le Attinie. (Reale Accademia dei Lincei 1882—83.) Roma 1883.
[5]) D. C. Danielssen, Den Norske Nordhavs-expedition 1876—78. Zoologi. Actinida, Christiania, 1890.

Ich habe eine Bolocera von der schwedischen Westküste untersucht, die nicht recht mit einer vorher beschriebenen identifiziert werden kann, weshalb ich eine neue Species aufgestellt habe. Bei diesen Untersuchungen hat es sich ergeben, dass das Genus in mancher Hinsicht sehr intressant ist, und gar nicht zur Familie Bunodidæ geführt werden kann. Die älteren Autoren dagegen, welche die Bolocera mit der Anthea zuzammenführten, haben ihre systematische Stellung richtiger aufgefasst; sie ist nämlich eine wahre Anthead oder Actinid. Man kann diese Gattung auf folgender Weise im Kürze karakterisieren:

Genus **Bolocera** Gosse.

Actiniden (Antheaden) mit glatter oder fast glatter Körperoberfläche, ohne Randsäckchen, mit gefurchten, leicht abfallenden Tentakeln, die an ihrer Basis einen deutlichen Ringmuskel, um die Tentakeln abzuschnüren, haben.

Ich habe die Art in Folge der verhältnissmässig langen Tentakeln B. longicornis genannt.

B. longicornis n. sp.

Tentakeln nicht gebändert, zahlreich, im voll entwickeltem Zustand in sechs Cyclen geordnet (6—6—12—24—48—96), die innern ungefähr von der Länge des Mauerblatts, Mauerblatt glatt.

Die Farbe des Tieres ist überall fleischrot; oft trifft man doch Tentakeln, die an der inneren Seite braunrot sind; bisweilen sind die Lippenwülste und die Hauptsepten schwach carmingefärbt. Die Grösse wechselt. Das grösste Exemplar, welches ich angetroffen habe, mass in der Länge, wenn das Tier ganz ausgestreckt war, 19 Cm.; die inneren Tentakeln waren eben so lang, die äusseren nicht halb so lang wie die inneren. Ich habe diese Form nur im Gullmarsfjord auf 40—80 Faden Tiefe gefunden. Im Reichsmuseum in Stockholm finden sich doch Exemplare von anderen Lokalen der schwedischen Westküste und Skagerrak.

Die Fussscheibe ist ausgebreitet, mit radialen und cirkulären Furchen versehen, welche ihr ein rautenförmiges Aussehen ver-

leihen. Sie kann, da der Parietobasilarmuskel sehr schwach ist, sich nicht stärker befestigen, weshalb es leicht ist dieselbe von fremden Gegenstanden zu lösen. In konserviertem Zustand und wenn das Tier sehr zuzammengezogen ist, ist die Fussscheibe bisweilen von der Länge des Mauerblatts. Ist dagegen das Tier voll ausgestreckt, so ist das Mauerblatt bedeutend länger als die Breite der Fussscheibe.

Das Mauerblatt, welches im ausgestrecktem Zustand glatt, ohne Nesselwarzen und Cincliden ist, scheint bei Kontraktion mit zahlreichen Ringfurchen und unregelmässigen, dieselben kreuzenden Furchen versehen zu sein, die dem Mauerblatt ein gerunzeltes Aussehen geben. Die Körperoberfläche ist also von gleicher Beschaffenheit wie die von B. kerguelensis.

Was die Bolocera Tuediæ betrifft, sagt JOHNSTON nichts hinsichtlich »the minute, rounded warts», welche GOSSE in seiner Beschreibung erwähnt. Da indessen GOSSE nicht lebende Exemplare gesehen zu haben scheint, sondern meist seine Beschreibung dieser Art nach den Beobachtungen des Herrn W. P. COCKS gegeben, ist es möglich, dass er sich geirrt hatte und dass die kleinen Warzen nur durch den Kontraktionszustand entstanden waren. Ob die von VERRILL[1]) erwähnte B. Tuediæ mit der von JOHNSTON und GOSSE beschriebenen identisch ist, scheint mir sehr zweifelhaft, da er sagt: »It seems to me very doubtful, whether the Actinia digitata of MÜLLER was actually the species, that commonly bears that name in recent European works. The description would apply better to the Bolocera Tuediæ of GOSSE». VERRILL sagt zwar »the description», aber die Beschreibung als auch besonders die Figur, welche MÜLLER gegeben hat, scheint mir hauptsächlich in Betriff der grossen in regelmässigen Reihen angeordneten Tuberkeln und der Lippenwülste wenig geeignet mit den Figuren über Bolocera, die von JOHNSTON und GOSSE gegeben wurden, verglichen zu werden. Es ist daher notwendig durch eine neue Untersuchung zu konstatieren, ob Tuberkel bei

---

[1]) A. E. VERRILL, Brief Contributions to Zoölogy, from the Museum of Yale College N:o XXV. American Journal of Scien. and Arts. S. 3, vol. 6. 1873.

B. Tuediæ vorkommen oder nicht. Ich habe indessen in der Diagnose über die Gattung »fast glatt» aufgenommen.

Ob die Boloceraart, welche an den norwegischen Küsten angetroffen wird, und die von DÜBEN, SARS, KOREN und DANIELSSEN für B. Tuediæ gehalten wird, mit B. longicornis oder B. Tuediæ GOSSE identisch ist, darüber kann ich jetzt mich nicht mit Sicherheit äussern. Nur eine Sache will ich hier hervorheben, dass ich nimmer gefunden, dass die Tentakeln unserer Art bei der Berührung einen brennenden Schmertz verursachen, wie es DÜBEN[1]) in Betreff der norwegischen Art angegeben hat.

Wenn man das Tier aus dem Schleppnetz aufnimmt, liegt der Körper gewöhnlich in zahlreichen Ringfurchen. Besonders sind die unteren Partien des Mauerblatts und die Fussscheibe stark kontrahiert, wie man auf Abbildungen von JOHNSTON der Anthea Tuediæ und auf denen von STUDER über B. kerguelensis sehen kann.

Das Mauerblatt hat wie gewöhnlich keine ektodermale Muskelschicht; die entodermale Ringmuskulatur ist auch nicht besonders gut entwickelt. Dicht unter dem oberen Rand des Mauerblatts findet sich ein diffuser, entodermaler, unbedeutender Sphinkter, durch eine reichliche Faltung der Ringmuskelschicht gebildet. Die feinen, blattartigen Fortsätze der Bindesubstanz, welche die Falten der Muskellamelle stützen, zeigen hier wenige oder keine Verzweigungen, sind aber bedeutend länger als die Fortsätze, auf welchen die übrige Ringmuskelschicht des Mauerblatts sitzt. Schon aus dem Grunde, dass hier ein diffuser Sphinkter vorkommt, kann man die Bolocera nicht zur Familie Bunodidæ, wo sich ein circumscripter Ringmuskel befindet, führen. Und schon aus diesem Umstand, dass das Mauerblatt nur wenig, äusserst langsam und nur im voll lebenskräftigem Zustande des Tieres über die Mundscheibe zuzammengezogen werden kann, versteht man, dass der Sphinkter bei Bolocera nicht circumscript sein kann.

---

[1]) DUEBEN, M. W. v., Om Noriges Hafsfauna, Öfvers. Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förh. I, 1844.

Die Mundscheibe ist platt, dünn und mit radialen Furchen, welche den Insertionen der Septen entsprechen, versehen. Da die Furchen wenig tief sind, sieht man sie wenig, wenn die Mundscheibe ausgespannt ist, sie treten dagegen im Kontraktionszustand deutlich hervor, besonders wenn das Tier konserviert ist. Das Nervensystem ist in der Mundscheibe gut entwickelt und zahlreiche, grosse Ganglienzellen erscheinen überall. Die ektodermalen Muskeln, die im Mesodern nicht eingeschlossen sind, sind ungefähr gleich stark entwickelt wie die entodermalen, aber die Falten der Muskellamelle sind nicht so zahlreich und so verzweigt wie die der Tentakeln.

Das Schlundrohr ist mit zahlreichen Längsfurchen versehen. An dem unteren Ende setzen sich die Schlundrinnen zu den Zipfeln fort, die nahe zur Fussscheibe gehen, an dem oberen bilden sie die Lippenwülste, die deutlich hervorstehen. Andere Lippenwülste sind nicht vorhanden.

Am Rande der Mundscheibe sitzen die zahlreichen Tentakeln, bei voll entwickelten Exemplare nahe 200, in sechs Cyclen angeordnet (6—6—12—24—48—96); die ersteren stehen doch sehr dicht. Bei jüngeren Individuen ist dagegen der äusserste Tentakelkranz mehr oder weniger entwickelt, so dass sich hier nur etwas mehr als 100 Tentakeln vorfinden. Sie sind conisch zugespitzt, mit einer leichten Ausschwellung am Ende, an der Basis zuzammengezogen, der Länge nach gefurcht; die inneren sind am längsten ungefähr von der Länge des Mauerblatts, die äusseren nicht halb so lang wie die inneren. Sie können, wenn das Tier voll lebenskräftig ist, sich sehr bedeutend verkürzen, und legen sich dann oft in unregelmässige, zickzackförmige Falten, so dass die Tentakeln in diesem Zustand ein sehr runzeliges Aussehen haben. Wie andere Boloceraformen kann diese Art leicht die Tentakeln ablösen. Man trifft oft im Schleppnetz nur die abgelösten Tentakeln des Tieres, die lange Zeit ihre Bewegung beibehalten und von dem Uneingeweihten mit Würmern (Gephyreen) leicht verwechselt werden können.

Der Bau der Tentakeln ist sehr eigentümlich und hängt teilweise mit der Ablösung derselben zusammen. Wie oben gesagt, sind die Tentakeln mit Längsfurchen versehen, die um so deutlicher erscheinen je mehr die Tentakeln zusammengezogen sind, während sie, wenn die Tentakeln durch Wasser ausgespannt sind, nicht so deutlich hervortreten. Diese Furchen, die übrigens durch die Untersuchungen von R. HERTWIG,[1]) G. Y. und A. F. DIXON[2]) sich bei anderen Formen (Dysactis crassicornis, Tealia crassicornis und Bunodes thallia) vorfinden, sind durch Faltungen oder Ausbuchtungen vom Mesoderm gebildet. Wenn man Querschnitte durch einen Tentakel macht, sieht man deutlich, wie das Mesoderm eine Menge von Ausbuchtungen macht, die nicht regelmässig, sondern bald schmäler, bald breiter sind. Im letzteren Falle bilden sich oft auf den Rücken flache Furchen. Im Ganzen sind die Furchen und die zwischen ihnen liegenden Rücken etwa dreissig an der Zahl. Von diesen Faltungen auf der ektodermale Seite des Mesoderms gehen zahlreiche, feine, blattförmige Bindegewebsfortsätze aus. Diese Fortsätze, welche etwas verzweigt sind und auf den Rücken und den flachen Furchen am dicksten stehen, aber in den tieferen weiter von einander entfernt und etwas kürzer sind, stützen die ektodermale Muskellamelle, welche, da sie allen Ausbuchtungen des Bindegewebes folgt, eine reichliche Faltung zeigt. So wohl das Epitel wie die ektodermale Nervmuskelschicht erscheint auch in den tieferen Furchen etwas weniger entwickelt. Ganglienzellen habe ich hier nicht mit Sicherheit wahrgenommen.

Das Mesoderm der Tentakeln, welches ich auf gutem, in Osmiumsäure und in zweifach cromsaurem Kali konservirtem Material untersucht habe, ist sehr eigentümlich. Es besteht aus zahlreichen Bindegewebszellen, wie gewöhnlich in eine homogene Zwischensubstanz eingebettet. In ihrer einfachsten Gestalt und

---

[1]) R. HERTWIG. Actiniaria, Supplement. Challenger Report. Vol. 26. 1888.

[2]) G. Y. and A. F. DIXON. Notes on Bunodes Thallia, Bunodes verrucosa and Tealia crassicornis. Scientific Proceedings R. Dublin Soc. Vol. 6 (N. S.) P. 6. 1889.

am meisten treten sie als Kerne, von keinem oder spärlichem Protoplasma umgeben, auf. Oft sind die Kerne doch mit etwas mehr Protoplasma versehen, so dass teils stern- teils spindelförmige oder mehr rundliche Bindegewebszellen entstehen. Die Bindegewebszellen sind indessen hier, und meist bei den am wenigsten reducierten Zellen, von einer blasenförmigen Kapsel umgeben. Jede dieser Kapseln schliesst meistens nur eine Bindegewebszelle ein, recht oft aber trifft man solche, welche zwei oder mehrere Zellen enthalten. Man kann daher die Kapsel nicht als Zellmembran ansehen. Das Mesoderm erhält also ein knorpeliges Aussehen, und das Gewebe muss wohl, wenn nicht als echter Knorpel, doch wenigstens als ein mit Knorpel nahe verwandtes Gewebe angesehen werden. Die meisten Kapseln finden sich in den dem Entoderm zunächst liegenden Partien des Mesoderms, in der Mitte sind die Kapseln oft mehr oder weniger reduciert, und erscheinen an Quer- oder Längsschnitten wie zwei halbmondförmige, gegen einander stehende, stark lichtbrechende Membranen, oder sind ganz und gar verschwunden. Geschlängelte Bindegewebsfasern sind in den Ausfaltungen des Mesoderms zahlreich vorhanden, in übrigen Partien des Mesoderms aber wenig entwickelt.

Das intressanteste in dem Bau der Tentakeln ist das Vorhandensein eines Ringmuskels um dieselben abzuschnüren. Wie gewöhnlich geht zwischen jedem Septum ein Tentakel aus, der nur als eine Ausstülpung von der Mundscheibe zu betrachten ist. Auf jeder Basis des Tentakels, an der Grenze zwischen der Mundscheibe und dem Tentakel, auf dem Punkt, wo die Tentakeln abgeschnürt werden, findet sich nach innen zum Tentakellumen eine Einfaltung vom Mesoderm, die bei der Basis sehr dünn ist, aber sich gegen die Längsachse des Tentakels etwas erweitert, und, um ihre Fläche zu vergrössern, sich in zahlreiche Zweige teilt. Das Entoderm und die entodermale Ringmuskulatur geht auf diese Einfaltung über, und die letztere bildet also auf den Verzweigungen des Mesoderms einen starken Ringmuskel, der, wenn er sich stark kontrahirt, das Tentakellumen

von dem coelenterischen Raum vollständig trennt. Wenn der Ringmuskel dagegen nicht zusammengezogen ist, erscheint er, von oben oder von unten betrachtet, als eine ringförmige Falte, die in der Mitte, um die Verbindung zwischen dem Lumen des Tentakels und des Körpers zu vermitteln, eine Öffnung frei lässt. Wenn die Tentakeln mit Wasser ausgespannt sind und eine heftige Kontraktion des Ringmuskels stattfindet, lösen sich die Tentakeln gleich unter dem Punkt, wo die ringförmige Falte abgeht. Dies geschieht um so leichter, da das Mesoderm hier eine geringe Mächtigkeit erreicht hat. Auf einem Längsschnitt durch die Basis des Tentakels sieht man nämlich gleich unter der ringförmigen Falte eine oft starke Einkerbung des Mesoderms der Mundscheibe, welches also hier sehr dünn ist.

Wenn sich der Tentakel unterhalb der ringförmigen Falte ablöst, bleibt also der Ringmuskel auf dem abgelösten Tentakel sitzen. Betrachtet man nämlich die abgerundete Basis eines abgelösten Tentakels, so sieht man in der Mitte die ringförmige, vom Meso- und Entoderm gebildete Falte, die dicht an der Öffnung von dem eigentlichen Sphinkter etwas verdickt ist. Bei der Basis der Falte gehen Ekto- und Entoderm in einander über. Die Grenze zwischen ihnen ist scharf markiert, da man auf der einen Seite eine glatte Membran, auf der anderen die Wand selbst des Tentakels mit ihren Furchen und Rücken hat.

Was die Ursache dieser Selbstverstümmelung ist, ob sie zum Schutz des Tieres dient, oder ob andere Faktoren dabei einwirken, darüber kann ich mich gegenwärtig nicht äussern.

An der Spitze der Tentakeln habe ich keine Öffnung wahrgenommen, wenigstens kann an konserviertem Material keine solche entdeckt werden. In Betreff der übrigen Boloceraarten hat STUDER, was B. kerguelensis betrifft, keine Mitteilungen gemacht, dagegen werden nach JOHNSTON und GOSSE Öffnungen bei B. Tuediæ, und nach dem Letzteren auch bei B. eques angetroffen.

Die Septen sind voll entwickelt 96 (6—6—12—24—48) Paare, die sich alle an dem Magenrohr inserieren. Die sechs

Hauptseptenpaare sind mit dem Schlundrohr in seiner ganzen Länge zusammengewachsen. Von diesen sind die Richtungssepten, da sie sich an den Zipfeln inserieren, natürlich mit dem Schlundrohr in einer grösseren Ausbreitung als die übrigen vereinigt. Die sechs Paare der zweiten Ordnung und die zwölf der dritten verbinden sich gleichfalls mit dem Schlundrohr in seiner ganzen Länge, aber sie sind doch nicht so gut entwickelt wie die Hauptsepten und die Septen der dritten Ordnung nicht so gut wie die der zweiten. Die freien Ränder der letzteren Septen machen nämlich nach oben eine tiefere Einkerbung, die bei den Septen des dritten Cyclus am tiefsten ist. Die 24 Septenpaare von der vierten Ordnung, und die 48 Paare von der fünften sind, die ersteren zu etwa zwei Dritteln, die zweiten nur zu einem Drittel mit dem Schlundrohr zusammengewachsen.

Da es sehr schwer ist, das Innere dieser Actinie gut zu konservieren, kann ich jetzt nicht mit Sicherheit sagen, ob die sechs ersten Septenpaare Geschlechtsorgane tragen. Auf allen übrigen Septen habe ich dagegen solche gesehen. Das Tier ist getrennten Geschlechts.

Wie oben gesagt, geht von der Mundscheibe zwischen jedem Septum nur ein Tentakel aus. In dem Binnenfache von jedem Septenpaar erster, zweiter—fünfter Ordnung stehen die Tentakeln von entsprechender Ordnung, während die Tentakeln des sechsten Cyclus sich in den Zwischenfächern aller Septen befinden.

Die Septen, und mit ihnen die Tentakeln der letzten Ordnung, scheinen sehr spät angelegt zu werden. Ich habe grosse Individuen angetroffen, bei welchen der letzte Septencyclus nur teilweise zur Entwicklung gekommen war, ju oft wie kleine Auswüchse der Bindegewebe auftrat. Bei solchen sind bisweilen auch die Septen der vierten Ordnung noch nicht mit dem Magenrohr zusammengewachsen.

Alle Septen sind mit grossen inneren Stomata, Oralstomata, und mit äusseren, Randstomata, versehen; die letzteren, welche nahe an dem Sphinkter liegen, sind klein und können leicht der Aufmerksamkeit entgehen.

Die Muskulatur der Septen ist im Allgemeinen recht schwach, so wohl die transversalen Muskeln wie der Parietobasilarmuskel, der sich fast zur halben Höhe des Mauerblatts erstreckt, haben keine oder nur kleine Verzweigungen, während die longitudinellen eine grössere Faltung der Muskellamelle zeigen.

Die Mesenterialfilamente sind in ihrem oberen Verlauf in zwei Flimmerstreifen und einen Drüsenstreifen differenziert, aber diese Partie ist etwas anders als gewöhnlich gebaut. Es findet sich nämlich zwischen den Flimmerstreifen und dem Drüsenstreifen kein scharf abgesetzter Teil von nur gewöhnlichen Entodermzellen. Die grossen, ampullenförmigen Drüsenzellen, die bisweilen in das Mesoderm etwas eingesenkt scheinen, sind nämlich in den dicht an den Flimmerstreifen liegenden Partien eben so, wenn nicht mehr als in der Höhe des Drüsenstreifens entwickelt.

Das Mesoderm des oberen Teils der Mesenterialfilamente, ist mit protoplasmareichen Bindegewebszellen versehen, die besonders in den centralen Partien sehr zahlreich sind und dicht an einander liegen, während die Zwischen-substanz keine grössere Mächtigkeit erreicht hat. In den unteren Partien, wo nur ein Drüsenstreifen vorhanden ist, sind dagegen die Bindegewebszellen weniger zahlreich und die Drüsenzellen länglich schlauchförmig.

Ich behalte mir alle Rechte vor, die anatomischen und histologischen Untersuchungen dieses Genus zu vollständigen und abzuschliessen.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1891. N:o 4.
Stockholm.

Om måttet för dödligheten inom en bestämd åldersklass.

Af G. ENESTRÖM.

[Meddeladt den 8 April 1891 genom D. G. LINDHAGEN.]

Då man vill jämföra dödlighetsförhållandena inom olika åldersklasser eller inom olika grupper af personer tillhörande samma åldersklass, använder man såsom mått för dödligheten i allmänhet sannolikheten vid åldersårets början att dö under loppet af detta år. Känner man nu, att l_x personer under en viss tid inträdt i åldersklassen, och att d_x dödsfall blifvit bland dem iakttagna, blir den i fråga varande sannolikheten för en x-åring att dö i åldern $x/x+1$ år lika med $\frac{d_x}{l_x}$, under förutsättning att hvar och en af de l_x personerna kunnat under hela åldersåret iakttagas. Skulle däremot under observationstiden u_x personer hafva försvunnit ur sikte, t. ex. genom emigration, då fråga är om ett lands folkmängd, eller genom utträde ur sällskapet, då fråga är om ett slutet sällskap, blir dödligheten tydligen större än $\frac{d_x}{l_x}$, enär bland de u_x personerna ett antal dödsfall måste hafva inträffat, hvilket icke är medräknadt i d_x. För att i detta fall erhålla ett riktigt mått för dödligheten, antager man vanligen, att de utträdande personerna i genomsnitt uträda vid $x+\frac{1}{2}$ års ålder, och att den tid, under hvilken de ej kunnat iakttagas, således utgör i genomsnitt $^1/_2$ år för hvarje person. Är nu w_x sannolikheten för en x-åring att dö inom ett år, och äro dödsfallen jämt fördelade öfver hela åldersåret, så

måste bland de u_x personerna ungefär $\frac{1}{2}u_x w_x$ dödsfall hafva egt rum efter utträdet, så att alla dödsfallen tillsammans uppgå till $d_x + \frac{1}{2}u_x w_x$. Då nu å andra sidan hela antalet dödsfall bland de l_x personerna också kan uttryckas genom $l_x w_x$, erhåller man ekvationen

$$l_x w_x = d_x + \tfrac{1}{2}u_x w_x,$$

hvaraf

$$w_x = \frac{d_x}{l_x - \frac{1}{2}u_x}.$$

Mot riktigheten af detta uttryck för dödligheten har emellertid E. ROGHÉ i ett nyligen utgifvet arbete: *Geschichte und Kritik der Sterblichkeitsmessung bei Versicherungsanstalten* (Jena 1891) opponerat sig och uppgifvit, att nämnaren rätteligen bör vara $l_x - \frac{1}{2}u_x - \frac{1}{2}d_x$ i stället för $l_x - \frac{1}{2}u_x$. Då ROGHÉ till stöd för sitt påstående åberopar den framstående statistikern G. F. KNAPP, och då hans afhandling dels är utgifven såsom supplementhäfte till den ansedda tidskriften *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik*, dels i förordet uppgifves hafva blifvit prisbelönt af statsvetenskapliga fakulteten vid universitetet i Strassburg, synes mig en undersökning rörande giltigheten af hans anmärkning ej vara alldeles öfverflödig.

Utbyter man de af ROGHÉ använda beteckningarna mot de här ofvan begagnade, erhåller den af honom å sid. 83 af den citerade afhandlingen framställda formeln följande utseende:

$$\mu = \frac{d_x}{l_x - \frac{1}{2}[u_x + d_x]},$$

där μ utmärker dödligheten inom åldersklassen $x/x+1$ år. Hvad som rätteligen bör förstås med dödligheten inom en viss åldersklass har ROGHÉ, så vidt jag kunnat finna, icke på något ställe uttryckligen angifvit, och icke häller blir betydelsen af uttrycket klarare genom det af honom ofta (se sid. 30, 44, 50, 59—60, 90, 96, 100) upprepade påståendet, att nämnaren i formeln för dödligheten bör angifva det under observationstiden genomlefda antalet år. Under sådana förhållanden är det af vikt att först

och främst utreda, hvilket mått för dödligheten här afses. Att detta mått icke är sannolikheten för en x-åring att dö inom ett år, kan man lätt finna, om man betraktar specialfallet $u_x = 0$, d. v. s. antager, att inga utträden under åldersåret egt rum bland de l_x personerna. I detta fall blir nämligen ROGHÉs formel

$$\mu = \frac{d_x}{l_x - \frac{1}{2}d_x},$$

ehuru sannolikheten för en x-åring att dö inom ett år tydligen är $\frac{d_x}{l_x}$. Att μ öfverhufvud taget icke representerar sannolikheten för en händelses inträffande, framgår också däraf, att μ kan antaga värden större än 1, nämligen om $d_x > \frac{2}{3}l_x$, och att μ blir $= 2$ för den högsta faktiskt förekommande åldersklassen, enär för denna $d_x = l_x$. Däremot ser man lätt, att för $u_x = 0$ kvantiteten μ utmärker dödlighetsintensiteten (le taux de mortalité) vid $x + \frac{1}{2}$ års ålder, och att μ har approximativt samma betydelse äfven då u_x icke är noll. Egendomligt nog har ROGHÉ icke på något sätt påpekat denna betydelse af μ; tvärtom förefaller det, som om han ansåge μ identisk med w_x, enär han eljes icke bort förklara den vanliga formeln för w_x oriktig.

Det sakliga innehållet i ROGHÉs påstående bör således rätteligen formuleras på följande sätt: Såsom mått på dödligheten bör icke användas sannolikheten för en x-åring att dö inom ett år, utan dödlighetsintensiteten vid $x + \frac{1}{2}$ år. Något skäl för detta yrkande har ROGHÉ emellertid icke anfört, ty hans påstående, att nämnaren till måttet för dödligheten bör angifva den genomlefda tiden, är riktigt blott under förutsättning, att till ett sådant mått väljes just dödlighetsintensiteten vid $x + \frac{1}{2}$ år, och innebär således en uppenbar *petitio principii.* Ur teoretisk synpunkt lär icke häller något skäl kunna anföras, hvarför man bör föredraga någotdera af de två måtten. Däremot tala praktiska skäl för bibehållande af det vanliga måttet så till vida, som man med tillhjälp af w_x omedelbart kan konstruera en tabell öfver antalet kvarlefvande vid början af hvarje åldersår, hvilket icke låter

sig göra, om dödlighetsintensiteten vid åldersårets midt är gifven.

Men om sålunda det af ROGHÉ förordade måttet hvarken ur teoretisk synpunkt eller med hänsyn till användningen äger något företräde framför w_x, så kunde ändock en anledning finnas att föredraga det förstnämda, så vida det vore lättare att beräkna än något annat mått. Men icke häller ur denna synpunkt finnes något skäl att införa bruket af dödlighetsintensiteten i stället för w_x. Ty om det första måttet kan exakt[1]) eller approximativt uttryckas genom ett bråk, hvars täljare utmärker antalet iakttagna dödsfall, och hvars nämnare angifver det af de iakttagna personerna inom åldern $x/x+1$ år under observationstiden genomlefda antalet år, så kan det andra måttet exakt eller approximativt uttryckas med ett bråk af alldeles lika form, endast med den ändringen att nämnaren där angifver det antal år, som de iakttagna personerna inom åldern $x/x+1$ år skulle hafva under observationstiden genomlefvat, om inga dödsfall bland dem under denna tid inträffat, och detta antal år är lika lätt att finna som det andra. Att nämnaren i w_x har exakt den nyss angifna betydelsen för specialfallet $u_x = 0$, är omedelbart tydligt; för att visa, att detta förhållande approximativt gäller, äfven om u_x icke är noll, måste vi först härleda den allmänna formeln för detta fall. Vi antaga fördenskull, att de olika tidpunkter, räknade från åldersårets början, vid hvilka utträden förekomma, äro τ', τ'', τ''', $\ldots$, $\tau^{(n)}$, och att vid dessa tidpunkter utträda respektive u', u'', u''', $\ldots$, $u^{(n)}$ personer, så att

$$u' + u'' + u''' + \ldots + u^{(n)} = u_x.$$

Om inga utträden ägt rum, skulle de observerade dödsfallen tydligen uppgått till ett antal af $l_x w_x$, men då på grund af utträdena en del af dessa dödsfall ej kunnat observeras, bör $l_x w_x$ minskas just med antalet af de sist omförmälda dödsfallen. Förutsätter man nu, att dödsfallen äro jämt fördelade öfver hela

[1]) Öfverallt i denna uppsats begagnas ordet exakt såsom motsats mot approximativt. Naturligtvis är äfven det värde, som här kallas exakt, behäftadt med ett sannolikt fel, hvilket är noll blott för $l_x = \infty$.

åldersåret, inträffa efter de respektive utträdena följande antal dödsfall inom åldern $x/x+1$ år:

bland dem, som utträdt vid tidpunkten τ' .... $\frac{u'(1-\tau')w_x}{1-\tau' w_x}$ dödsfall

» » » » » » τ'' .... $\frac{u''(1-\tau'')w_x}{1-\tau'' w_x}$ »

» » » » » » τ''' .... $\frac{u'''(1-\tau''')w_x}{1-\tau''' w_x}$ »

. . . .

» » » » » » $\tau^{(n)}$ .... $\frac{u^{(n)}(1-\tau^{(n)})w_x}{1-\tau^{(n)} w_x}$ »

och sålunda blir hela antalet af dessa dödsfall

$$\frac{u'(1-\tau')w_x}{1-\tau' w_x}+\frac{u''(1-\tau'')w_x}{1-\tau'' w_x}+\frac{u'''(1-\tau''')w_x}{1-\tau''' w_x}+\ldots+\frac{u^{(n)}(1-\tau^{(n)})w_x}{1-\tau^{(n)} w_x}.$$

Alltså blir

$$d_x = l_x w_x - \sum_{r=1}^{r=n} \frac{u^{(r)}(1-\tau^{(r)})w_x}{1-\tau^{(r)} w_x}.$$

Då w_x i högra ledet af denna ekvation ingår äfven i nämnarne, kan värdet däraf endast approximativt beräknas. Utbryter man w_x ur täljarne och löser ekvationen i afseende på detta w_x, erhåller man:

$$w_x = \frac{d_x}{l_x - \sum\limits_{r=1}^{r=n} \frac{u^{(r)}(1-\tau^{(r)})}{1-\tau^{(r)} w_x}}.$$

Men nu är w_x i allmänhet ett litet bråk och $\tau^{(r)} < 1$; man kan således utan större fel försumma termen $\tau^{(r)} w_x$ i uttrycket $1-\tau^{(r)} w_x$, så mycket mer, som hela summationstermen i nämnaren är i vanliga fall mycket liten i förhållande till l_x, och formeln förenklas därigenom till

$$w_x = \frac{d_x}{l_x - \sum\limits_{r=1}^{r=n} u^{(r)}(1-\tau^{(r)})}$$

eller

$$w_x = \frac{d_x}{l_x - u_x + \sum\limits_{r=1}^{r=n} u^{(r)}\tau^{(r)}}.$$

Men $l_x - u_x$ angifver tydligen det antal år, som de kvarstående skulle hafva genomlefvat inom åldern $x/x + 1$ år, om inga dödsfall bland dem inträffat, och $\sum\limits_{r=1}^{r=n} u^{(r)}\tau^{(r)}$ antalet år, som de afgångna genomlefvat före utträdet, hvarmed den ofvan framställda satsen är bevisad vara approximativt riktig.

Det har sålunda blifvit ådagalagdt, att om alla iakttagna personer kunnat observeras ända från fyllda x år, och alla de icke utgångna personerna ända till fyllda $x+1$ år, nämnaren i uttrycket för w_x approximativt angifver det antal år, som dessa personer inom åldern $x/x+1$ år under observationstiden skulle hafva genomlefvat, om inga dödsfall bland dem under denna tid inträffat. Det kan vara af intresse att undersöka, om nämnaren i uttrycket för w_x äger samma betydelse, äfven om icke alla de iakttagna personerna kunnat observeras ända från fyllda x år och icke alla de kvarstående ända till fyllda $x+1$ år. Ett sådant fall inträffar t. ex., då i ett sällskap under loppet af en viss tid inträder ett antal personer i åldern $x/x + 1$ år, och de iakttagna kunna observeras blott till ett visst *kalenderårs* slut. I detta fall kunna nämligen de, som inträdt vid mer än x års ålder, icke iakttagas från och med fyllda x år, och å andra sidan kunna de, som vid sista kalenderårets slut ej fyllt $x+1$ år, icke iakttagas ända till fyllda $x+1$ år. För lösningen af detta allmännare problem antaga vi liksom förut, att dödsfallen inom åldersklassen $x/x+1$ år äro jämt fördelade öfver hela åldersåret, vidare att hela antalet under den bestämda tiden iakttagna personer inom åldersklassen $x/x+1$ år utgjort a_x, att af dessa under observationstiden u_x personer i åldern $x/x+1$ år utträdt, att k_x personer vid observationstidens slut kvarstodo i åldern $x/x+1$ år, och att antalet observerade dödsfall i åldern $x/x+1$ år varit d_x. Hade alla a_x personerna kunnat iakttagas ända till fyllda $x+1$

år, och betecknar man med a_r antalet af dem, som iakttagits från och med åldern $x+\tau_r$ år ($\tau_r < 1$), skulle antalet dödsfall bland dessa a_r personer hafva varit

$$\frac{a_r(1-\tau_r)w_x}{1-\tau_r w_x};$$

således skulle, om n olika τ-värden förefinnas bland de a_x personerna, hela antalet iakttagna dödsfall bland dessa personer under det gjorda antagandet hafva varit

$$\sum_{r=1}^{r=n} \frac{a_r(1-\tau_r)w_x}{1-\tau_r w_x}.$$

Detta antal är emellertid för stort, enär af de a_x personerna u_x utträdt före fyllda $x+1$ år och k_x vid observationstidens slut ej hade fyllt $x+1$ år; från det nyss beräknade antalet dödsfall måste man således för att erhålla d_x fråndraga dels de dödsfall, som inträffa bland de u_x personerna under tiden från utträdet till fyllda $x+1$ år, dels de dödsfall, som inträffa bland de k_x personerna efter observationstidens slut men före fyllda $x+1$ år.

Om af de u_x personerna u_r hafva utträdt vid $x+t_r$ år ($t_r < 1$), och om m olika t-värden förefinnas, blir den första subtraktiva termen tydligen, på samma sätt som i det nyss behandlade specialfallet,

$$\sum_{r=1}^{r=m} \frac{u_r(1-t_r)w_x}{1-t_r w_x};$$

på samma sätt blir, om af de k_x personerna k_r vid observationstidens slut befinna sig i åldern $x+t'_r$ år ($t'_r < 1$), och om m' olika t'-värden förefinnas, den andra subtraktiva termen

$$\sum_{r=1}^{r=m'} \frac{k_r(1-t'_r)w_x}{1-t'_r w_x}.$$

Således erhåller man slutligen ekvationen

$$d_x = \sum_{r=1}^{r=n} \frac{a_r(1-\tau_r)w_x}{1-\tau_r w_x} - \sum_{r=1}^{r=m} \frac{u_r(1-t_r)w_x}{1-t_r w_x} - \sum_{r=1}^{r=m'} \frac{k_r(1-t'_r)w_x}{1-t'_r w_x}.$$

I högra ledet ingår såsom förut den sökta storheten w_x äfven i nämnarne. Utbryter man äfven här w_x ur alla täljarne och löser ekvationen i afseende på detta w_x, erhåller man

$$w_x = \frac{d_x}{\sum_{r=1}^{r=n} \frac{a_r(1-\tau_r)}{1-\tau_r w_x} - \sum_{r=1}^{r=m} \frac{u_r(1-t_r)}{1-t_r w_x} - \sum_{r=1}^{r=m'} \frac{k_r(1-t'_r)}{1-t'_r w_x}}.$$

Nu är w_x i allmänhet ett litet bråk, och τ_r, t_r, t'_r alla mindre än ett; man kan därför för de flesta åldersklasser utan större fel försumma alla storheterna $\tau_r w_x$, $t_r w_x$, $t'_r w_x$, samt erhåller därigenom såsom en första approximation värdet

$$w_x = \frac{d_x}{\sum_{r=1}^{r=n} a_r(1-\tau_r) - \sum_{r=1}^{r=m} u_r(1-t_r) - \sum_{r=1}^{r=m'} k_r(1-t'_r)}.$$

Men i högra ledet af denna ekvation utmärker nämnaren tydligen, liksom förhållandet var i specialfallet, det antal år, som alla a_x personerna under observationstiden skulle hafva genomlefvat inom åldern $x/x+1$ år, om inga dödsfall under denna tid inträffat. Vilja vi åter finna betydelsen af nämnaren i högra ledet af den *exakta* formeln, så kan detta ske på följande sätt. Betrakta vi den allmänna termen $\frac{a_r(1-\tau_r)}{1-\tau_r w_x}$ i nämnarens första summa, så kan denna term anses representera det antal år, som $\frac{a_r}{1-\tau_r w_x}$ vid inträdet $(x+\tau_r)$-åriga personer skulle hafva genomlefvat intill fyllda $x+1$ år, om inga dödsfall bland dem inträffat under denna tid. Men $\frac{a_r}{1-\tau_r w_x}$ utmärker det antal x-åriga personer, hvaribland a_r personer kvarlefva vid åldern $x+\tau_r$ år, och om dödligheten för den ifrågavarande åldersklassen vore sådan, att af l_x personer, som uppnått x års ålder, $l_{x+\tau_r}$ lefde kvar vid åldern $x+\tau_r$ år, kunde således $\frac{a_r}{1-\tau_r w_x}$ uttryckas genom $\frac{l_x}{l_{x+\tau_r}} a_r$. Termen $\frac{a_r(1-\tau_r)}{1-\tau_r w_x}$ representerar således den genomlefda

tiden — fortfarande med bortseende från dödsfallen under observationstiden — för det antal personer, som erhålles, om man ökar a_r i proportionen $\frac{l_x}{l_{x+\tau_r}}$. Samma resonnemang kan användas på den allmänna termen i nämnarens båda andra summor. Hela nämnaren utmärker således det under observationstiden genomlefda antalet år, under förutsättning, att bland de inträdande hvarje åldersgrupp a_r först ökats i proportionen $\frac{l_x}{l_{x+\tau_r}}$, bland de utträdande hvarje åldersgrupp u_r ökats i proportionen $\frac{l_x}{l_{x+t_r}}$, och bland de vid observationstidens slut i åldern $x/x+1$ kvarstående hvarje åldersgrupp k_r ökats i proportionen $\frac{l_x}{l_{x+t'_r}}$.

På grund af det föregående kunna vi således uttala följande sats:

Väljer man såsom mått för dödligheten inom en viss åldersklass $x/x+1$ år sannolikheten w_x för en x-åring att dö inom ett år, så kan dödligheten uttryckas genom ett bråk, där täljaren utmärker antalet under en viss tid iakttagna dödsfall inom en viss grupp af personer i denna åldersklass, och nämnaren angifver det antal år, som dessa personer skulle hafva under observationstiden genomlefvat inom åldern $x/x+1$ år, om inga dödsfall inträffat bland dem. Hafva alla dessa personer kunnat iakttagas ända från och med fyllda x år till och med fyllda $x+1$ år, är detta värde på dödligheten exakt[1]); i annat fall är det endast approximativt, och bör icke utan särskild undersökning användas för de åldersklasser, inom hvilka dödligheten är mycket stor.

[1]) Om betydelsen af detta ord se noten å sid. 254.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

Forts. fr. sid. 240.

Prag. *K. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften.*
Sitzungsberichte. Math.-naturw. Classe. Jahr 1890: 2. 8:o.
» Philos.-hist.-philol. » Jahr 1890. 8:o.
Jahresbericht. Jahr 1890. 8:o.

Rochester, U. S. *Rochester academy of science.*
Proceedings. Vol. 1: Brochure 1. 1890. 8:o.

S:t Louis, U. S. *Missouri botanical garden.*
The Missouri Botanical garden [History and description]. 1890. 8:o.

San Fernando. *Instituto y observatorio de marina.*
Catálogo de la biblioteca. 1889. 4:o.

Sydney. *Australian museum.*
Records. Vol. 1: N:o 4—5. 1890. 8:o.

Washington. *U. S. Geological survey.*
Monographs. Vol. 1. GILBERT, G. K., Lake Bonneville. 1890. 4:o.
Annual report. 9 (1887/88). st. 8:o.
Bulletin. N:o 58—61; 63—64; 66. 1890. 8:o.
Mineral resources of the United States. Year 6 (1888). 8:o.
— *U. S. Naval observatory.*
Observations. Year 1886: App. 1. 1890. 4:o.
— *Smithsonian institution.*
Annual report. 1888 $^{30}/_{6}$. 8:o.
» » National museum. 1888 $^{30}/_{6}$. 8:o.

Wien. *K. Akademie der Wissenschaften.*
Denkschriften. Math.-naturw. Klasse. Bd. 56. 1889. 4:o.
» Philos.-hist. Klasse. Bd. 37. 1889. 4:o.
Sitzungsberichte. Math.-naturw. Klasse. Abth. **1**. Bd. 98: H. 4—10; 99: 1—3; **2 a**. Bd. 98: 4—10; 99: 1—3; **2 b**. Bd. 98: 4—10; 99: 1—3; **3**. Bd. 98: 5—10; 99: 1—3. 1889—90. 8:o.
» philos.-hist. Klasse. Bd. 119—121. 1889—90. 8:o.
Archiv für Österreichische Geschichte. Bd. 75: H. 1—2. 1889. 8:o.
Fontes rerum Austriacarum. Abth. 2. Bd. 45: H. 1. 1890. 8:o.

Hr D:r Jos. Lindahl, Springfield, U. S.
Geological survey of Illinois. Vol. 7. Geology and palæontology. 1883. 8:o.

Författarne.
HENSCHEN, S. E., Kritische und anatomische Beiträge zur Pathologie des Gehirns. Th. 1. Ups. 1890. 4:o.
NATHORST, A. G., Das angebliche Vorkommen von Geschieben des Hörsandsteins in den Norddeutschen Diluvialablagerungen. Gustrow 1890. 8:o.
— Småskrifter. 2 häften. 8:o.
FAVARO, A., Sulla biblioteca matematica di G. Eneström. Comunicazione 6. Venezia 1891. 8:o.
HANBURY, F. J., The late James Backhouse. Lond. 1890. 8:o.

Berättelse om hvad sig tilldragit inom Kongl. Vetenskaps-Akademien under året 1890—1891. Af Akademiens ständige Sekreterare afgifven på högtidsdagen den 31 Mars 1891.

Den rastlösa verksamhet, som inom naturforskningens alla områden kännetecknar den nyare tiden, och som genom sina frukter utöfvat och utöfvar ett så mäktigt inflytande på menniskans lefnadsförhållanden öfver allt, dit den menskliga odlingen framträngt och der detta inflytande sålunda kunnat göra sig gällande, har jemväl under det nu förflutna året fortgått med oförminskad kraft och framgång. Svenska Vetenskaps-Akademien, som företrädesvis har just hithörande vetenskapers odling och främjande till föremål för sin verksamhet, har under året haft att glädja sig åt samma lyckliga förhållande inom vårt eget land, hvarom, bland annat, de talrika naturvetenskapliga arbeten vittna, hvilka hon derunder mottagit till offentliggörande från olika delar af landet. Derom vittna äfven talrika, mer eller mindre omfattande reseföretag, som för naturvetenskapliga ändamål blifvit under året utförda eller planlagda, och om hvilka Akademien erhållit meddelanden.

För det fortfarande hägn, hvarmed Akademien och hennes underlydande institutioner äfvensom den vetenskapliga forskningen i allmänhet jemväl under det gångna tidsskedet varit hugnade af Kongl. Maj:t och Riksdag, är det hennes pligt att här offentligen uttala sin djupa tacksamhet.

Sålunda har Riksdagen på Kongl. Maj:ts derom gjorda framställning beviljat följande anslag på extra stat för innevarande år:

till inköp och insamling af naturalier vid Naturhistoriska Riksmuseets växtpalæontologiska afdelning och till bestridande af andra med arbetena vid afdelningen förenade utgifter ett fortsatt anslag af 2,000 kronor;

för vård, underhåll och förkofran af museets etnografiska samling ett belopp af 2,800 kronor; och

till understöd för fortsatt utgifvande af tidskriften »Acta mathematica» 4,000 kronor att tillhandahållas tidskriftens hufvudredaktör.

Kongl. Maj:t har för öfrigt anvisat:

dels ett belopp af 1,600 kronor till inköp för Riksmuseets räkning af två hvalskelett, det ena af puckelhvalen och det andra af sillhvalen, och

1,100 kronor såsom bidrag till ersättning åt telegrafverket för väderlekstelegraferingen under år 1890;

äfvensom på Akademiens underdåniga förord:

1,000 kronor åt f. d. Professorn vid universitet i Upsala W. LILLJEBORG för fortsatt utgifvande af arbetet: »Sveriges och Norges fiskar», och

1,000 kronor åt föreståndaren för Nordiska Museet Dr. A, HAZELIUS för fortsatt utgifvande af arbetet: »Afbildningar af föremål i Nordiska Museet».

Berättelser om vetenskapliga resor inom landet, hvilka med understöd af Akademien blifvit under förlidet år utförda, hafva blifvit till Akademien ingifna af

Professorn CHR. AURIVILLIUS, som på Öland anställt entomologiska forskningar samt vid museerna i Lund och Malmö jemförande granskningar af Nordiska Lepidoptera;

Docenten CARL AURIVILLIUS, som vid Kristinebergs zoologiska station utfört biologiska forskningar öfver vissa krustaceer m. m.;

Filos. Kandidaten O. CARLGREN, som jemväl vid Kristineberg idkat studier öfver Bohusläns Actinier;

Filos. Kandidaten G. O. ANDERSSON, som studerat laffloran i östra Skåne;

Filos. Kandidaten L. ROMELL, som inom Femsjö och andra trakter af södra Sverige utfört undersökningar förnämligast af kritiska hymenomyceter; och

Herr HUGO DAHLSTEDT, som inom Medelpad, Jemtland och Herjeådalen idkat studier öfver växtslägtet Hieracium.

Derjemte har Akademien mottagit berättelser af följande Letterstedtska stipendiater öfver af dem utförda utländska resor, nämligen:

af Docenten vid Lunds universitet SVEN SÖDERBERG, som, utnämnd till stipendiat af Vitterhets- Historie- och Antiqvitets-Akademien, under resor i England, Skottland, Irland, Oldenburg, Nederländerna, Belgien, norra och östra Frankrike, Schweiz norra Italien samt Österrike och Ungern hufvudsakligen har egnat sig åt studier öfver vikingatiden, såväl dennas direkta minnen som de samtida och närmast föregående kulturformerna, hvilka på vikingatidens kultur kunnat öfva inflytande; — och

af Ingeniören vid Kongl. Mariningeniörstaten T. G. NYSTEDT, som af Vetenskaps-Akademien varit utnämnd till stipendiat och i sådan egenskap besökt Frankrike, England och Tyskland, i hvilka länder han studerat dels sjö- och land-ångmaskiner med dessas nyaste förbättringar, dels de anordningar som användas för att medelst konstlade drag använda sämre och billigare kolsorter, dels konstruktionen af mindre jernfartyg och de ombord på fartyg använda auxiliärmaskiner, samt dels slutligen elektricitetens användning för maritima ändamål

För öfrigt har Akademien erhållit meddelanden om några under året för naturvetenskapliga ändamål från Sverige företagna expeditioner till aflägsnare länder eller haf. Sålunda har under förra årets vinter på bekostnad af Friherre O. DICKSON och andra enskilda personer en sjö-expedition blifvit utförd under ledning af Professorn vid Stockholms Högskola O. PETTERSSON för anställande inom Skagerak af hydrografiska undersökningar, särskildt med hänsyn till vattnets salthalt och halt af absorberade

gaser inom detta hafs olika områden. Vidare har genom frikostig gåfva af Grosshandlaren FR. WARBURG det naturhistoriska Riksmuseum varit satt i tillfälle att till Kamerum i nordvestra Afrika utsända en yngre naturforskare, Filos. Kandidaten YNGVE SJÖSTEDT, för anställande derstädes af entomologiska forskningar och insamlingar, hvilka företag i mycket väsentlig mån jemväl understödes af de i Kamerum bosatta svenskarne Herrar WALDAU och KNUTSON icke minst derigenom, att de upptagit vår unge resande såsom gäst i deras eget hem. Slutligen hafva under sistlidne sommar tre unga vetenskapsidkare, Filos. Kandidaterne G. NORDENSKIÖLD och Frih. A. KLINCKOWSTRÖM samt studeranden J. A. BJÖRLING, på bekostnad förnämligast af Friherre O. DICKSON och bokförläggaren F. BEYER, besökt Spetsbergen och derunder egnat sig åt undersökningar och insamlingar företrädesvis för mineralogiska och palæontologiska ändamål.

I sammanhang med meddelandena om dessa redan utförda expeditioner torde äfven förtjena att omnämnas, att underhandlingarne om den ifrågasatta kombinerade svensk-australiska expeditionen till de södra polartrakterna, för hvars planläggning och ändamål en kort redogörelse lemnades i Akademiens årsberättelse för ett år sedan, äfven under det sista året blifvit fortsatta, och att för det stora företagets förverkligande gynsamma underrättelser från Australien ingått. Emellertid torde af flera, särskildt personliga skäl expeditionen icke kunna komma att afgå från Sverige förr än under loppet af år 1893.

Jemväl under nu förlidet år har Akademien på Kongl. Maj:ts befallning haft att afgifva utlåtanden i åtskilliga till den allmänna administrationen hörande ärenden, bland hvilka utlåtanden må nämnas:

öfver ett af Landtbruks-Akademiens förvaltningskomité väckt förslag om anställande af hydrografiska undersökningar å landets större vattendrag:

öfver uppgjordt förslag till förordning angående de nya rikslikarnes för mått och vigt förvaring och användning;

öfver väckt förslag om inrättande af ett allmänt etnografiskt museum i hufvudstaden;

angående Sveriges deltagande dels i en internationel kongress i Rom för behandling af frågan om en för hela jorden gemensam förste meridian för longituds- och tidsberäkningar, dels i en internationel ornitologisk kongress i Budapest, och dels i en internationel historisk-amerikansk exposition i Madrid till firande af minnet af Amerikas upptäckt för 400 år sedan.

I den förordning, som, efter afgifvande af Akademiens nyssnämnda utlåtande, blifvit af Kongl. Maj:t utfärdad rörande de nya rikslikarnes för mått- och vigtförvaring och användning, har bland annat blifvit föreskrifvet, att dessa likare skola förvaras hos Vetenskaps-Akademien i brandfritt förvaringsrum och inom detta i ett brandfritt skåp. Denna föreskrift har sedan dess blifvit fullständigt verkställd, så att likarne numera befinna sig under Akademiens föreskrifna vård.

Utgifvandet från trycket af Akademiens skrifter har utan afbrott blifvit under året fullföljdt. Af Akademiens Handlingar har 22:dra bandet, fördeladt i två hvar för sig digra häften, numera fullständigt utkommit. Äfven 23:dje bandet är i det närmaste färdigtryckt samt början jemväl gjord med utgifvandet af 24:de bandet. — Af Bihanget till Handlingarne har 15:de bandet, för år 1889, utkommit och derjemte största delen af 16:de bandet lemnat pressen. — Af Öfversigten af Akademiens förhandlingar föreligger det 47:de bandet, eller det för år 1890, färdigtryckt, äfvensom månadshäftena för Januari och Februari innevarande år. — Af arbetet »Meteorologiska iakttagelser i Sverige», hvilket innehåller i bearbetad form de vid statens meteorologiska stationer utförda observationer, har 27:de bandet, och af arbetet »Astronomiska iakttagelser och undersökningar på Stockholms observatorium» 4:de bandets 4:de häfte utgifvits. — Utaf den samling af lefnadsteckningar öfver aflidne ledamöter, som Akademien utgifver, och hvaraf två band redan utkommit, äro för närvarande åtskilliga biografier under tryckning, så att ett första häfte af 3:dje bandet inom kort blir färdigt att utgifvas. — Arbetet »Observations

faites au Cap Thordsen», innehållande iakttagelserna, som blifvit anställda af den åren 1882 och 1883 enligt internationelt aftal utförda svenska expeditionen till Spetsbergen, hvilket arbetes senare del redan för tre år sedan anmäldes såsom utkommen, har för kort tid sedan blifvit fullständigt afslutadt, i det att arbetets första del numera äfven lemnat pressen. Arbetet i sin helhet, fördeladt på två digra band i qvartformat, innehåller, förutom en historisk inledning, specialafhandlingar af expeditionens medlemmar öfver anställda astronomiska, meteorologiska, jordmagnetiska och norrskens-observationer, äfvensom iakttagelser öfver atmosferiska elektriciteten, optiska fenomen i atmosferen m. m., samt öfver hudfärgens förmodade förändring hos menniskor efter öfvervintringar i polartrakter. Om det sålunda afslutade arbetet torde utan förmätenhet kunna fällas det omdömet, att det värdigt kan ställas vid sidan af de arbeten, som från andra i det gemensamma stora företaget deltagande länder utgått öfver dessas samtidigt å andra arktiska eller antarktiska orter anordnade likartade iakttagelser.

På Akademiens **Observatorium** hafva de arbetande krafterna under året hufvudsakligast tagits i anspråk för de sedan en följd af år tillbaka fortsatta undersökningarne öfver hufvudplaneternas absoluta theorier, för hvilket arbete ett särskildt statsanslag varit anvisadt. Sedan under året hithörande kontrollräkningar och redaktionsarbeten blifvit verkställda, har offentliggörandet af dessa undersökningar kunnat påbörjas, så att en första afdelning deraf redan är under tryckning. — Äfven tryckningen af de under föregående år i och för grundläggandet af en stjernkatalog med observatoriets meridiancirkel anställda observationer har blifvit fortsatt. — För fotografisk afbildning af delar utaf stjernhimmeln har ett nytt fotografiskt objektiv blifvit anskaffadt och fotografiska plåtar af utmärkt beskaffenhet blifvit ställda till observatoriets förfogande af den berömda firman Lumière et fils i Lyon, äfvensom en apparat för uppmätning af astrofotografiska plattor blifvit för observatorium förfärdigad af Akademiens instrumetmakare P. M. SÖRENSEN. Med dessa nya hjelpmedel

hafva äfven lyckade försök blifvit utförda. — I stället för D:r C. V. L. CHARLIER, som vunnit befordran vid Upsala universitet, har D:r K. BOHLIN blifvit antagen till amanuens vid Observatorium.

Vid Akademiens **Fysiska institution** har dess fysiker, med användande af de nyanskaffade spektralanalytiska apparater, som i Akademiens för ett år sedan afgifna årsberättelse omnämndes, under en del af året varit sysselsatt med undersökningar öfver bromgasens absorptionsspectrum såsom fortsättning af de analoga undersökningar öfver jodgasens spectrum, som han under sin vistelse vid observatorium i Pulkowa utfört. Den här ifrågavarande undersökningen, som är utförd på spectralfotografisk väg, har gifvit till resultat en våglängdskatalog af omkring 2,700 linier i det undersökta bromgasspectrum. En afhandling härom är redan offentliggjord i Akademiens Handlingar. — För att möjliggöra mer ingående studier öfver metallernas emissionsspectra, hvartill erfordras en kraftigare elektrisk ström än som kan åstadkommas med institutionens egna apparater, har, genom välvilligt tillmötesgående från Tekniska Högskolans styrelse, strömledning blifvit till institutionen öfverförd från en af Högskolans dynamomaskiner, hvarjemte åtskilliga hjelpapparater blifvit anskaffade för strömmens fullständiga reglerande. Instrumentsamlingen har för öfrigt blifvit förökad med ännu andra värdefulla apparater, hvaribland särskildt må nämnas en stor induktionsrulle af KEISER & SCHMIDT i Berlin. — Under förra våren har Fil. Licentiaten J. JUHLIN vid institutionen anställt en serie thermometer-komparationer i och för ett arbete öfver vattenångans spänstighet vid låga temperaturer. — Under loppet af nu förliden vinter hafva Thamiska föreläsningar blifvit hållna af Akademiens Fysiker öfver valda delar af himlakropparnes fysik.

Vid **Bergianska stiftelsen** hafva arbetena för ordnande af dess nya trädgård oafbrutet fortgått. Bland verkställda nyanläggningar må nämnas anordnandet af en afdelning för succulenter, af ett område för kinesisk-japanska växter och af ett

sydryskt steppområde, anläggning af större delen af strandvägen utmed Brunnsviken och af särskilda partier invid denna för hafsstrandväxter från landets vest- och ostkuster, samt anläggning och plantering af omkring en fjerdedel af den växtsystematiska afdelningen. — Stiftelsen har under året ihågkommits med talrika gåfvor såväl af lefvande växter som af frön från landets olika delar. Sålunda hafva betydande samlingar af lefvande växter förärats af Adjunkten F. R. AULIN från Gotland, af Ingeniör C. O. BOIJE af GENNÄS och Lektor K. F. THEDENIUS från Stockholm och dess omnejd, samt af Kamrer C. H. BRANDEL från Jemtland. Mindre samlingar af lefvande växter hafva lemnats af Lektor S. ALMQVIST, Professor CHR. AURIVILLIUS, Amanuensen H. DAHLSTEDT, Ingeniör R. R. EKMAN, Kandidat M. ELFSTRAND, Kandidat A. FRYXELL, Adjunkten J. HAGELIN, Handlanden C. F. HOLM, Adjunkten K. JOHANSSON, Amanuensen O. JUEL, Adjunkten C. J. LALIN, Professor CHR. LOVÉN, Adjunkten A. MAGNUSSON, Doktor O. NORDSTEDT, Prosten O. V. REDELIUS, Konservator A. SVENSSON, Revisionssekreteraren R. WÆRN och Studenten I. ÖRTENDAHL. Frön hafva erhållits af Professor F. W. C. ARESCHOUG, Adjunkten F. R. AULIN, Amanuensen G. FORSBERG, (en stor samling), Adjunkten K. JOHANSSON, Kollega N. G. W. LAGERSTEDT, Direktör E. LINDGREN och Jägmästaren H. SAMZELIUS. — Såsom deltagare i det allmänna internationella fröbytet har trädgården utdeladt frön till och mottagit frön från omkring 70 botaniska trädgårdar och likartade institutioner i in- och utlandet. — Undervisningen åt trädgårdseleverna har under året omfattat den praktiska och theoretiska hortikulturens olika grenar, botanik, fysik, kemi, geologi, geografi, aritmetik, väl- och rättskrifning, bokhålleri samt fältmätning.

Akademiens **Bibliotek** har såsom vanligt hållits tillgängligt för besökande, som önskat begagna sig af dess rika skatter, under bestämda timmar hvarje Onsdag och Lördag hela året igenom samt, med undantag af sommarmånaderna, jemväl de flesta öfriga förmiddagar så väl för studier på stället som för

hemlåning af böcker. För närvarande äro derifrån utlånade 8,952 band och lösa nummer af tidskrifter. Genom gåfvor, inköp och byten har boksamlingen tillväxt med 3,079 band och småskrifter. — Akademiens egna skrifter utdelas för närvarande till 789 institutioner och personer, hvaraf 231 inom och 558 utom landet.

Vid **Statens Meteorologiska Centralanstalt** har verksamheten under det förflutna året fortgått efter hufvudsakligen samma plan som tillförene så väl i afseende på dagligt mottagande af in- och utländska väderlekstelegram som deras användande till konstruktion af öfversigtskartor och dessas bekantgörande både genom offentliga anslag på vissa ställen i hufvudstaden och genom några af hufvudstadens större dagliga tidningar, beledsagade af en sammanfattning af väderlekstillståndet för dagen och af utsigter för närmast förestående väderlek. Dylika sammanfattningar med väderleksutsigter öfversändas äfven på telegrafisk väg till 15 kommuner i riket äfvensom till styrelsen för statens jernvägstrafik, som låter anslå desamma å alla större jernvägsstationer, en anordning som äfven blifvit vidtagen å flera privata banlinier, som erhålla sina uppgifter från närmaste statsstation. Under sommarmånaderna hafva derjemte telefonmeddelanden om väderleken blifvit lemnade till Sekreteraren hos Stockholms läns Hushållningssällskap samt till styrelsen för Stockholms—Rimbo jernväg, genom hvilkas försorg dessa meddelanden blifvit spridda vida inom länet och bekantgjorts medelst flaggors hissande så väl å fasta stationer som å de ångbåtar, hvilka underhålla daglig kommunikation mellan hufvudstaden och sommarboställena i skärgården och omkring Mälaren. — De till anstalten ankommande morgontelegrammen offentliggöras fortfarande i tidskriften »Bulletin du Nord», hvars utgifvande bekostas af de tre skandinaviska Meteorologiska Centralanstalterna gemensamt. — Statens meteorologiska stationer äro för närvarande 34 till antalet, hvarförutom observationer öfver nederbörd och temperatur med egna eller från Anstalten tills låns bekomna instrument anställas å flera privatstationer. Fullständiga observationsserier hafva inlemnats af

Läroverkskollega R. BILLMANSON i Nora, Jägmästaren J. J. VON DÖBELN i Björkholm, Kapten TH. EKENMAN i Helmershus, Telegrafkommissarien J. G. ERICSSON i Nässjö, från Ronneby helsobrunn, Gysinge bruk och Experimentalfältet vid Stockholm samt från en station i Hallands och en i Upsala län, de två sistnämnda inrättade och underhållna på de respektiva Hushållningssällskapens bekostnad. — Af de utaf skogsmedel bekostade meteorologiska försökstationerna hafva iakttagelser öfver nederbörd, afdunstning och jordtemperatur fortfarande utförts. Äfven den fullständigare nederbördstationen vid Tegeludden vid Stockholm har fortfarande varit i oafbruten verksamhet. — Det system af stationer för iakttagelser öfver nederbörden och delvis öfver temperaturen, som bekostats af Hushållningssällskapen och som tog sin början år 1878, är ännu i fortsatt oförminskad verksamhet. Om till hithörande stationer läggas statens meteorologiska stationer, så väl de som sortera under Anstalten som under Nautisk-Meteorologiska Byrån, samt de privata stationerna och skogsstationerna, vid hvilka alla nederbörden observeras efter en och samma plan, blir antalet af nederbördsstationer i riket inalles 436, fördelade på rikets samtliga län. De månadtligen till anstalten insända iakttagelserna från dessa stationer publiceras i en särskild tidskrift: »Månadsöfversigt af väderleken i Sverige», hvilken redigeras af Anstaltens Amanuens D:r H. E. HAMBERG och uppehålles hufvudsakligen genom prenumerationen af Hushållningssällskapen. Af denna tidskrift har med det förflutna året 10 årgångar utkommit. — Det system af iakttagelser öfver isförhållanden, åskväder och fenologiska företeelser, som från år 1881 ledes af anstalten, har fortgått efter oförändrad plan, och hafva till anstalten inkommit journaler från 22 observatörer öfver isläggning och islossning, från 35 öfver iakttagna åskväder och från 47 öfver periodiska företeelser inom växt- och djurverlden. — Synoptiska tabeller hafva upprättats för hvarje dag af året 1889, upptagande nederbördens mängd, åskväder, dimma, dagg, rimfrost, luftens genomskinlighet, solrök, norrsken, m. m. I dessa tabeller ingå landets samtliga stationer. — Under sist-

liden sommar hafva följande stationer blifvit af Amanuensen D:r HAMBERG inspekterade: Umeå, Stensele, Piteå, Haparanda, Jönköping, Askersund och Nora. — Anstalten har slutligen meddelat en mängd upplysningar åt såväl in- som utländska myndigheter och enskilda personer.

Det **Naturhistoriska Riksmuseum** har fortfarande, såsom hittills, hållits tillgängligt för allmänheten alla Onsdagar och Lördagar kl. 12—2 samt Söndagar kl. 1—3 på dagen. Endast om Lördagarne har en afgift af 25 öre för person erlagts, eljest har tillträdet varit afgiftsfritt. Jemväl på andra tider har Museum fått besökas, då särskild begäran derom framställts, isynnerhet af skolungdom under lärares ledning och undervisning.

Riksmuseets *Mineralogiska afdelning* har äfven under detta år erhållit sina märkligaste bidrag från svenska och norska fyndorter. Deribland är i främsta rummet att nämna fyndet vid Gyttorps jerngrufva nära Nora af ofantligt stora, vid sidan af jernmalm inbäddade körtlar af Allanit, ett mineral, som i kemiens historia intager ett framstående rum genom de i detsamma af BERZELIUS, KLAPROTH och MOSANDER upptäckta enkla ämnena Cer, Lanthan och Didym. Af detta nya mineralfynd hafva två mycket stora linser och ett antal mindre stuffer blifvit såsom gåfva till museum öfverlemnade af Ingeniör W. WENDIN. Af andra märkliga mineralfynd inom Sverige och Norge hafva vackra sviter förvärfvats dels genom köp och dels genom insamling vid fyndorterna genom Museets Assistent Hr. G. LINDSTRÖM; och må deribland särskildt nämnas sviter af det nya boratet Pinakoilit, af de nya mineralen Trimerit, Ganophyll och Pyrophanit från Harstigen, af Folidolit, Augit, Epidot m. m. från Taberg, af Piemontit, Gahnit, Hausmannit från Jakobsberg nära Nordmarken, af många andra bland de märkliga mineral som under de senare åren träffats vid jerngrufvorna i Filipstads bergslag, af Kolumbit från Timmerhult i Bohuslän, af åtskilliga sällsyntare mineral från Moss, Brevig, trakten af Arendal i Norge m. m. — Så vidt tillgångarne det medgifvit har Intendenten sökt åt museum förvärfva representanter

äfven af de nyaste utländska mineralfynden, och torde häribland böra nämnas inköp af en vacker svit af det genom sin sammansättning märkvärdiga mineralet Melanophlogit från svafvelgrufvorna på Sicilien, af stora kristaller af det sällsynta mineralet Hauerit från Raddusa på Sicilien, af Phenakit från Colorado och Senarmontit från Algier m. fl. — Museets meteoritsamling har ökats genom inköp af en stenmeteorit från Jelica i Serbien, utmärkt genom sin konglomeratartade struktur, och af den märkliga kolmeteoriten från Migheï i Ryssland. Såsom gåfva har Museum af Ryske Statsrådet HIRIAKOFF erhållit en stenmeteorit från Bjelskrinitji i Wolhynien, genom byte med Professor A. LIVERSIDGE i Sydney ett stycke meteorjern från Thunda i Queensland, och genom G. F. KUNZ en stenmeteorit från Washington i Kansas. — Bland gåfvor till Museum må vidare omnämnas ett större antal mineral utvalda från framlidne Professor J. O. CARLBERGS efterlemnade rika samling och skänkta till Museum af Enkefru MARIA CARLBERG; en suite särdeles intressanta bergartstuffer från sjön Mien norr om Karlshamn, skänkta af D:r N. O. HOLST, upptäckaren af sjöns vulkaniska ursprung; fem modeller af de största i Australien funna guldklimpar af Hr. C. SKOGLUND i Melbourne; ett stycke enhydros från Uraguay af Tullförvaltaren I. F. LYTH i Visby; en mycket stor stuff Brucit från Hålbäcksgrufvan i Vermland af Disponenten W. BERGSTRÖM; diverse stuffer från Finland och Ryssland, öfverlemnade af Baron F. LINDER af Svartå; några vackra mineral från Taberg af Disponenten J. E. JANSSON; en stuff kristalliserad Titanit från Åmmeberg af Ingeniör TH. DAHLBOM; diverse arsenikkristaller af Docenten M. WEIBULL; en stor stuff af ett walleritlikt mineral från Skyttgrufvan nära Falun af Ingeniör TH. WITT; kristaller af zinkblende från Lugnås af Hr. G. v. SCHMALENSEE.

Den *Botaniska afdelningen* af Riksmuseum har under året förkofrats så väl genom skänker som genom köp och byten. Vetenskaps-Akademien har till afdelningen öfverlemnat de växtsamlingar, som Kandidat L. ROMELL, hvilken af Akademien

åtnjutit reseunderstöd, enligt föreskrift insändt. Bland öfriga gåfvor må främst nämnas ett mycket värdefullt alg- och fanerogamherbarium, samladt af den i förtid med döden bortgångne Regnellske Amanuensen D:r H. STRÖMFELT och skänkt af hans fader Grefve F. STÖMFELT; hälften af ett mycket rikhaltigt skandinaviskt Hieracium-herbarium af Lektor S. ALMQVIST; ett värdefullt algherbarium, samladt af Akademiens framlidne ledamot Professor F. L. EKMAN och till Museum öfverlemnadt af hans sterbhus, och en större samling träprofver från Argentinska staten och förärad af dess regering. Vidare må nämnas alger af Professor G. LAGERHEIM i Quito, Friherre A. E. NORDENSKIÖLD och Jägmästaren H. SAMZELIUS; lafvar af Adjunkterne P. J. HELLBOM och J. HULTING, Lektor K. F. THEDENIUS och Kassör ZETTERHOLM; fanerogamer af Lektor H. ARNELL, Adjunkt F. R. AULIN, Amanuensen H. DAHLSTEDT, Kandidat A. FRYXELL, Adjunkt K. JOHANSSON, D:r J. A. LEFFLER och Professor A. G. NATHORST; morfologiska föremål af Lektor S. ALMQVIST, Ingeniör A. T. CARLSSON, Geologen G. HOLM, Assistent TH. HOLM, Adjunkterne K. JOHANSSON och T. O. B. N. KROK, Entomologen S. LAMPA, Lektor C, A. M. LINDMAN, Professorerna G. LINDSTRÖM och A. G. NATHORST, Friherre G. VON PAIJKULL, hvartill komma samlingar af alger och fanerogamer, som blifvit hopbragta af Intendenten under en resa på Gotland. — Bland de tillökningar, som afdelningen genom köp förvärfvat, må i främsta rummet nämnas den andra hälften af Lektor S. ALMQVISTS ofvannämnda rikhaltiga Hieracium-herbarium. Vidare hafva genom köp förvärfvats alger från Ostindien af D:r C. FRISTEDT, fanerogamer från Nya Holland af densamme, spanska fanerogamer af E. RÉVERCHON, svenska lavar af Kandidat E. ANDERSSON, svampar af D:r M. A. LINDBLAD samt exsiccatverken: »L. ROMELL, Fungi exsiccati Cent. I», och »E. M. HOLMES, Algæ britannicæ rariores exsiccatæ» fasc. 5. Genom byte hafva erhållits dels en mycket värdefull samling abyssiniska och australiska växter från Kongl. Botaniska museum i Berlin och dels en värdefull samling fanerogamer från Turkestan och andra delar

af Asien samt Brasilien från Kejserl. Botaniska trädgården i St. Petersburg. — Under året hafva af det för afdelningens räkning af Intendenten utgifna verket: »Erythrææ exsiccatæ» fasciklarne III och IV utkommit. Delar af de skandinaviska, arktiska, allmänna och Regnellska herbarierna hafva för bearbetning varit utlånade till specialister i Sverige, Danmark, Finland, Tyskland, Belgien och Nordamerikas Förenta Stater. Vetenskapliga undersökningar hafva vid afdelningen blifvit under året utförda, utom af Intendenten sjelf, af Lektor S. ALMQVIST, Kamrer C. H. BRANDEL, Amanuens H. DAHLSTEDT, Kandidat M. ELFSTRAND, Amanuens O. JUEL, Professor F. R. KJELLMAN, Adjunkt T. O. B. N. KROK, Kamrer G. A. LINDBERG, Lektorerne C. J. LINDEBERG, C. A. LINDMAN och A. NILSSON samt D:r K. O. E. STENSTRÖM. — Såsom Regnellska Amanuenser hafva under året tjenstgjort dels Doktor A. NILSSON och dels, efter dennes befordran till annan tjenst, Hr. H. DAHLSTEDT.

Vid Riksmuseets *Vertebrat-afdelning* har den för allmänheten tillgängliga utställningen under året ökats med den af Friherre O. DICKSON till museum skänkta Wapitihjorten, i samband med hvars uppställning alla de större skandinaviska däggdjuren hafva omrangerats till erhållande af större öfverskådlighet, så långt det knappa utrymmet kunnat medgifva. Sedan Kongl. Maj:t anvisat särskilda medel för inköp af två hvalskelett från Norge, hafva dessa båda, en Balænoptera borealis och en Megaptera longimana, erhållits genom Professor G. A. GULDBERG i Kristiania. Det förstnämda af dessa skelett har vid museets macerationshus redan så preparerats att dess uppställning i hvalmuseum med det snaraste kan påbörjas. Genom inköp har dessutom förvärfvats, utom en mängd enstaka föremål, en samling af fiskar från Bermudas-öarne, en samling däggdjur, foglar, kräldjur och fiskar från Ceylon och från Nya Holland samt en likartad från Kamerum. Genom skänker hafva samlingarne ökats i främsta rummet med fortsatta sändningar af Nordsjö- och Kattegats-fiskar genom Danske Grosshandlaren O. FREDERICHSEN i Köpenhamn. Dessutom har afdelningen varit ihågkommen med skänker af Distrikt-

läkaren H. V. ROSENDAHL, Grosshandlaren C. W. LÄNGSTADIUS, Trädgårdsmästaren J. WAHLBERG, Herr JOHAN STRÖMBOM i Cap, Fru ULLBERG, H. J. F. CEDERSTRÖM, Herrar A. BOMAN, TH. HANSEN, CH. EKSTRÖM och A. F. HÖK, Jägmästaren SAMZELIUS samt Konservatorn A. SVENSSON. — Etnografiska samlingen har förökats med 136 inköpta föremål från Söderhafsöarne, Nya Holland och Kongo. En storartad tillökning har denna samling erhållit genom 154 dyrbara föremål från Kongo, skänkta af ofvan nämnde Grosshandlare O. FREDERICHSEN. Äfven Kontre-Amiral E. S. K. PEYRON och Superintendenten J. W. PATERSON samt Amanuensen F. MARTIN hafva aflemnat värderika gåfvor till denna samling.

Riksmuseets *afdelning för lägre Evertebrater*, der arbetet med preparation och uppställning samt registrering och provisoriskt ordnande af inkomna samlingar oafbrutet fortgått, har från Herr ADOLPH GROTH i Batavia fått mottaga en särdeles välkommen sändning hafsdjur. innehållande bland andra ett väl bevaradt exemplar af Nautilus Pompilius med dess djur, och ifrån Bergens Museum, genom Doktor D. C. DANIELSEN, exemplar af Pourtalesia Jeffreysi från nord-Atlantens djup, upphemtade under den Norska Nordhafs-Expeditionen, samt andra välkomna bidrag från Professor G. O. SARS i Kristiania och Konservator G. STORM i Trondhjem. — Speciella undersökningar hafva fortgått hufvudsakligen beträffande vissa hittills mindre kända delar af Echinidernas morfologi. För vetenskapliga studier hafva delar af samlingarne varit tillhandahållna Docenterne C. AURIVILLIUS, C. BOVALLIUS och A. WIRÉN, Licentiaten E. LÖNNBERG samt Professor G. O. SARS i Kristiania. — Akademiens zoologiska station i Bohuslän har varit begagnad af Professor H. THÉEL, Docenten C. AURIVILLIUS, Kandidaterne O. CARLGREN, L. HOLM, B. LIDFORS och Y. SJÖSTEDT samt Fröknarne H. LOVÉN och A. PALMQVIST. Från stationen har Museum mottagit sviter af der insamlade föremål.

Den *Entomologiska afdelningen* af Riksmuseum har under året blifvit ihågkommen med följande gåfvor: några utländska

Coleoptera af Häradshöfding J. HULTGREN i Örebro; en stor samling af mycket sällsynta Coleoptera hufvudsakligen från Australien skänkta af Dr. E. E. HAGLUND i Norrköping; en äldre, i sju stora vägglådor förvarad samling af insekter, myriopoder och spindeldjur från Java, öfverlemnade till museum af Kongl. Utrikesdepartementet såsom gåfva från Kaptenen L. VON ENDE i Batavia, samt åtskilliga sällsynta insekter af Konservator S. LAMPA. Genom inköp har Afdelningen förvärfvat en större samling fjärilar och skalbaggar från Ceylon, hemförda af Dr. C. FRISTEDT, några Lepidoptera från Madagaskar och Ostindien, 150 arter sydeuropeiska Curculionider och Cerambycider af Mr. J. DESBROCHERS DES LOGES, en samling exotiska skalbaggar och fjärilar af Dr. O. STAUDINGER, samt en samling insekter af alla ordningar från Queensland och från Nya Zeeland, hopbragt af Dr. C. FRISTEDT. — I likhet med hvad under föregående år egt rum, har äfven under detta år utlånats ett betydande antal insekter till in- och utländska specialister. Bland dem som på detta sätt begagnat sig af museets material må nämnas M. A. FAUVEL i Caen, Hr. A. KUWERT i Ostpreussen, Pastor J. SCHMIDT i Brandenburg, Mr. H. W. BATES i London, Professor K. KRÆPELIN i Hamburg, Dr. E. BERGROTH i Finland och Mr. J. DESBROCHERS DES LOGES i Tours. Bland dem, som på platsen begagnat sig af museets rika skatter, kunna anföras Konservator S. LAMPA, Dr. E. HAGLUND, Löjtnant C. GRILL, Dr. H. NERÉN, Häradshöfding J. HULTGREN samt jägmästaren J. H. WERMELIN.

Den *Palæontologiska afdelningen* af Museum har vunnit tillökning genom gåfvor från Dr. KIESOW i Danzig, Lektor M. KLINTBERG i Visby, Dr. J. LINDAHL i Springfield, Tullförvaltaren LYTH i Visby, Hr. G. PETTERSSON i Mörbylånga, Lektor K. F. THEDENIUS samt Jägmästaren SAMZELIUS i Luleå. Genom byten hafva samlingar erhållits från K. Museum für Naturkunde i Berlin, från Provinzial Museum i Königsberg samt från Naturhistoriska Museum i Weimar. Inköp hafva gjorts af samlingar från Spetsbergen, Limhamn i Skåne, Nerike, Gotland,

Vestergötland, Holland och Rhenprovinserna, en större samling kritfossil, samt från norra Italien en vacker samling tertiära koraller. — För studier och undersökningar hafva samlingarne begagnats af Mr. F. A. BATHER i London, Professor BÖHM i Freiburg (Breisgau), Professor DAMES i Berlin, Dr. G. HOLM, Dr. KIESOW i Danzig, Professor KOKEN i Königsberg, Dr. POMPECHJ i Königsberg, Amtsraht STRUCKMANN i Hannover samt Mr. SMITH-WOODWARD i London.

Riksmuseets *afdelning för arkegoniater och fossila växter* har under året förkofrats genom en stor mängd värderika samlingar. Såsom gåfvor hafva lemnats: af framlidne Generaldirektören M. HUSS' sterbhus dennes efterlemnade, särdeles väl preparerade mossherbarium, hufvudsakligen omfattande skandinaviska men äfven en del utländska mossor; några ytterst sällsynta skandinaviska mossor af Lektor H. W. ARNELL; en större särdeles instruktiv samling blad af amerikanska trädslag såsom jemförelsematerial med fossila af Dr. TH. HOLM i Washington; en omfattande samling fossilt trä från den förstenade skogen vid Kairo af Professor G. RETZIUS; fossila frukter från Australien af Baron F. v. MUELLER i Melbourne; en utmärkt samling engelska och skotska stenkolsvexter af Dr. R. KIDSTON i Stirling; rätiska växter från Tatra samt en utmärkt samling juraväxter från Krakau af Dr. M. RACIBORSKI i Krakau; en vacker samling rätiska växter från Stabbarp af Förvaltaren J. PETTERSSON derstädes; några rätiska växter från sydöstra Skåne af Docenten J. C. MOBERG; qvartära växter från Gotland af Professor G. LINDSTRÖM; från Nerike af Kandidat R. SERNANDER; diverse fossila föremål från Hr. A. F. CARLSON i Limhamn, Professor E. GEINITZ i Rostock, Dr. J. LINDAHL i Springfield, Professor F. RÖMER i Breslau, af Intendenterne för Riksmuseets botaniska, mineralogiska och palæontologiska afdelningar, hvarjemte Vetenskaps-Akademien till afdelningen öfverlemnat de samlingar från Norrlands elfaflagringar, som Kandidaten R. SERNANDER under resor derstädes med understöd af Akademien hopbragt. Genom byte har förvärfvats en större samling ormbunkar

från Costa Rica, mossor från Skandinavien, mellersta och södra Europa, en samling exotiska mossor, stenkolsväxter från England samt kritväxter från Blankenburg. Genom inköp hafva erhållits mossor från Nya Zeeland, en utmärkt samling mikroskopiska preparat af stenkolsväxter från England, en samling fossilt trä från Aachen, juraväxter från Bornholm, en särdeles omfattande och värdefull samling kritväxter samt tertiära växter från Böhmen, en betydande samling tertiära växtaftryck från Spetsbergen, en större samling växtlemningar i bernsten, innehållande flere sällsynta arter, qvartära växter från Jemtland, Nerike, Östergötland, Vestergötland, Småland, Skåne, Halland och Gotland. — För vetenskaplig bearbetning hafva samlingarne anlitats af Lektor H. W, ARNELL i Jönköping, Dr. V. F. BROTHERUS i Helsingfors, Lektor N. C. KINDBERG i Linköping samt Professor V. WITTROCK.

De medel, öfver hvilka Akademien egt att under året förfoga på grund af donationer, som blifvit till henne öfverlemnade för främjande af vetenskaplig forskning eller för andra allmännyttiga ändamål, hafva blifvit på sätt, som följer, använda.

Årsräntan af det donationskapital, som H. M. Konung OSCAR II och några enskilda män täckts åt Akademien anförtro för astronomiska föreläsningars anordnande i hufvudstaden, har, enligt föreskrift, öfverlemnats åt Akademiens Astronom, som under året hållit fortsatta föreläsningar i theoretisk astronomi vid Stockholms Högskola.

Den *Letterstedtska donationen* har lemnat samma årsinkomst, 9,000 kronor, som under närmast föregående år, hvilken inkomst användts i öfverensstämmelse med donationsurkundens bestämmelser. Salunda har Letterstedtska resestipendiet, för närvarande utgörande 4,200 kronor, blifvit af K. Landtbruks-Akademien, som varit i tur att tillsätta stipendiat, anvisadt åt läraren vid Ultuna landtbruksinstitut Filos. Licentiaten KARL ALBERT

WESTERBERG, hvilken, enligt för honom utfärdad instruktion, kommer att företrädesvis besöka de Tyska landtbrukshögskolorna, såsom de i Breslau, Göttingen, Leipzig m. fl., och att särskildt vid någon af dem följa föreläsningarne och undervisningen i agrikultur- och mejerikemi, utfodrings- och jordbrukslära, men äfven att använda någon del af stipendie-tiden att besöka dylika anstalter i Schweiz, Holland, Belgien, Frankrike, England, Danmark och Norge. — De Letterstedtska räntemedlen till pris för förtjenstfulla orginalarbeten har Akademien fördelat i två pris, af hvilka det ena öfverlemnats åt Professorn i praktisk medicin vid universitetet i Upsala S. E. HENCHEN för hans under året från trycket utgifna arbete: »Klinische und anatomische Beiträge zur Patologie des Gehirns», och det andra åt Amanuensen vid den Meteorologiska Centralanstalten Dr. H. E HAMBERG för hans under flere år fullföljda undersökningar öfver klimatets olikheter i olika delar af vårt land, förnämligast nedlagda i den af honom redigerade tidskriften: »Månadsöfversigt af väderleken i Sverige», hvars 10:de årgång med det förflutna året utkommit. — Det Letterstedtska priset för förtjenstfull öfversättning till svenska språket har Akademien deremot icke funnit anledning att bortgifva, utan kommer prisbeloppet att läggas till donationskapitalet. — De Letterstedtska räntemedlen för särskildt maktpåliggande vetenskapliga undersökningar har Akademien anvisat åt e. o. Professorn vid Lunds universitet B. LUNDGREN för fortsättande och afslutande af de utaf honom under en följd af år utförda undersökningar öfver kritlagren i nordöstra Skåne. — För öfrigt hafva af donationens årsränta föreskrifna andelar blifvit öfverlemnade till Domkapitlet i Linköping för utdelande af belöningar åt förtjenta folkskolelärare inom Linköpings stift, till Pastors-Embetet i Wallerstads församling af samma stift för utdelande af premier i församlingens folkskola, för bildande af ett sockenbibliotek m. m., samt till Direktionen för Serafimerlasarettet i Stockholm för nödlidande sjuke resandes vård å detta lasarett.

Den *Letterstedtska Föreningens* fonder, hvilka på grund af testators föreskrift stå under Vetenskaps-Akademiens förvaltning, uppgingo vid 1890 års slut till en sammanlagd summa af 620,526 kr. 13 öre. Af årets ränteinkomst har ett disponibelt belopp af 16,570 kr. 95 öre blifvit till Föreningens styrelse öfverlemnadt.

Det *Wallmarska priset* för året har Akademien tillerkänt f. d. Professorn vid Stockholms Högskola, numera Professorn vid universitetet i Christiania W. C. BRÖGGER för hans under förlidet år utgifna arbete: »Die Mineralien der Syenit-Pegmatitgänge der südnorwegischen Augit- und Nephelin-Syenite.»

Den *Edlundska donationsräntan* har Akademien i två lika lotter anvisat till förfogande dels åt sin Fysiker Professor K. B. HASSELBERG till anskaffande af felande apparater för de spektroskopiska precisionsundersökningar, hvarmed han för närvarande är sysselsatt, och dels åt Amanuensen Dr. N. EKHOLM för utförande af undersökningar öfver Sveriges väderleks- och särskildt nederbördsförhållanden i ändamål att vinna ökad säkerhet i väderleksförutsägelser.

Den *Fernerska belöningen* för året har Akademien tilldelat Filos. Kandidaten G. CASSEL för en af honom till Akademien inlemnad och i Bihanget till hennes handlingar tryckt afhandling: »Om den konforma afbildningen af ett plan på ett prisma».

Den *Lindbomska belöningen* har hon i lika delar öfverlemnat dels åt Filos. Kandidaten H. BÄCKSTRÖM för en af honom inlemnad och i Bihanget offentliggjord afhandling: »Ueber angeschwemmte Bimsteine an Norwegischen Küsten», med fästadt afseende jemväl på hans undersökningar af mineral från Langesund, samt dels åt Filos. Kandidaten R. MAUZELIUS för hans i Öfversigten af Akademiens förhandlingar under året intagna uppsats om fluornaftalinsulfonsyra, och med hänsyn äfven till hans förut i samma ämne till Akademien inlemnade arbeten.

Den *Flormanska belöningen* har Akademien detta år icke funnit anledning att bortgifva, utan kommer det motsvarande räntebeloppet att läggas till det Flormanska donationskapitalet.

Med det *Beskowska stipendiet* eger ett liknande förhållande rum.

Utaf årsräntan af *Regnells zoologiska gåfvomedel* har Akademien anvisat till Professorerne S. LOVÉNS och CHR. AURIVILLII förfogande hvardera 500 kronor för utförande af arbeten inom deras afdelningar af Riksmuseum, åt Filos. Licentiaten E. LÖNNBERG 400 kronor för bearbetning af visa Crustaceer i Riksmusei samlingar, och åt Professorn vid Stockholms Högskola W. LECHE 500 kronor till arvode åt ett tillfälligt biträde vid undersökningar öfver ryggradsdjurens tänder.

Framlidne Doktor A. F. REGNELL har till Akademien öfverlemnat äfven en annan fond, stor 66,000 kr., benämnd hans *botaniska gåfvomedel*, hvaraf något mer än hälften, eller 36,000 kr., bildar en särskild fond för ett stipendium till anställande af resor för botaniskt ändamål i Brasilien eller andra intertropiska länder. Enligt föreskrift skola fondens årliga räntor för en följd af år hopläggas och förräntas intill dess en summa blifvit samlad, som anses tillräcklig att dermed bestrida en eller två personers resa under en tidrymd af minst två år uti ett eller annat af nämnda länder. Det är efter stipendiets stiftande först nu man ansett att tillräckliga medel blifvit på nämnda sätt samlade för att kunna träffa förberedelser till stipendiets användande för sitt ändamål. Den ständiga komité, som inom Akademien har bestämmande rätt i detta hänseende, har ock beslutit, dels att stipendiet skall i föreskrifven ordning kungöras till ansökning ledigt, dels att två personer skola tillsammans utföra den beramade resan, samt dels att en summa af 21,000 kronor bör beräknas erforderlig att i mån af behof successivt tillhandahållas stipendiaterne.

För vetenskapliga resor inom landet, i ändamål att undersöka dettas naturförhållanden, har Akademien anvisat följande reseunderstöd:

åt Docenten A. WIRÉN 150 kr. för uppehåll vid Kristinebergs zoologiska station i Bohuslän i ändamål att studera lägre hafsdjur, i främsta rummet mollusker;

åt vice Lektorn G. Adlerz 150 kronor för fortsatta undersökningar öfver pantopoderna, äfvenledes vid Kristineberg;

åt Filos. Kandidaten O. CARLGREN 150 kr. för fortsatta studier öfver vestkustens Actinier;

åt Filos. Kandidaten E. BORGSTRÖM 150 kronor för idkande vid Kristineberg af studier öfver i fiskar lefvande parasiter af echinorynchernas grupp;

åt Professorn F. R. KJELLMAN 250 kr. för anställande af undersökningar öfver Cladophoraceerna inom Östersjön och Kattegat;

åt Filos. Kandidaten A. Y. GREVILLIUS 150 kr. för studerande af de Öländska alvarväxternas morfologi och anatomi;

åt Filos. Kandidaten E. NYMAN 200 kr. för undersökning af lefvermossfloran inom Norrbottens län och särskildt i Lule lappmark;

åt Filos. Kandidaten G. ANDERSSON 125 kr. för studerande af torfmossar i trakten af Omberg; och

åt studeranden C. WIMAN 125 kr. för anställande af geologiska och palæontologiska undersökningar inom Jemtland.

De till Akademiens förfogande ställda statsmedel för instrumentmakeriernas uppmuntran har Akademien låtit lika fördela mellan matematiska och fysiska instrumentmakarne P. M. SÖRENSEN och G. SÖRENSEN.

Den minnespenning, som Akademien för detta tillfälle låtit prägla, är egnad åt minnet af hennes framlidne ledamot och Fysiker Professor E. EDLUND.

Akademien har äfven beslutit låta prägla och till Intendenten vid det under Akademiens inseende stående Naturhistoriska Riksmuseum Professor S. LOVÉN öfverlemna en särskild medalj med anledning deraf att han, som den 10 Februari 1841 af Akademien kallades och utnämndes till intendent vid museum, således nu i 50 år innehaft och till museets synnerliga båtnad utöfvat denna befattning.

Genom döden har Akademien under året förlorat bland sina svenska och norska ledamöter: f. d. Lotsdirektören och Kommendören i Kongl. Maj:ts Flotta CARL BERTIL LILLIEHÖÖK, f. d. Generaldirektören och Ordföranden i Kongl. Sundhets-Col-

legium MAGNUS HUSS, f. d. Professorn i medicin vid universitetet i Christiania FRANZ CHRISTIAN FAYE, f. d. Professorn i astronomi vid universitetet i Upsala HERMAN SCHULTZ, och Professorn i Grekiska språket och litteraturen vid Lunds universitet CHRISTIAN CAVALLIN; samt bland sina utländska ledamöter: Botanicus primarius vid Kejserl. botaniska trädgården i St. Petersburg CARL JOHAN MAXIMOWICZ.

Deremot har Akademien under året med sitt samfund förenat såsom svenska eller norska ledamöter: Professorn i statsekonomi och statistik vid universitetet i Christiania THORKIL HALVORSEN ASCHEHOUG, Akademiens Fysiker Professorn KLAS BERNHARD HASSELBERG, dåvarande Professorn vid Stockholms Högskola och numera Professorn i mineralogi och geologi vid universitetet i Christiania WALDEMAR CHRISTOFER BRÖGGER, vice Direktorn för Kejserl. Observatorium i Pulkowa MAGNUS NYRÉN, H. M. Konungens läkare, Professorn i medicin vid Karolinska medico-kirurgiska Institutet och Öfverläkaren vid Kongl. Serafimerlasarettet RAGNAR MAGNUS BRUZELIUS, Professorn i fysiologi vid Karolinska Institutet ROBERT ADOLF ARMAND TIGERSTEDT och Riksantiqvarien HANS OLOF HILDEBRAND; samt i utlandet Amerikanske Civilingeniören THOMAS ALVA EDISON.



Stockholm 18891. Kongl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 48. 1891. № 5.

Onsdagen den 13 Maj.

INNEHÅLL:

På tillstyrkan af utsedde komiterade antogos följande afhandlingar till införande i Akademiens Handlingar:

1:o) »Grunddragen af Skageracks och Kattegats hydrografi enligt den svenska vinterexpeditionens af år 1890 iakttagelser och föregående arbeten», af Professor O. PETTERSSON och Hr G. EKMAN;

2:o) »Studien über die Solenogastres. I. Monographie des Chætoderma nitidulum», af Docenten A. WIRÉN;

3:o) »Untersuchungen über fossile Hölzer Schwedens», af Director H. CONWENTZ i Danzig.

Anmäldes, att Professor J. A. OUCHTERLONY i Louisville, Norra Amerika, till Riksmuseum förärat betydande samlingar af fornindianska graffynd samt petrifikater från Amerikas äldsta formationer, äfvensom till Akademiens bibliotek en antal dyrbara

geologiska och etnologiska arbeten; med anledning hvaraf Akademien beslöt att till Herr OUCHTERLONY skulle, jemte tacksägelseskrifvelse, öfverlemnas Akademiens minnespenning i guld öfver LINNÉ.

Med anledning deraf, att Akademiens nuvarande sekreterare Hr LINDHAGEN nu under ett fjerdedels århundrade innehaft denna befattning, beslöt Akademien att låta i olja måla och i sin samlingssal uppsätta hans bild.

Hr S. LOVÉN redogjorde för verksamheten under sistlidne sommar vid den zoologiska stationen vid Kristineberg, äfvensom för innehållet af Docenten WIRÉNS ofvannämnda afhandling och Docenten C. W. S. AURIVILLII afhandling: »Ueber Symbiose als Grund accessorischer Bildungen bei marinen Gastropodengehäusen», hvilken redan vid ett föregaende tillfälle blifvit antagen till införande i Akademiens Handlingar.

Hr BRUZELIUS lemnade meddelande om sina iakttagelser rörande den Kochska behandlingsmetodens verkningar vid tuberkulösa sjukdomar.

Hr Frih. NORDENSKIÖLD förevisade och beskref en verldskarta från början af 15:de århundradet, hvilken tillhört Kardinal BORGIAS museum i Velletri (se Bihang till K. Vet.-Akad. Handl.)

Sekreteraren öfverlemnade för intagande i Akademiens skrifter följande uppsatser och afhandlingar: 1:o) »Jemförelse mellan ÅNGSTRÖMS och NEUMANS metoder för bestämning af kroppars ledningsförmåga för värme. 2. Experimentella undersökningar», af Fil. Licentiaten K. L. HAGSTRÖM*; 2:o) »Om fenyletyl-, fenylpropyl- och fenylisopropyltriazolföreningar», af Docenten J. A. BLADIN*; 3:o) »Om vattnets specifika värme mellan 0° och +40°», af Fil. Kandidaten A. M. JOHANSON*; 4:o) »Ett par formler för beräkning af mortaliteten inom pensionskassor eller andra slutna sällskap», af Amanuensen G. ENESTRÖM*; 5:o) »Studien über das Gehirn der Knochenfische», af Fil. Kandidaten G. O. MALME (se Bihang till K. Vet.-Akad. Handl.); 6:o) »Ett litet bidrag till Sibiriens chlorophyllophycé-flora», af Fil. Kandidaten O. BORGE (se Bihang etc.); 7:o) »Hydrografiska undersökningar i Gullmare-

fjorden sommaren 1890», af Fröken AUGUSTA PALMQVIST (se Bihang etc.).

Följande skänker anmäldes:

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

Stockholm. *Svenska turistföreningen.*
Årsskrift. 8(1891). 8:o.
Lund. *K. Universitetet.*
Acta. — Årsskrift. T. 26(1889/90): Afd. 1—2. 4:o.
Stavanger. *Museum.*
Aarsberetning. Aar 1890. 8:o.
Tromsö. *Museum.*
Aarshefter. 13(1890). 8:o.
Aarsberetning. Aar 1889. 8:o.
Abbeville. *Société d'émulation.*
Mémoires. T. 17: P. 1. 1889. 8:o.
Bulletin. Année 1888: N:o 1—4; 1889: 1—4. 8:o.
Angers. *Société d'études scientifiques.*
Bulletin. T. 18(1888)—19(1889). 8:o.
Auxerre. *Société des sciences historiques et naturelles de l'Yonne.*
Bulletin. Vol. 43(1889): L. 2; 44(1890): 1. 8:o.
Besançon. *Observatoire astronomique, chronométrique & météorologique.*
Bulletin météorologique. 1—3. 1890. 4:o.
— *Société d'émulation du Doubs.*
Mémoires. (6) Vol. 4(1889). 8:o.
Bordeaux. *Société Linnéenne.*
Actes. Vol. 42. 1888. 8:o.
— *Société des sciences physiques et naturelles.*
Mémoires. (3) T. 4—5: C. 1. 1888—89. 8:o.
Observations pluviométriques . . . faites dans le dép. de la Gironde. Année 1887/88—1888/89. 8:o.
Caen. *Société Linnéenne de Normandie.*
Bulletin. (4) Vol. 3. (1888/89). 8:o.
Catania. *Accademia Gioenia di scienze naturali.*
Atti. (4) Vol. 2. 1890. 4:o.
Cherbourg. *Société nationale des sciences naturelles et mathématiques.*
Mémoires. T. 26. 1889. 8:o.
Dijon. *Académie des sciences, arts et belles-lettres.*
Mémoires. (4) T. 1(1888/89). 8:o.
Edinburgh. *R. Physical society.*
Proceedings. Vol. 10: P. 2 (1889/90). 8:o.
Frankfurt a/M. *Senckenbergische Naturforschende Gesellschaft.*
SAALMÜLLER, M. & v. HEYDEN, L., Lepidopteren von Madagascar. Abth. 2. 1891. 4:o.
Genève. *Institut national Genevois.*
Bulletin. T. 30. 1890. 8:o.

Kjöbenhavn. *Naturhistorisk Forening.*
Videnskabelige Meddelelser. Aarg. 42(1890). 8:o.
London. *R. Institution.*
Proceedings. Vol. 13: P. 1. 1891. 8:o.
Madrid. *Comisión del mapa geológico de España.*
Boletín. T. 16(1889). 8:o.
Manchester. *Museum, Owens college.*
Report. 1(1889/90). 8:o.
— *Literary and philosophical society.*
Memoirs and proceedings. (4) Vol. 4: N:o 3(1890/91). 8:o.
México. *Observatorio meteorologico-magnetico central.*
Anales del ministerio del fomento. T. 8. 1887. 8:o.
Nancy. *Société des Sciences.*
Bulletin. Année 22(1889). T. 10. F. 23. 8:o.
Napoli. *Accademia delle scienze fisiche e matematiche.*
Rendiconto. (2) Vol. 4(1890): F. 1—12. 4:o.
Annuario della Società R. di Napoli. Anno 1891. 8:o.
Paris. *Comité international des poids et mesures.*
Procès-verbaux des séances. Année 1889. 8:o.
Comptes-rendus de la 1:e conférence générale des poids et mesures en 1889. 4:o.
Rapport aux gouvernements signataires de la convention du mètre 13(1889). 4:o.
Travaux et mémoires du bureau international des poids et mesures. T. 7. 1890. 4:o.
— *Bureau des longitudes.*
Annales. T. 4. 1890. 4:o.
Annuaire. An 1880. 8:o.
Connaissance des temps. An 1892. 8:o.
Rapport sur les observatoires astronomiques de province. 1889—1890. 8:o.
Loewy, M. & Puiseux, P., Étude du système optique formé d'une lunette astronomique et d'un double miroir . . . Paris 1890. 4:o.
— *Académie des sciences.*
Cauchy, A., Oeuvres complètes, publiées sous la direction scientifique de l'Académie des sciences. Ser. 2: T. 9. 1891. 4:o.
— *École polytechnique.*
Journal. Cah. 59. 1889. 4:o.
— *Muséum d'histoire naturelle.*
Nouvelles archives. (2) T. 10. (3) T. 1: F. 1—2; 2: 1. 1888—90. 4:o.
— *Observatoire.*
Annales: Mémoires. T. 19. 1889. 4:o.
— *Service de la carte géologique detaillée de la France.*
Études des gites minéraux de la France. — Bassin houiller et Permien d'Autun et d'Epinac. Fasc. 2. Zeiller, R., Flore fossile. P. 1: Texte & Atlas. 1890. 4:o.

(Forts. å sid. 357).

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1891. N:o 5.
Stockholm.

Jämförelse mellan Ångströms och Neumanns metoder för bestämning af kroppars ledningsförmåga för värme.

Af K. L. Hagström.

[Meddeladt den 13 Maj 1891 genom T. R. Thalén.]

II. Experimentella undersökningar.

A. Enligt Ångströms metod.

Inledning. Experimentella anordningar.

Den metod som professor Ångström 1861 framställde och tillämpade för bestämning af metallers och vätskors ledningsförmåga för värme har sedermera, så vidt jag vet, endast en gång kommit till användning, nämligen af professor C. G. Lundquist för bestämning af vätskors ledningsförmåga för värme. Metoden har emellertid sedan dess flitigt diskuterats i litteraturen, och dess förmåga att ge utmärkta resultat erkänts af framstående vetenskapsmän, såsom Verdet [1]), Tait [2]) och Thomson. [3])

I en föregående uppsats [4]) har jag redogjort för metoden och lösningen af differentialekvationen.

De experimentella anordningarna vid mina försök voro följande. Upphettningarna och afkylningarna skedde med en Bunsens brännare och vattenledningsvatten. Den metallstång, som skulle undersökas, förseddes vid ena ändan med en omfatt-

---

1) Se Verdet, Oeuvres Complets.
2) Proceed. of the Roy. Soc. of Ed. VIII 1872—75, pag. 55; samt Phil. Mag. XII 1881, pag. 147.
3) Se en artikel under rubriken *Heat* i Encycl. Brit. XI, 9 uppl. 1880.
4) Öfversigt af K. Vet.-Akad. Förhandl. 1891, N:o 2, pag. 45.

ning i form af en ihålig cylinder med rörledningar till och från densamma. Genom rörledningarne och cylindern fick vattenledningsvatten strömma omkring stången. I ledningen till cylindern funnos två kranar, den ena för att moderera vattenmängden, den andra för att periodiskt släppa fram eller afstänga vattnet. Genom en tredje kran, i rörledningen från cylindern, kunde vattnet tappas ur densamma, då upphettningarne började. Bunsenska brännaren placerades under stången, framom eller bakom cylindern. En stor skärm skyddade stången på alla sidor för strålning från omgifningen. Vid en del äldre försök användes för upphettningen, i stället för Bunsens brännare, ångorna från kokande vatten.[1]) Det var för att göra upphettningen starkare och därigenom få större amplituder, som jag i de senare försöken uteslutande användt Bunsenska brännaren för upphettningen.

Alldenstund de båda värmekällorna, Bunsenska brännaren och vattenledningsvattnet, verkade på olika punkter af stången, så är det gifvet, att, om de successiva upphettningarne och afkylningarne toge lika lång tid, vågens form komme att betydligt afvika från en sinusoid, åtminstone i punkter, som ligga nära de båda värmekällorna. Om till exempel den högre värmekällan vore innerst, så skulle minimet inträffa för hastigt, så att tiden mellan minimum och maximum blefve mer än en half period, samt mellan maximum och minimum mindre, och den del af vågen, som svarar mot upphettningen, blefve upplyftad.

För att motverka denna olägenhet, och därigenom möjliggöra observationer i punkter, som ligga de båda värmekällorna tämligen nära, har jag iakttagit, dels att låta den inre värmekällan verka mindre kraftigt än den yttre, dels gifvit den yttre något längre tid. Vid början af hvarje experiment afpassades nämligen tiden för de båda värmekällornas verkan så, att maxima och minima på första observationspunkten följde på hvarandra med en half periods afstånd i tid. För bestämning af tiderna användes kronometer, som knäppte halfsekunder.

[1]) Jfr föröfrigt Ångströms anordningar vid hans försök.

Galvanometrar och Termometrar.

För bestämning af temperaturerna på observationspunkterna har jag användt galvanometrar, i olikhet med ÅNGSTRÖM, som använde kvicksilfvertermometrar. Härigenom torde hafva vunnits ett snabbare återgifvande af temperaturerna, än hvad som med kvicksilfvertermometrar kunnat ske, alldenstund dessa, när de användas för bestämningar af hastigt föränderliga temperaturer, verka stötvis.[1]) Med galvanometrar torde dessutom betydligt större känslighet kunna ernås än med termometrar.

Tvenne spegelgalvanometrar användes, en WEBERS och en KOHLRAUSCHS, i det följande betecknade G och g, den senare försedd med skyddshuf af järn och särdeles utmärkt för oföränderligheten af sin nollpunkt. Afstånden spegel-skala voro vid G 325.o samt vid g 150.o cm.

De använda termoelementen voro nysilfver-järn-element, hvartill användes 70 à 80 cm långa samt 1 à 2 mm tjocka trådar. I de metallstänger, som utgjort föremål för undersökning, voro $2^1/_2$ mm vida hål borrade in till stångens midt. Dessa fyldes vanligen till en del med kvicksilfver, i hvilket de fria — icke hoplödda — ändarne af elementen nerstuckos. För att förekomma obehöriga kontakter, var den ena tråden omlindad med papper eller vaxtaft. Kontakten mellan elementens andra ändar och ledningstrådarne till galvanometrarne förmedlades äfvenledes af kvicksilfret i hålen på en platta af paraffin, där de andra ändarne af elementen äfvensom ledningstrådarne voro nerstuckna.

Denna paraffinplatta — och därmed också ena lödningstället — hade omgifningens (= rummets) temperatur, som angafs af en kvicksilfvertermometer B med termometerkulan nerstucken i kvicksilfver i en fördjupning på en annan paraffinplatta, ställd strax bredvid den förra. Ändringarne i galvanometerutslagen skedde synnerligen jämt, utan alla oskillationer.

Graderingen af galvanometrarne tillgick på följande sätt. En större glasbägare försågs med lock af trä, och genom ett hål

[1]) Se nyss cit. afhandling af TAIT i Phil. Mag. 1881, pag. 151.

i locket nedsattes en mindre bägare med kvicksilfver i botten. I detta kvicksilfver nedfördes de ändar af termoelementen, som under experimenten voro placerade i hålen af observationsstången. Likaledes nedsattes i kvicksilfret den termometer *A*, med hvilken galvanometrarne skulle kompareras. Fyldes nu varmt vatten i de båda bägarne, började temperaturen hos kvicksilfret att stiga. Vattnet i de båda bägarne omrördes flitigt. När temperaturen började visa sig konstant, aflästes ömsevis galvanometrarne och termometrarne 8 à 10 gånger, allt under flitig omröring af vattnet. Medeltal togos af galvanometerutslagen och termometerafläsningarne, hvilka senare korrigeras på sätt nedanför skall visas. — Mellan försöken bestämdes termometerns *A* nollpunkt.

Tab. I. **Galvanometerkomparation.**

Observerade			Beräknade *v*			
g.	*G*.	*v*.	ur *g*.	*O—B*.	ur *G*.	*O—B*.
630.6	696.5	50°.56	50°.67	— 0°.11	50°.56	± 0.00
616.5	682.4	49.51	49.65	— 0.14	49.61	— 0.10
602.8	667.8	48.55	48.61	— 0.06	48.60	— 0.05
559.4	620.9	45.33	45.44	— 0.11	45.36	— 0.03
547.7	610.0	44.52	44.57	— 0.05	44.59	— 0.07
539.4	597.8	43.86	43.94	— 0.08	43.74	+ 0.12
503.7	561.9	41.17	41.23	— 0.06	41.21	— 0.04
492.3	551.5	40.38	40.36	+ 0.02	40.48	— 0.10
483.0	542.0	39.72	39.64	+ 0.08	39.80	— 0.08
451.6	506.0	37.32	37.22	+ 0.10	37.24	+ 0.08
444.2	498.0	36.74	36.63	+ 0.11	36.74	± 0.00
436.9	489.4	36.17	36.06	+ 0.11	36.04	+ 0.13
393.3	440.1	32.52	32.61	— 0.09	32.49	+ 0.03
389.6	435.8	32.23	32.31	— 0.08	32.18	+ 0.05
351.2	394.1	29.17	29.22	— 0.05	29.15	+ 0.02
348.0	390.6	28.95	28.98	— 0.03	28.90	+ 0.05
313.4	353.0	26.12	26.17	— 0.05	26.14	— 0.02
276.2	312.4	23.21	23.13	+ 0.08	23.15	+ 0.06
232.1	263.8	19.49	19.48	+ 0.01	19.56	— 0.07
185.9	211.4	15.68	15.63	+ 0.05	15.66	+ 0.02
109.7	123.2	9.27	9.22	+ 0.05	9.08	+ 0.19
56.9	63.9	4.75	4.74	+ 0.01	4.64	+ 0.11

Tab. I innehåller resultaten af en sådan galvanometerkomparation, som ligger till grund för beräkningen af en del af mina försök.

Första och andra kolumnerna innehålla de observerade galvanometerutslagen, tredje kolumnen innehåller differensen v mellan lödställenas temperaturer A och B. I de följande kolumnerna finnas de återberäknade värdena på v samt skilnaden mellan observation och beräkning.

För återberäkningen har jag användt formlerna [1])

$$v = 26^\circ.326 + [8.91080](g - 315.3) - [5.02303](g - 315.3)^2 - [1.9551](g - 315.3)^3, \quad (1)$$

$$v = 25^\circ.790 + [8.86594](G - 348.25) - [4.67666](G - 348.25)^2 - [1.7186](G - 348.25)^3. \quad (2)$$

Formlerna har jag erhållit med tillhjälp af TSCHEBYSCHEWS interpolationsmetod. [2]) Som nu mellertid denna metod förutsätter någorlunda ekvidistanta observationer, har jag vid g grafiskt interpolerat 13 och vid G 38 observationer, så att till grund för formel (1) ligga 35 och för (2) 60 observationsvärden.

För beräkningen af försök 2 i det följande, hvilket skett med andra järn-nysilfvertrådar, hoplödda med hvarandra och med ledningstrådarne, samt med glycerin i stället för kvicksilfver i hålen af stången, har jag användt följande formler:

$$v = [8.8065]\, g, \quad (3)$$

$$v = [8.7886]\, G, \quad (4)$$

där g och G beteckna galvanometerutslagen i skaldelar, reducerade till proportionalitet med vinkelutslaget. Formlerna grunda sig på 5 observationer mellan $v = 13^\circ$ och $v = 40^\circ$ eller mellan 200 och 650 skaldelars utslag. Afvikelserna mellan observation och beräkning uppgå icke på något ställe till $^1/_2$ procent.

Den termometer A, som jag användt vid galvanometerkomparationerna, var en ÅDERMANS kvicksilfvertermometer med

---

[1]) Här liksom öfverallt i det följande förstås med siffror inom parentes [...] motsvarande talet till den logaritm, som står inom parentesen.

[2]) Jfr not 1, pag. 73.

skala i femtedels grader. Jag har underkastat denna termometer en undersökning enligt föreskrifterna i KOHLRAUSCHS Leitfaden der Prakt. Physik, 5 Uppl. 1884, pag. 69 och ff., och därvid med delningsmaskin uppmätt skalan och kalibrerat röret, samt bestämt korrektionen för skilnaden mellan fryspunkt och kokpunkt. De erhållna korrektionerna för 0°, 10°... 60°... utgöra ± 0°.00, + 0°.05, — 0°.01, + 0°.06, + 0°.05, + 0°.00, + 0°.06 ..., hvartill kommer korrektion för nollpunkten.

Vid konstantbestämningarna räckte alltid en betydlig del af det långa termometerröret öfver vattenbadet. För bestämning af den korrektion $\triangle t$, som på grund häraf behöfde anbringas på termometerafläsningarna, nedsattes termometern A i ångorna från kokande vatten i ett vanligt kärl för kokpunktens bestämning. Då 20, 40, 60 och 80 grader af termometerskalan räckte upp ofvan locket af kokkärlet, erhöllos korrektionerna $\triangle t$ respektive + 0°.18, + 0°.37, + 0°.56 och + 0°.77. Den härur beräknade formeln:

$$\triangle t = 0.000120\, a\, (t - t_0)\,,$$

där a betecknar antalet öfverskjutande grader samt $t—t_0$ skilnaden mellan termometerskalans och omgifningens temperaturer — i försöket = 80° —, ger vid återberäkning i ordning + 0°.19, + 0°.38, + 0°.57 samt + 0°.77.

Den för bestämning af det kallare lödningsställets och omgifningens temperatur använda termometern B var likaledes en ÅDERMANS termometer med skala i femtedels grader. För att bestämma korrektionerna på densamma har komparation med A i vattenbad egt rum.

Observationsmaterialet.

Tabell II innehåller ett par af mina försök med ÅNGSTRÖMS metod. Försök 1 är utfördt på samma stång af koppar, som utgjort föremål för Ångströms undersökningar, [1]) försök 2 på en rund stång af engelsk koppar, sådan den förekommer i handeln.

[1]) Öfvers. af K. Vet. Akad. Förh. 1862, N:o 2, pag. 21.

Tabellen upptager galvanometeraflästningarna, korrigerade för operiodisk variation på sätt nedan beskrifves. Serierna äro alla enkla. — Observationerna äro gjorda i tre punkter af stången. Med Ig förstås i tabellen observationer med KOHLRAUSCHS galvanometer på observationsstället närmast värmekällorna, IIIG observationer med WEBERS galvanometer på den aflägsnaste observationspunkten, och så vidare. Galvanometrarne ha observerats hvardera 2 gånger i minuten. I försök 1 har först Ig observerats ensam, sedan samtidiga IIg och IIIG, och slutligen samtidiga IIG och IIIg. Enligt hvad i andra kolumnen antydes, ha observationerna i punkterna I och II skett på 10^s och 40^s, i III däremot på 20^s och 50^s. Mellan observationerna i samma vertikalrad i punkterna I och III samt II och III eger sålunda rum en fasskilnad på 10^s.

I de sista kolumnerna ha upptagits galvanometrarnes jämvigtslägen utan ström vid seriernas början och slut, vidare beloppet af operiodiska variationen, d. v. s. skilnaden mellan galvanometerobservationerna vid slutet och början af serierna, så att tecknet + betecknar stigning och — sänkning, samt slutligen omgifningens temperatur, observerad under försöket.

Det är gifvet, att en hel mängd orsaker störande inverkat på det rena förloppet af fenomenet, d. v. s. åstadkommit, att slutet af en serie icke sammanfaller med början.

Främst bland dessa orsaker stå ändringarne i rummets temperatur under försökets lopp, hvarigenom dels ena lödningsställets temperatur icke blir konstant, dels strålningen från stångens yta icke blir densamma för samma temperatur hos ytan. Andra orsaker, som störande inverka, äro ojämnheter i uppvärmningen med BUNSENSKA brännaren genom olikhet i gastrycket, vidare ändringar i vattenledningsvattnets tryck och temperatur, samt slutligen variationer i jordmagnetismen.

Jag har korrigerat mina serier för den operiodiska variationen genom användande af det LAMONT-WILDSKA förfaringssättet. Om serien innehåller $2n$ observationer och den operiodiska variationen betecknas med $\triangle v$, anbringar jag i ordning på

Tab. II. **G a l v a n o m e t e r-**

Försök 1. Ångströms Kopparstång, blank. $p = 4s$, $q = s^2$, $s = 3.50$ cm,

Galv.	Observations-tider.		1^m		2^m		3^m		4^m	
I g	$10^s, 40^s$	Uppvärmning	[2] ^{i}724.0	735.0	**736.8**	729.0	714.4	696.0	675.0	652.1
		Afkylning	424.2	^{i}400.5	**396.1**	414.2	440.5	469.7	499.5	528.7
II g	$10^s, 40^s$	Uppvärmning	^{i}663.0	671.1	679.9	687.3	693.6	698.2	700.8	**701.4**
		Afkylning	647.1	^{i}637.1	627.0	616.9	609.0	603.9	**601.7**	602.3
III G	$20^s, 50^s$	Uppvärmning	641.0	643.0	645.9	648.9	652.3	655.6	659.2	662.3
		Afkylning	666.6	664.3	661.3	658.2	654.8	651.0	647.7	643.8
II G	$10^s, 40^s$	Uppvärmning	^{i}615.0	624.9	633.9	642.1	649.0	653.9	656.7	**657.7**
		Afkylning	596.4	^{i}585.0	573.8	563.2	554.4	548.8	**546.3**	546.8
III g	$20^s, 50^s$	Uppvärmning	688.9	690.9	693.4	696.2	699.2	702.2	705.2	707.9
		Afkylning	711.5	709.5	706.9	704.1	700.9	697.8	694.5	691.4

Försök 2. Rund Kopparstång, blank. $p = 2\pi r = 7.13$ cm,

Galv.	Observations-tider.		1^m		2^m		3^m		4^m	
I g	$10^s, 40^s$	Uppvärmning	484.8	510.5	534.9	553.9	567.0	**572.2**	570.5	562.5
		Afkylning	324.1	—	250.7	214.0	187.6	**178.3**	185.7	203.7
II G	$20^s, 50^s$	Uppvärmning	503.9	511.7	520.6	529.6	538.6	548.6	558.5	564.9
		Afkylning	560.5	—	542.8	532.5	521.8	509.8	499.2	490.1
I G	$10^s, 40^s$	Uppvärmning	460.3	485.7	509.4	529.1	542.2	**547.7**	546.6	538.9
		Afkylning	313.9	280.9	248.3	215.7	192.3	**183.8**	189.2	205.9
III g	$20^s, 50^s$	Uppvärmning	658.6	**658.5**	658.8	659.8	661.4	663.4	665.1	667.9
		Afkylning	686.3	—	686.1	685.7	684.3	683.0	680.8	678.0
II g	$10^s, 40^s$	Uppvärmning	549.0	556.9	565.7	574.9	584.5	593.7	602.9	610.1
		Afkylning	609.6	601.9	593.1	583.4	572.8	561.7	550.8	541.1
III G	$20^s, 50^s$	Uppvärmning	620.7	**620.6**	621.1	622.2	623.4	625.3	627.7	630.1
		Afkylning	649.3	—	649.9	649.3	647.9	645.9	643.7	641.2

[1] z betecknar afståndet mellan första observationspunkten och stångens fria ända.
[2] i ffr en siffra betecknar interpoleradt värde.

observationer.

$T = 16^{min.}$, $z = 90$ cm.[1] Uppvärmning $8^m\,30^s$, afkylning $7^m\,30^s$.

5^m		6^m		7^m		8^m		Jämvigts läge.	Operiod. variation.	Omgifn. Temp.
628.2	603.0	577.3	551.4	525.9	500.2	474.8	449.3	—	—	—
556.5	582.7	607.9	630.3	651.8	671.7	690.2	707.0	940.0	+ 0.2	—
700.3	697.5	693.2	687.8	681.2	673.8	665.4	656.3	939.6	—	14°.06
605.0	609.3	614.8	621.6	627.9	637.0	645.4	653.8	939.0	± 0.0	14.16
664.9	667.0	668.5	670.0	670.3	670.4	670.0	668.7	924.7		14.32
641.4	639.3	637.8	636.7	636.5	637.1	638.0	639.5	926.0	− 0.2	14.58
656.6	653.0	648.5	642.5	634.7	626.1	617.0	607.0	926.0	—	14.28
550.0	554.9	561.5	569.0	577.3	586.1	594.2	604.6	925.7	+ 3.0	—
710.3	712.1	713.6	714.3	714.9	714.9	714.3	713.0	939.0	—	—
688.8	686.8	685.4	684.6	684.5	684.8	685.9	687.2	938.2	+ 0.6	—

$T = 16^{min.}$, $z = 60$ cm.[1] Uppvärmning $8^m\,50^s$, afkylning $7^m\,10^s$.

5^m		6^m		7^m		8^m		Jämvigts läge.	Operiod. variation.	Omgifn. Temp.
548.8	530.6	508.4	483.5	455.5	425.3	393.0	360.1	940.8	—	—
230.3	261.6	294.0	327.7	361.1	393.1	424.9	454.3	940.8	+ 6.1	—
571.1	575.2	578.3	579.3	578.9	576.4	572.5	567.5	915.6	—	—
483.2	478.0	475.9	476.3	478.6	482.7	488.1	—	914.5	+ 1.4	14.38
525.6	508.3	486.9	462.7	436.1	407.5	376.8	345.5	914.5	—	14.50
228.8	255.9	284.8	314.7	345.3	375.2	404.6	433.0	913.6	+ 4.3	14.60
670.2	673.0	675.6	677.9	680.4	682.5	684.3	685.4	940.8	—	14.70
675.0	672.0	669.2	666.7	664.3	661.8	660.4	—	940.4	+ 2.9	14.54
616.5	621.3	624.4	625.9	625.8	623.8	620.4	615.8	940.4	—	—
532.9	528.0	525.2	524.8	526.5	530.3	535.2	541.5	940.4	+ 2.2	—
632.9	635.7	638.4	641.2	643.7	645.9	647.5	648.9	913.6	—	—
638.4	635.2	631.9	629.0	626.2	623.9	622.2	—	914.0	+ 2.8	—

observationerna följande korrektioner: $+\frac{n}{2n}\triangle v$, $+\frac{n-1}{2n}\triangle v$, $+\ldots+\frac{1}{2n}\triangle v, -\frac{1}{2n}\triangle v, -\ldots-\frac{n-1}{2n}\triangle v, -\frac{n}{2n}\triangle v$. Vid serier, omfattande två eller flera perioder, har jag användt det af EKHOLM föreslagna förfaringssättet [1]) för elimination af operiodisk variation, som består däri, att man vid beräkning af medeltalen tilldelar första seriens observationer i ordning vigterna 1, 2, ... $2n$, sista seriens observationer vigterna $2n$, ... 2, 1, samt de mellanliggande seriernas vigten $2n$.

Seriernas beräkning med minsta kvadratmetoden.

På de i Tabell II anförda observationerna skall nu minsta kvadratmetoden tillämpas för beräkning af koefficienterna a, a_1, b_1 i den FOURIERS serie

$$v = a_x + a'_x \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + b'_x\right),$$

som vi antaga återge observationerna. [2])

Jag behöfver icke här redogöra för detaljerna af räkningen, utan hänvisar jag till DIENGER eller DOVES Repertorium, [3]) där tabeller finnas för underlättande af sifferräkningarne.

Räkningarne med minsta kvadratmetoden har jag i försök 1 utfört med galvanometerafläsningarna sådana de stå i Tab. II. Vid försök 2 har jag verkstält subtraktion från jämvigtsläget och korrigerat till proportionalitet med vinkelutslag. Till grund för räkningen med minsta kvadratmetoden läggas nämligen differenserna mellan motsvarande observationer i hvarje halfperiod, alltså om serien innehåller $2n$ termer, differenserna mellan 1^a och n^e, 2^a och $n+1^a$ o. s. v. De räkningar, som med dessa differenser utföras, äro nu sådana, att om differenserna utbytas mot andra med dem proportionella kvantiteter, det genom räk-

[1]) EKHOLM NILS: Zur Ableitung einer periodischen Variation etc. Zeitschrift d. Oest. Ges. f. Met. XX 1885, pag. 81.

[2]) Jfr Afd. I, ekvationen (21), pag. 60.

[3]) Se not 1) pag. 50.

ningen erhållna värdet på amplituden a' skiljer sig från det rätta på en konstant faktor, som uttrycker förhållandet mellan dessa kvantiteter och differenserna under det att värdet af b' blir oförändradt. I försök 2, där sambandet mellan temperaturer och skaldelar uttryckes genom formlerna (3) och (4), angifna i det föregående, bör sålunda det erhållna värdet på a' multipliceras med galvanometerns reduktionsfaktor. Ha, såsom i försök 2, galvanometrarne bytt plats, så behöfves icke någon multiplikation med reduktionsfaktorn; geometriska mediet mellan de erhållna värdena på kvoten $\frac{a'_0}{a'_x}$ anger dess rätta värde. Jag hänvisar föröfrigt rörande denna sak till ÅNGSTRÖMS afhandling i Öfversigten 1861.

Om sambandet mellan temperaturer och galvanometerutslag kunde uttryckas genom en parabel med ekvationen

$$v = Ag + Bg^2 , \qquad (5)$$

så skulle det ur galvanometerutslagen eller, som blir detsamma, ur galvanometerafläsningarne härledda värdet på a' multipliceras med trigonometriska tangenten för kurvans lutning i den punkt, som svarar mot medelskaldelen inom serien, för att bli lika med det värde på a', som härledes ur observationerna reducerade till grader. — Låt nämligen i en serie de observerade galvanometerutslagen ligga mellan g_1 och g_2, så att amplituden, i skaldelar räknad, vore $g_2—g_1$. De motsvarande temperaturerna antagas vara v_1 och v_2. Vi antaga till en början, att parabelbågen mellan punkterna (g_1, v_1) och (g_2, v_2) identifieras med motsvarande korda. Det inses lätt, att differensen mellan två ordinator till kordan är proportionell mot differensen mellan motsvarande abscissvärden. Utföres nu räkningen med abscissorna i stället för kordans ordinator, så erhålles, enligt hvad ofvan anmärkts, ett värde på a', som bör multipliceras med trigonometriska tangenten för kordans lutning med abscissaxeln, för att bli lika med det värde som ordinatorna skulle gett, under det att värdet på b' blir oförändradt. Nu hafva de abscissvärden, hvilkas differenser läggas till grund för räkningen, en fasskilnad af 180°

och ligga därföre i det närmaste på lika afstånd från medelvärdet inom perioden. Differensen mellan två ordinator till parabeln blir därföre i det allra närmaste lika med differensen mellan motsvarande ordinator till kordan; och differenserna skulle bli exakt lika, om kurvan af de observerade värdena vore en sinusoid. Som nu kordan är parallel med parabelns tangent i den punkt, hvars abscissa är $\frac{g_1 + g_2}{2}$, [1]) så böra de ur skaldelarne beräknade värdena på a' multipliceras med reduktionsfaktorn

$$A + 2B\frac{g_1 + g_2}{2},$$

för att bli lika med det värde på a', som skulle härledts ur de till grader reducerade galvanometerutslagen.

Det resonnemang, vi här utfört för en parabolisk formel (5), låter icke tillämpa sig på tredjegradens formler sådana som (1) och (2) i det föregående. Det kan emellertid för detta fall lätt bevisas, att differensen mellan tvenne ordinator till kurvan på lika afstånd från seriens medelordinata och differensen mellan motsvarande ordinator till kordan skilja sig på en kvantitet hvars max. är 0,096 $D(g_2 - g_1)^3$, där D betecknar faktorn till g^3 i formlerna (1) eller (2) och g_2-g_1 såsom nyss amplituden inom serien. Denna skilnad uppgår i (1), där D är störst, för 100 skaldelars amplitud till mindre än 0°,001 samt för 200 skaldelars amplitud till mindre än 0°,01. Det fel, som begås, om båge och korda identifieras, är sålunda för serier med så små amplituder som 200 skaldelar utan betydelse. Nu sammanfaller visserligen icke kordans lutning med tangentens, som svarar mot medelordinatan, men skilnaden mellan trigometriska tangenterna för lutningarne uppgår endast till

$$\tfrac{1}{4} D(g_2 - g_1)^2,$$

eller i (1) för 100 skaldelar till 0,000022.

---

[1]) Denna sats, liksom den föregående om differenserna mellan parabelns och kordans ordinator, är lätt att uppvisa såsom allmängiltig för parabeln.

Det torde sålunda vara möjligt, att beräkningen ur galvanometerafläsningarne medfört ett fel af en eller annan enhet i fjärde decimalen af värdena på a' b', och önskligt hade varit att räkningarne kunnat göras om med skaldelar reducerade till grader, men tiden har icke medgifvit något sådant. Emellertid torde en sådan omräkning endast obetydligt modifiera de erhållna resultaten.

Tab. III. **Resultat af räkningen med minsta kvadratmetoden.**

Försök.	Galvanometer.	Medeltemperatur a i skaldelar.	Medeltemperatur a i grader.	Amplitud a' log a' i skaldelar.	Amplitud a' med. red. till $C°$.	Amplitud a' $\frac{1}{M}\log\frac{a'_0}{a'_x}$	Fas b'	$b'_0 - b'_x$ i rad. som enhet.
1	I g 10^s	357.4	29.74	2.1863	—	I – II	253°.05	I – II
—	I g 40^s			2.1862	1.0920	ur G och g	253.05	ur G och g
—	II g 10^s	285.8	23.92	1.6908	—	1.123	191.50	1.073
—	II g 10^s			1.6894	0.6041	ur g	191.31	ur g
—	III G 20^s	272.3	20.19	1.2335	—	1.123	131.61	1.076
—	III G 50^s			1.2358	0.1055	II—III	131.76	II—III
—	II G 10^s	321.7	23.84	1.7376	—	ur G och g	191.65	ur G och g
—	II G 40^s			1.7373	0.6048	1.148	191.77	1.104
—	III g 20^s	238.7	20.03	1.1887	—	ur g	132.48	ur g
—	III g 50^s			1.1874	0.1065	1.146	132.42	1.094
2	I g 10^s	520.1	33.31	2.2153	—	I – II	28.72	I—II
—	I g 40^s			2.2130	—	ur G och g	28.75	ur G och g
—	II G 20^s	383.7	23.58	1.7075	—	1.211	— 33.84	1.151
—	II G 50^s			1.7074	—	ur g	— 33.95	ur g
—	I G 10^s	527.9	32.44	2.2249	—	1.229	28.36	1.150
—	I G 40^s			2.2250	—	II—III	28.36	II—III
—	III g 20^s	265.2	16.98	1.1351	—	ur G och g	— 99.92	ur G och g
—	III g 50^s			1.1349	—	1.249	— 99.74	1.154
—	II g 10^s	356.1	22.75	1.6809	—	ur g	— 37.06	ur g
—	II g 40^s			1.6800	—	1.256	— 37.22	1.160
—	III G 20^s	277.8	17.07	1.1651	—	—	— 99.66	—
—	III G 50^s			1.1705	—	—	— 99.79	—

I Tab. III har jag sammanfattat resultaten af räkningen med minsta kvadratmetoden. Medeltemperaturen a är beräknad medels formlerna (1) och (2) ur medelvärdet af galvanometer-

utslagen. Vid beräkningen af amplituder och faser har jag för kontrolls skull delat serierna i tvänne, i tab. betecknade Ig10^s, Ig20^s o. s. v., innehållande den ena observationer med udda ordningsnummer, den andra med jämna, och beräknat hvarje sådan serie för sig. Vid beräkningen af fasen b' har korrektion skett för den mellan de båda halfvorna befintliga fasskilnaden, som i tid är 30^s och i vinkel 11°.25 ($T = 16^m$). De för serier 10^s och 40^s angifna värdena på b' hänföra sig alltså till 10^s, och för serier 20^s och 50^s till 20^s, hvilket bör iakttagas vid beräkning af fasskilnaden $b'_0 - b'_x$.

Ur de i Tab. III angifna värdena på $\frac{1}{M} \log \frac{a'_0}{a'_x}$ samt $b'_0 - b'_x$ och medeltemperaturerna skola vi nu beräkna värdena af K och H samt, så vidt ske kan, temperaturkoefficienterna. Jag hänvisar till ekvationerna (25) pag. 61. Observationerna äro, såsom tab. visar, gjorda i 3 af stångens punkter. Kombineras observationerna i I och II samt II och III erhållas två ekvationssystem (25), ur hvilka λ_1 och μ_1 samt $\varrho_{01} \cos \varphi_{01}$ och $\varrho_{01} \sin \varphi_{01}$ kunna beräknas.

Ur de allmänna uttrycken pag. 56 och 57 kunna tämligen lätt härledas följande uttryck för $\varrho_{01} \cos \varphi_{01}$ och $\varrho_{01} \sin \varphi_{01}$, nämligen

$$\left.\begin{aligned} \varrho_{01} \cos \varphi_{01} &= \frac{\lambda_0(\lambda_0 + 2\lambda_1)\alpha + 2\mu_1^2\beta}{\lambda_0[(\lambda_0 + 2\lambda_1)^2 + 4\mu_1^2]}, \\ \varrho_{01} \sin \varphi_{01} &= \frac{-2\lambda_0\mu_1\alpha + (\lambda_0 + 2\lambda_1)\mu_1\beta}{\lambda_0[(\lambda_0 + 2\lambda_1)^2 + 4\mu_1^2]}, \end{aligned}\right| \qquad (6)$$

där α och β äro förkortade beteckningar, så att

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \lambda_0\eta - (\lambda_0 + \lambda_1)2\varkappa, \\ \beta &= \lambda_1 2\gamma - (\lambda_0 + \lambda_1)2\varkappa. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Ur de beräknade värdena på λ_1 och μ_1 härledas nu K och H ur relationerna

$$\lambda_1\mu_1 = \frac{\pi}{\mathrm{TK}},$$

$$\lambda_1^2 - \mu_1^2 = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{K}}.$$

Värdet af λ_0 fås ur relationen

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{H}{K}},$$

hvarefter ekvationerna (6) bestämma kvantiteterna α och β, samt ekvationerna (7) temperaturkoefficienterna 2γ, $2\varkappa$ och η, då en af dem t. ex. 2γ antages känd från annat håll.

Försök 1. *Ångströms Kopparstång.*

Afståndet I—II $= x_1 = 20.09$ cm samt II—III $= x_2 = 20.57$ cm.

I efterföljande tab. IV sammanfattas beräkningen af värmeledningskonstanterna och deras temperaturkoefficienter.

Tab. IV. **Försök 1.**

Ur I—II:	Ur II—III:
$\frac{1}{M}\log\frac{a'_0}{a'_x} = 1.123$	$\frac{1}{M}\log\frac{a'_0}{a'_x} = 1.146$
$b'_0 - b'_x = 1.076$	$b'_0 - b'_x = 1.094$
$2(a_0 - a_x) = 11.64$	$2(a_0 - a_x) = 7.78$
Approximativ beräkning:	
$K = 1.093$	$K = 1.104$
$H = 0.000282$	$H = 0.000301$
Beräkning ur I, II, III, enl. ekv. (25), (6), (7):	
$K = 1.126$, $H = 0,000333$	
$\varrho_{10}\cos\varphi_{01} = [7.010]$, $\varrho_{01}\sin\varphi_{01} = [7.233]$	
$\alpha = -[5.690]$, $\beta = [6.027]$	
$2\varkappa = -0.00111$, $\eta = -0.00753$	
$k_0 = 0.951$, $h_0 = 0.000246$	
$t = 14^{\circ}.3.$	

Det har vid mina försök i allmänhet visat sig, att de ofta rätt betydliga variationerna i jämvigtsläget hos galvanometern G i observationerna infört fel, som i serierna på observationspunkterna II och III, där amplituderna äro minst, få ganska stor

betydelse. Då ändringarne i jämvigtsläget försiggått proportionelt mot tiden, ha dessa fel eliminerats på samma gång som den operiodiska variationen; men i andra fall, då jämvigtsläget under en del af serien sjunkit för att sedan åter stiga eller tvärtom, kvarstår en operiodisk variation i observationerna, som ofta vid observationernas uppritande i kurva varit påtaglig, men som jag ej vetat något medel att eliminera. Af denna grund har jag vid beräkningen i tab. IV uteslutit serierna G och endast medtagit serierna g.

Beräkningen har skett dels approximatift enligt ekvationerna (14) afd. I pag. 52, dels noggrannare enl. ekv. (25) afd. I pag. 61 samt ekv. (6) och (7) pag. 302.

Såsom värde på 2γ har jag antagit 0,00047, ett medeltal af det värde 0.00049, som erhålles ur BÈDES [1]) bestämning af temperaturkoefficienten för specifika värmet per vigtsenhet hos koppar och åtskilliga experimentatörers [2]) bestämning af temperaturkoefficienten för kopparns spec. vigt; samt LORENZ [3]) värde för 2γ eller 0.00045.

Vid beräkningen af k_0 och h_0 ur K och H har jag lagt till grund Ångströms värde för c_0 eller 0.8448.

I efterföljande tabell V har jag sammanstält galvanometerobservationerna i ett *annat* försök med samma Ångströms stång. Galvanometrarne ha observerats hvardera 3 gånger i minuten. Serierna äro medeltal af 2 perioder. Samma konstantbestämning, ekv. (1), gäller som i föregående försök. För medeltemperaturerna på de tre observationspunkterna ha erhållits värdena: 38°.03, 30°.95, 25°.60; för log a', red. till $C°$: 0.8935, 0.3421, 9.7741; samt för faserna b': 250°.01, 178°.24, 105°.31.

Tabell VI innehåller beräkningen af värmeledningskonstanterna och temperaturkoefficienterna.

---

[1]) WÜLLNER, Lehrbuch III, 1885, pag. 548.

[2]) WÜLLNER, l. c., pag. 38—41.

[3]) Wied. Ann. 13, 1881, pag. 440.

Tab. V. **Ångströms stång.** $T = 12^m$. Uppvärmning $5^m\,40^s$.

Galv.	Observations tider.		1^m			2^m			3^m		
I *g*	10^s, 30^s, 50^s.	Uppvärmn.	'570.8	581.1	**587.9**	585.4	577.2	566.2	553.8	540.4	525.8
		Afkyln.	'377.8	367.7	**366.5**	372.1	381.8	394.0	407.6	422.4	437.5
III *G*	20^s, 40^s, 60^s.	Uppvärmn.	'559.4	560.0	560.8	561.8	562.8	564,0	565.7	567.0	568.7
		Afkyln.	574.6	574.0	573.3	572.3	571.1	569.7	568.2	567.1	565.5
II *G*	10^s, 30^s, 50^s.	Uppvärmn.	'498.7	503.7	508.8	514.1	519.0	523.5	526.8	529.2	530.7
		Afkyln.	502.3	497.0	491.6	486.1	481.1	476.7	473.6	471.4	470.4

Galv.		4^m			5^m			6^m			Jämv.-läge.	Oper. Var.	Omgifn. Temp.
I *g*	Uppvärmn.	510.6	495.3	479.7	464.1	448.9	434.2	419.5	405.4	391.0	940.7	— 1.8	13°.88
	Afkyln.	452.4	467.0	481.5	495.6	509.7	522.5	535.3	547.5	559.0	941.5	—	14.06
III *G*	Uppvärmn.	569.8	571.3	572.4	573.4	574.2	574.5	574.9	**575.1**	'575.0	918.2	+ 0.9	14.30
	Afkyln.	564.1	562.8	561.7	561.0	560.1	559.5	559.3	**559.0**	559.2	917.6	—	14.08
II *G*	Uppvärmn.	**531.0**	530.5	529.0	526.8	523.9	520.5	516.6	512.1	'507.4	920.6	— 1.2	—
	Afkyln.	**470.2**	471.0	472.6	475.0	478.0	481.4	485.8	489.5	494.0	918.2	—	—

Tab. VI. **Ångströms stång.**

Ur I—II:	Ur II—III:
$\frac{1}{M} \log \frac{a'_0}{a'_x} = 1.270$	$\frac{1}{M} \log \frac{a'_0}{a'_x} = 1.308$
$b'_0 - b'_x = 1.252$	$b'_0 - b'_x = 1.273$
Approximativ beräkning:	
$K = 1.108$	$K = 1.109$
$H = 0.000114$	$H = 0.000235$

Beräkning ur I, II, III enl. eqvat. (25), (6), (7):

$$K = 1.113\,, \quad H = 0.000579$$

$$\varrho_{01} \cos \varphi_{01} = -[7.329]\,, \quad \varrho_{01} \sin \varphi_{01} = [7.395]$$

$$\alpha = -[6{,}796]\,, \quad \beta = [5.654]$$

$$2\varkappa = -0.000167\,, \quad \eta = -0{,}0280$$

$$k_0 = 0{,}940\,, \quad h_0 = 0{,}000428$$

$$t = 14^\circ.1\,.$$

Tages medium af de värden på k_0 och $2\varkappa$, som de båda försöken lemnat, och reduktion sker till 0°, erhålles för k formeln

$$k = 0.954 (1 - 0.00064 t).$$

För jämförelse, såvidt ske kan, upptages här den af Ångström för ledningsförmågan hos samma stång beräknade formeln, reducerad till *C.G.S.*

$$k = 0.982 (1 - 0.001519 t).$$

Ångström anmärker i afhandlingen, Öfvers. 1862, pag. 27, att denna kopparstång består af Fahlukoppar, som enligt äldre analyser innehåller spår af järn.

Försök 2. *Runda Kopparstången.*

Afstånd I—II = II—III = x = 15.04 cm.

Jag sammanfattar i efterföljande tabell VII beräkningen af värmeledningskonstanterna och deras temperaturkoefficienter. Beräkningen har skett dels ur alla serierna G och g, dels ur serierna g ensamt. Såsom värde på c_0 är antaget 0.8448, såsom vid Ångströms kopparstång.

Tages medium af värdena på k_0 och $2\varkappa$, hvarigenom observationerna med g få dubbel vigt mot G, skulle sålunda för detta slags koppar inre värmeledningskoefficienten vid 14°.5 vara

$$k = 0.412$$

och dess temperaturkoefficient

$$2\varkappa = 0.00343.$$

Häraf erhålles för $t°$

$$k = 0.392 (1 + 0.00343 t).$$

Det för 14°.5 beräknade värdet stämmer godt öfverens med det af Kirchhoff och Hansemann[1]) för fosforhaltig koppar funna värdet

$$k = 0.4152,$$

gällande för 15°. Äfven temperaturkoefficienten är hos dem positiv = + 0.00058.

[1]) Ueber die Leitungsfähigkeiten der Metalle etc. Wied. Ann. 13, 1881 pag. 410 och 417.

Tabell VII. **Försök 2.** $x = 15.04$ cm, $\frac{q}{p} = [9.7539]$.

Beräkn. ur ser. G och g.		Beräkn. ur ser. g endast.	
Ur I—II:	Ur II—III:	Ur I—II:	Ur II—III:
$\frac{1}{M}\log\frac{a'_0}{a'_x} = 1.211$	$\frac{1}{M}\log\frac{a'_0}{a'_x} = 1.249$	$\frac{1}{M}\log\frac{a'_0}{a'_x} = 1.229$	$\frac{1}{M}\log\frac{a'_0}{a'_x} = 1.256$
$b'_0 - b'_x = 1.151$	$b'_0 - b'_x = 1.154$	$b'_0 - b'_x = 1.150$	$b'_0 - b'_x = 1.160$
$2(a_0 - a_x) = 19.44$	$2(a_0 - a_x) = 12.26$	$2(a_0 - a_x) = 21.12$	$2(a_0 - a_x) = 11.54$
Approximativ beräkning:			
$K = 0.531$	$K = 0.513$	$K = 0.524$	$K = 0.508$
$H = 0.000328$	$H = 0.000518$	$H = 0.000434$	$H = 0.000521$
Beräkning ur I, II, III enligt (25), (6), (7):			
$\lambda_1 = [8.9414]$,	$\mu_1 = [8.8869]$	$\lambda_1 = [8.9327]$,	$\mu_1 = [8.8917]$
$\varrho_{01} \cos \varphi_{01} = -[7.724]$,	$\varrho_{01} \sin \varphi_{01} = -[6.62]$	$\varrho_{01} \cos \varphi_{01} = -[7.450]$,	$\varrho_{01} \sin \varphi_{01} = -[7.019]$
$K = 0.486$,	$H = 0.000823$	$K = 0.490$,	$H = 0.000619$
$\alpha = -[7.033]$,	$\beta = -[6.685]$	$\alpha = -[6.624]$,	$\beta = -[6.476]$
$2\varkappa = 0.00407$,	$\eta = -0.0135$	$2\varkappa = 0.00280$,	$\eta = -0.00228$
$k_0 = 0.410$,	$h_0 = 0.000395$	$k_0 = 0.414$,	$h_0 = 0.000297$
$t = 14°.5$		$t = 14°.5$	

En spektralanalytisk undersökning af min runda kopparstång har gett vid handen, att densamma icke innehåller järn.

En analys, för utrönande af fosforhalten, godhetsfullt utförd af Kand. R. MAUZELIUS å Kem. Laboratoriet i Upsala, har visat, att kopparn ifråga innehåller fosfor till ungefär 0,15 %.

Såsom värde på h hafva de anförda försöken gett i medeltal 0.000340, $t = 14^{\circ}.3$, med negatif temperaturkoefficient.

WEBER[1]) har enligt den af NEUMANN modifierade ÅNGSTRÖMSKA metoden för polerad järnstång funnit

$$h = 0.000266, \text{ (C. G. S.)},$$

gällande för $t = 39^{\circ}$. För nysilfver erhölls på samma sätt

$$h = 0.000304, \; t = 31^{\circ}.25.$$

Dessa siffror antyda negatif temperaturkoefficient.

Af ofvanstående korta redogörelse för mina experimentella undersökningar enligt ÅNGSTRÖMS metod framgår, enligt hvad jag hoppas, att densamma, bör kunna lemna noggranna bestämningar af såväl värmeledningskonstanterna som deras temperaturkoefficienter.

---

[1]) H. WEBER, Pogg. Ann. B. 146. 1872, pag. 281.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1891. N:o 5.
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska Laboratorium.

191. Om fenyletyl-, fenylpropyl- och fenylisopropyl-triazolföreningar.

Af J. A. Bladin.

[Meddeladt den 13 Maj 1891 genom P. T. Cleve.]

Jag har förut [1]) beskrifvit fenylmetyltriazolföreningarna. Som jag emellertid nu framstält trenne, med dessa homologa serier af triazolderivat, så vill jag härmed lemna en redogörelse för dessa undersökningar.

Utgångsmaterialet för framställandet af öfriga fenylmetyltriazolföreningar utgjorde fenylmetylcyantriazol, som jag erhöll genom inverkan af ättiksyreanhydrid på den s. k. dicyanfenylhydrazin, $\begin{matrix} C_6H_5—N—NH_2 \\ | \\ NC—C = NH \end{matrix}$.[2]) Att propionsyreanhydrid med denna förening ger fenyletylcyantriazol, har jag också förut visat. [3]) Smörsyreanhydrid och isosmörsyreanhydrid inverkar, såsom jag nedan skall visa, fullkomligt analogt på dicyanfenylhydrazin. Organiska syrors anhydrider (åtminstone feta seriens) inverka således på dicyanfenylhydrazin enligt ekvationen:

$$\begin{matrix} C_6H_5—N—NH_2 \\ | \\ NC—C = NH \end{matrix} + \begin{matrix} R—CO \\ \\ R—CO \end{matrix}\!\!>\!O = \begin{matrix} C_6H_5—N—N \\ | \\ NC—C = N \end{matrix}\!\!>\!C—R + R—COOH + H_2O.$$

(R = en alifatisk alkoholradikal).

[1]) Öfversigt af K. Vet.-Akad. Förh. 1885, N:o 6, sid. 149; 1886, N:o 8, sid. 253.

[2]) Som jag förut (Öfversigt af K. Vet.-Akad. Förh. 1886, N:o 8, sid. 253) visat, bildas fenylmetylcyantriazol jämväl öfverraskande lätt vid inverkan af pyrodrufsyra på dicyanfenylhydrazin. För några andra bildningssätt för nämda förening skall jag i en kommande uppsats redogöra.

[3]) Öfversigt af K. Vet.-Akad. Förh. 1885, N:o 6, sid. 154.

I. Fenyletyltriazolföreningar.

Fenyletylcyantriazol har jag, såsom nyss nämdes, förut beskrifvit i Öfversigt af K. Vet.-Akad. Förh. 1885, N:o 6, sid. 154.

Fenyletyltriazolkarbonsyra.

$$\begin{array}{c} C_6H_5{-}N{-}N \\ HOOC{-}\overset{|}{C}\quad\overset{\|}{C}{-}C_2H_5. \\ \diagdown\diagup \\ N \end{array}$$

Emedan nitrilen, som motsvarar denna syra, till följd af sin låga smältpunkt 37,5—38° C. är svår att rena, i synnerhet som den samma ej är flyktig med vattenångor, användes för framställning af syran direkt den råprodukt, som erhölls vid inverkan af propionsyreanhydrid på dicyanfenylhydrazin. Denna, som var starkt brunfärgad, löstes i alkohol, lösningen försattes med kalilut i öfverskott, och blandningen kokades i en öppen skål, tills ammoniakutvecklingen upphört och alkoholen afdunstat. Allt efter som alkoholen afdunstade, tillsattes vatten. Lösningen är nu starkt brunfärgad, men de färgande ämnena kunna lätt bortskaffas på följande sätt. Lösningen, som ej bör vara för koncentrerad, försättes droppvis under omröring med saltsyra, hvarvid en brun, hartsig substans afskiljer sig, hvilken affiltreras. Filtratet försättes ytterligare med några droppar saltsyra, då en brun olja afskiljer sig, hvilken jämväl affiltreras. Lösningen, som nu bör hafva en gul färg, koncentreras och försättes med saltsyra, så länge fällning uppstår, men ej mera, ty då löses fällningen åter delvis. På detta sätt erhålles fenyletyltriazolkarbonsyran i form af en gul olja, som lätt stelnar i synnerhet vid omröring med en glasstaf. För föreningens renande omkristalliserades den samma några gånger ur benzol.

Analyser på vid 100° C. torkad substans:

1. 0,1745 gr. gaf vid förbränning i öppet rör med blykromat 0,3869 gr. CO_2 (motsv. 0,10552 gr. C) och 0,0889 gr. H_2O (motsv. 0,00988 gr H).

2. 0,1737 gr. gaf vid förbränning med kopparoxid 28,6 ccm. N-gas, mätt öfver kalilut vid 764,5 mm. bar.tr. och 15,8° C.

	Beräknadt:		Funnet: 1	2
C_{11}	132	60,8	60,5	—
H_{11}	11	5,1	5,7	—
N_3	42	19,4	—	19,7
O_2	32	14,7	—	—
	217	100,0.		

Föreningen är tämligen svårlöslig i benzol och kristalliserar därur i små hårda, färglösa kristaller, lättlöslig i alkohol, hvarur den samma kristalliserar i stora, vackra kristaller, tämligen löslig i vatten. Ur varm, koncentrerad vattenlösning afskiljer den sig i form af oljedroppar, som snart stelna kristalliniskt, ur ej för koncentrerad lösning åter i hårda, prismatiska nålar. Kristalliserad ur benzol, smälter föreningen vid 144—145° C. under gasutveckling till en färglös olja, kristalliserad ur alkohol eller vatten åter, smälter den samma under gasutveckling vid 122—123° C. Denna lägre smältpunkt beror antagligen därpå, att ur alkohol eller vatten kristalliserad substans håller kristallvatten. Detta bortgår emellertid ej i exsickator öfver svafvelsyra (åtminstone ej efter några dagars förlopp), och i torkskåp vid 100° C. smälter föreningen till en klibbig massa, som efter stelning smälter vid 144—145° C.

Den vid syrans upphettning ofvan smältpunkten bortgående gasen är kolsyra, och den återstående oljan utgöres helt säkert af fenyletyltriazol, men af brist på material har jag ej ännu kunnat närmare undersöka denna förening.

Fenyletyltriazolkarbonsyrans eterarter.

Metyletern framstäldes ur silfversaltet genom kokning med metyljodid och utdrogs efter fulländad reaktion medels eter, efter hvilkens afdunstning den samma kvarblef såsom en nästan färglös olja, som efter flera dagars stående delvis stelnade. Ett från olja utpressadt prof smälte vid 41° C., men antagligen ligger

den rigtiga smältpunkten några grader högre. Föreningen kan ej omkristalliseras, emedan den samma ur lösningsmedlen afskiljer sig såsom en olja.

Etyleter är en olja.

Fenyletyltriazolkarbonsyrans salter.

Alkalisalterna äro ytterst lättlösliga i vatten.

Silfversaltet bildar en hvit fällning, som vid stark förstoring visar sig vara kristallinisk.

Kopparsaltet, $(C_6H_5 . C_2N_3 (C_2H_5) . CO_2)_2Cu + 3^1/_2H_2O$, erhölls vid tillsats af kopparsulfatlösning till en utspädd, varm lösning af ammoniumsaltet, hvarvid det samma vid lösningens afsvalning utkristalliserade i vackra, glänsande blågröna blad. Vattenfritt har saltet en nästan rent blå färg. Saltet tycks under vissa förhållanden kunna kristallisera med annan vattenhalt.

Analyser på lufttorkadt salt:

1. 0,1685 gr. förlorade vid 120° C. 0,0188 gr. och gaf efter förbränning 0,0238 gr. CuO (motsv. 0,01899 gr. Cu).

2. 0,3114 gr. förlorade vid 135° C. 0,0359 gr. och gaf efter förbränning 0,0436 gr. CuO (motsv. 0,03480 gr. Cu).

	Beräknadt	Funnet:	
för $(C_6H_5 . C_2N_3 (C_2H_5) . CO_2)_2Cu + 3^1/_2H_2O$:		1	2
Cu	11,3	11,3	11,2
$3^1/_2$ H_2O	11,3	11,2	11,5.

Analys på vid 120° C. torkadt salt:

0,1365 gr. förbrändes i skepp i syrgasström och gaf 0,2647 gr. CO_2 (motsv. 0,07219 gr. C.) och 0,0530 gr. H_2O (motsv. 0,00589 gr. H); i skeppet kvarblef 0,0219 gr. CuO (motsv. 0,01749 gr. Cu).

	Beräknadt:		Funnet:
C_{22}	264	53,3	52,9
H_{20}	20	4,0	4,3
N_6	84	17,0	—
O_4	64	12,9	—
Cu	63,5	12,8	12,8
	495,5	100,0.	

Fenyletyltriazolkarbonsyrans klorhydrat.

$$C_6H_5 . C_2N_3(C_2H_5) . CO_2H . HCl.$$

Syran visar liksom homologa triazolkarbonsyror äfven svagt basiska egenskaper, i det att den samma ger ett väl kristalliserande klorhydrat. Syran löses lätt i kokande vanlig saltsyra, och vid afsvalning utkristalliserar saltet i form af små färglösa blad. Saltet sönderdelas af vatten i sina komponenter. För analys torkades det samma i exsickator öfver kali.

Analys:

0,1087 gr. förbrändes med kalk och gaf 0,0622 gr. AgCl (motsv. 0,01582 gr. HCl).

	Beräknadt	Funnet:
$C_6H_5 . C_2N_3(C_2H_5) . CO_2H . HCl$:		
HCl	14,4	14,6.

Fenyletyltriazolkarbonsyrans amid.

```
     C6H5—N—N
          |  ||
H2NOC—C   C—C2H5.
        \/
        N
```

En alkohollösning af ej renad nitril försattes med några droppar kalilut och därpå med treprocentig vätesuperoxidlösning. Vid blandningens uppvärmning bortgick syrgas, och den i början bruna lösningen blef snart rent gul. Efter fulländad reaktion neutraliserades lösningen med litet klorvätesyra och koncentrerades på vattenbad. Vid afsvalning utkristalliserade föreningen i gulaktiga, hårda kristaller och renades genom omkristalliseringar ur alkohol.

Analyser på exsickatortorkad substans:

1. 0,1974 gr. förbrändes med blykromat och gaf 0,4372 gr. CO_2 (motsv. 0,11924 gr. C) och 0,1080 gr. H_2O (motsv. 0,01200 gr. H).

2. 0,1795 gr. gaf vid förbränning med kopparoxid 40,0 ccm. N-gas, mätt öfver kalilut vid 758,5 mm. bar.tr. och 19,0° C.

	Beräknadt:		Funnet: 1	2
C_{11}	132	61,1	60,4	—
H_{12}	12	5,6	6,1	—
N_4	56	25,9	—	26,1
O	16	7,4	—	—
	216	100,0.		

Föreningen är svårlöslig i vatten och eter, lättlöslig i alkohol, hvarur den samma kristalliserar i färglösa aggregat af små prismer. Den smälter utan sönderdelning vid 152—152,5° C. Vid kokning med alkoholiskt kali öfverföres den lätt i motsvarande karbonsyra.

Fenyletyltriazolkarbonsyrans tiamid.

$$\begin{array}{c} C_6H_5\text{—}N\text{—}N \\ \quad\quad\quad\quad\quad \| \\ H_2NSC\text{—}C \quad C\text{—}C_2H_5. \\ \diagdown\diagup \\ N \end{array}$$

I en med litet ammoniak försatt alkohollösning af ej renad nitril inleddes svafvelväte först i köld och sedan under uppvärmning. Lösningen koncentrerades därpå, och vid den sammas afsvalning afskilde sig kristaller, hvilka omkristalliserades upprepade gånger ur alkohol och benzol.

Analyser på lufttorkad substans:

1. 0,2010 gr. aftog ej i vigt vid 100° C. och gaf vid förbränning med kopparoxid 41,4 ccm. N-gas, mätt öfver kalilut vid 768 mm. bar.tr. och 18,0 C.

2. 0,2586 gr. gaf efter förbränning med kaliumklorat och soda 0,2515 gr. $BaSO_4$ (motsv. 0,03455 gr. S).

3. 0,2202 gr. gaf på samma sätt 0,2182 gr. $BaSO_4$ (motsv. 0,02997 gr. S).

	Beräknadt:		Funnet: 1	2	3
C_{11}	132	56,9	—	—	—
H_{12}	12	5,2	—	—	—
N_4	56	24,1	24,5	—	—
S	32	13,8	—	13,4	13,6.
	232	100,0.			

Föreningen kristalliserar ur alkohol, hvari den är lättlöslig, i hårda, prismatiska kristaller af smutsigt svafvelgul färg; löses tämligen lätt i benzol. Den smälter utan sönderdelning vid 149,5—150° C.

2. Fenylpropyltriazolföreningar.

Normal smörsyreanhydrid inverkar på dicyanfenylhydrazin i värme lika lätt som ättiksyre- och propionsyreanhydrid och ger därvid fenylpropylcyantriazol. Dicyanfenylhydrazin försattes med $1^1/_2$ gånger sin vigt normal smörsyreanhydrid; vid vanlig temperatur egde ingen inverkan rum, men vid uppvärmning löstes allt lätt, och lösningen råkade snart till följd af inträdande reaktion i kokning. Sedan den samma fått koka några minuter, göts den bruna vätskan i sodalösning för aflägsnande af smörsyran. Som oljan äfven efter längre tids stående ej stelnade, isolerades ej fenylpropylcyantriazol, utan reaktionsprodukten användes sådan, den var efter tvättningen med sodalösning, för framställandet af öfriga fenylpropyltriazolderivat. Att rena produkten genom att destillera den samma med vattenånga gjordes intet försök, då hvarken fenylmetyl- eller fenyletylcyantriazol äro flyktiga därmed, och därför denna helt säkert förhåller sig på samma sätt i detta hänseende.

Fenylpropyltriazolkarbonsyra.

```
       C6H5—N—N
            |  ||
HOOC—C    C—CH2—CH2—CH3.
         \/
         N
```

Råprodukten, som erhölls vid normal smörsyreanhydrids inverkan på dicyanfenylhydrazin, löstes efter tvättning med sodalösning i alkohol, och lösningen försattes med kalilut i öfverskott; blandningen kokades i en öppen skål, så länge ammoniak bortgick. Allt efter alkoholens afdunstning tillsattes vatten. Efter alkoholens afdunstning återstår en brun vattenlösning. Denna, som ej bör vara för koncentrerad, försättes försigtigt med salt-

syra under omröring. Därvid afskiljer sig först ett brunt harts, som affiltreras, och vid ytterligare tillsats af litet saltsyra till filtratet, utfaller en brun olja, som också affiltreras. Sedan filtratet på detta sätt erhållit en nästan rent gul färg, d. v. s. då de hartsiga, förorenande produkterna genom den partiella fällningen med saltsyra till största delen aflägsnats, koncentreras lösningen och försättes efter afsvalning droppvis med saltsyra, så länge oljedroppar afskilja sig. Öfverskott af saltsyra måste undvikas, all den stund fenylpropyltriazolkarbonsyran är mycket lättlöslig i syror. På detta sätt erhålles en något brunfärgad olja, som vid stående småningom stelnar till en hård massa. För föreningens renande omkristalliseras den samma upprepade gånger ur benzol.

Analyser:

1. 0,1552 gr. ur benzol kristalliserad substans aftog ej i vigt vid 100° C. och gaf vid förbränning med kopparoxid 23,6 ccm. N-gas, mätt öfver kalilut vid 761 mm. bar.tr. och 17,2° C.

2. 0,2076 gr. (annan beredning än i analys 1) gaf på samma sätt 32,5 ccm. N-gas, mätt öfver kalilut vid 767 mm. bar.tr. och 16,6° C.

	Beräknadt:		Funnet: 1	2
C_{12}	144	62,3	—	—
H_{13}	13	5,6	—	—
N_3	42	18,2	18,0	18,7
O_2	32	13,9	—	—
	231	100,0.		

Föreningen är mycket lättlöslig i alkohol, svårlöslig i vatten. Ur vattenlösning, försatt med litet alkohol, kristalliserar den samma vid alkoholens afdunstning vid vanlig temperatur i vackra färglösa, nästan kubiska kristaller. Ur benzol, hvari föreningen är tämligen löslig, kristalliserar den samma vid hastig afkylning i form af ett krithvitt kristallpulver, vid långsammare afsvalning i små prismer. Den smälter vid 160,5—161° C. under gasutveckling till en färglös olja, hvilken helt säkert utgöres af fenylpropyl-

triazol, men af brist på material har jag ännu ej kunnat närmare undersöka denna förening.

Syran löses lätt redan vid vanlig temperatur i saltsyra till ett lättlösligt klorhydrat.

Metyletern, framstäld af silfversaltet och jodmetyl, bildar en något gulaktig olja, som ej äfven efter längre tids stående stelnade. Äfven *etyletern* är en olja.

Fenylpropyltriazolkarbonsyrans salter.

Kalium- och *ammoniumsalterna* äro mycket lättlösliga.

Silfversaltet bildar en hvit volyminös fällning, som lätt blir kornig. Vid uppvärmning med vatten blir den samma hartsartad.

Kopparsaltet, $(C_6H_5 . C_2N_3(C_3H_7) . CO_2)_2Cu + {}^1/_2H_2O$. Till en varm, tämligen koncentrerad lösning af ammoniumsaltet sattes kopparsulfatlösning, då genast saltet afskilde sig i form af en fin, volyminös fällning, som under mikroskop visade sig bestå af fina nålar. Saltet har en ljusblå färg med violett anstrykning. Lufttorkadt håller det samma $^1/_2$ molekyl kristallvatten, som det ej förlorar vid 120° C. utan först vid 170° C.

Analyser:

1. 0,1688 gr. vid 120° C. torkadt salt gaf vid förbränning 0,0245 gr. CuO (motsv. 0,01956 gr. Cu).

2. 0,2106 gr. förlorade vid 170° C. 0,0032 gr. och gaf vid förbränning 0,0312 gr. CuO (motsv. 0,02491 gr. Cu). (Vid den starka upphettningen vid förbränningen bibehöll saltet sin ljusblåa, något i violett stötande färg. Jämför fenylisopropyltriazolkarbonsyrans kopparsalts förhållande i detta hänseende).

	Beräknadt	Funnet:	
för $(C_6H_5 . C_2N_3(C_3H_7) . CO_2)_2Cu + {}^1/_2 H_2O$		1	2
Cu	11,9	11,6	11,8
$^1/_2 H_2O$	1,7	—	1,5.

Fenylpropyltriazolkarbonsyrans amid.

$$\begin{array}{c} C_6H_5-N-N \\ \quad | \quad\ \ \| \\ H_2NOC-C \quad C-CH_2 . CH_2 . CH_3 . \\ \diagdown \diagup \\ N \end{array}$$

Till en alkohollösning af etyletern, framstäld af silfversaltet och jodetyl, sattes stark ammoniak, och blandningen fick stå i slutet kärl vid vanlig temperatur under 24 timmar. Efter denna tids förlopp koncentrerades lösningen starkt, då vid afsvalning en olja afskilde sig, som snart stelnade kristalliniskt. Föreningen renades genom upprepade omkristalliseringar ur benzol. Föreningen kan också med lika lätthet framställas ur metyletern som ur etyletern.

Analyser:

1. 0,1963 gr. förbrändes med blykromat och gaf 0,4506 gr. CO_2 (motsv. 0,12289 gr. C) och 0,1156 gr. H_2O (motsv. 0,01284 gr. H).

2. 0,1082 gr. gaf vid förbränning med kopparoxid 22,3 ccm. N-gas, mätt öfver kalilut vid 769 mm. bar.tr. och 16,8° C.

	Beräknadt:		Funnet: 1	2
C_{12}	144	62,6	62,6	—
H_{14}	14	6,1	6,5	—
N_4	56	24,3	—	24,7
O	16	7,0	—	—
	230	100,0.		

Föreningen är mycket lättlöslig i alkohol, lättlöslig i benzol, tämligen löslig i vatten. Ur benzol kristalliserar den samma i till bollar förenade, färglösa prismer. Smältpunkt 122—122,5° C.

Fenylpropyltriazolkarbonsyrans tiamid.

$$\begin{array}{c} C_6H_5-N-N \\ \quad | \quad\ \ \| \\ H_2NSC-C \quad C-CH_2 . CH_2 . CH_3 . \\ \diagdown \diagup \\ N \end{array}$$

I en kokhet, med ammoniak försatt alkohollösning af ej renad fenylpropylcyantriazol inleddes svafvelväte, tills den starkt luktade däraf. Lösningen fick stå i slutet kärl öfver en natt och koncentrerades därpå. Efter afsvalning afskilde sig kristaller, som tvättades med litet alkohol och omkristalliserades några gånger ur benzol.

Analyser:

1. 0,1603 gr. gaf vid förbränning med kopparoxid 30,4 ccm. N-gas, mätt öfver kalilut vid 772 mm. bar.tr. och 16,0° C.

2. 0,1745 gr. gaf efter förbränning med kaliumklorat och soda 0,1597 gr. $BaSO_4$ (motsv. 0,02194 gr. S).

	Beräknadt:		Funnet: 1	Funnet: 2
C_{12}	144	58,5	—	—
H_{14}	14	5,7	—	—
N_4	56	22,8	22,9	—
S	32	13,0	—	12,6
	246	100,0.		

Föreningen kristalliserar ur benzol, hvari den är lättlöslig, i glänsande, mörkgula prismer, som äro förenade i bollar. Smältpunkt 130—130,5° C.

3. Fenylisopropyltriazolföreningar.

Om framställningen af fenylisopropylcyantriazol genom inverkan af isosmörsyreanhydrid på dicyanfenylhydrasin gäller det samma, som blifvit sagdt om framställningen af motsvarande normalpropylderivat. Äfven denna nitril kunde ej fås att kristallisera ur den bruna reaktionsprodukten.

Fenylisopropyltriazolkarbonsyra.

```
C6H5—N—N
     |    ‖        /CH3
HOOC—C    C—CH<
      \\ /         \CH3.
       N
```

Vid dennas framställning ur den ej renade reaktionsprodukten förfors på alldeles samma sätt som vid framställningen af fenylpropyltriazolkarbonsyran. Den efter neutraliseringen med saltsyra erhållna oljan stelnar emellertid något lättare än i förra fallet. Af 10 gr. dicyanfenylhydrasin erhölls på detta sätt vid ett försök 6 gr. oren karbonsyra. Föreningen renades genom omkristalliseringar ur benzol. Kristalliserad ur benzol, håller föreningen kristallbenzol, som delvis bortgår i vakuum öfver svafvelsyra och sedan fullständigt vid 100° C. Vid liggande i luft vittrar föreningen.

Analys:

0,1348 gr. vid 100° C. torkad substans gaf vid förbränning med kopparoxid 20,6 ccm. N-gas, mätt öfver kalilut vid 760,5 mm. bar. och 16,4° C.

	Beräknadt:		Funnet:
C_{12}	144	62,3	—
H_{13}	13	5,6	—
N_3	42	18,2	18,1
O_2	32	13,9	—
	231	100,0.	

Föreningen är lättlöslig i alkohol, svårlöslig i vatten. Ur benzol, hvari den samma är lättlöslig, kristalliserar den i små färglösa prismer, som hålla kristallbenzol. Benzolhaltig substans smälter vid c. 105° C., men benzolfri vid 135° C. under gasutveckling till en färglös olja. Denna utgör antagligen fenylisopropyltriazol, men af brist på material har jag ej heller kunnat undersöka denna förening.

Fenylisopropyltriazolkarbonsyrans eterarter.

Metyletern, $C_6H_5 . C_2N_3(C_3H_7) . CO_2 . CH_3$. Silfversaltet, torkadt vid 100° C., pulveriserades och uppvärmdes med jodmetyl i öfverskott, hvarvid reaktion lätt inträdde. Eterarten

utdrogs med alkohol, efter hvilkens afdunstning den samma återstod i form af en nästan färglös olja, som efter längre tids stående till största delen stelnade kristalliniskt. Föreningen är mycket svår att rena, emedan den samma ur lösningsmedlen afskiljer sig såsom en olja. Om den emellertid löses i benzol, och lösningen försättes med vanlig gasolja, tills en svag grumling inträder, och lösningen sedan lemnas åt sig sjelf att afdunsta, utkristalliserar föreningen i vackra, färglösa, till drusformiga aggregat förenade kristaller.

Analys:

0,0741 gr. lufttorkad substans gaf vid förbränning med kopparoxid 10,8 ccm. N-gas, mätt öfver kalilut vid 766 mm. bar.tr. och 15,0° C.

	Beräknadt:		Funnet:
C_{13}	156	63,7	—
H_{15}	15	6,1	—
N_3	42	17,1	17,5
O_2	32	13,1	—
	245	100,0.	

Föreningen är mycket lättlöslig i alkohol och benzol och afskiljer sig ur dessa lösningsmedel i form af en olja, som ej stelnar, förr än lösningsmedlet fått fullständigt afdunsta, svårlöslig i gasolja. Ur benzollösning, försatt med vanlig gasolja, utkristalliserar emellertid föreningen vid lösningens frivilliga afdunstning i glänsande, praktfulla kristallaggregat. Smältpunkt 75—76° C.

Etyletern är en olja, som ej stelnar.

Fenylisopropyltriazolkarbonsyrans salter.

Alkalisalterna äro lättlösliga.

Silfversaltet bildar en hvit fällning, som under mikroskop visar sig bestå af oregelbundna taflor. Blir lätt hartsigt vid uppvärmning med vatten. Torkadt vid 100° C., är det samma vid rifning i agatmortel starkt elektriskt.

Kopparsaltet, $(C_6H_5 . C_2N_3(C_3H_7) . CO_2)_2Cu + 2^1/_2 H_2O$. Till en varm, utspädd, neutral lösning af ammoniumsaltet sattes kopparsulfatlösning; nästan genast började saltet afskilja sig i himmelsblåa nålar, som ofta voro förenade med hvarandra efter längden till fjäderlika ganska stora aggregat. Saltet håller $2^1/_2$ molekyler kristallvatten, hvilket det fullständigt förlorar först vid 170° C.. Vid 185° C. börjar saltet sönderdelas och antar därvid en vackert smaragdgrön färg; vid 170° C. bibehåller det sin blåa färg. En molekyl kristallvatten bortgår i exsickator öfver svafvelsyra eller vid 100° C.

Analyser:

1. 0,1438 gr. pressadt salt förlorade vid 100° C. 0,0052 gr. och gaf efter förbränning 0,0198 gr. CuO (motsv. 0,01581 gr. Cu).

2. 0,1935 gr. mellan papper pressadt salt förlorade i exsickator öfver svafvelsyra 0,0066 gr. och ytterligare vid 170° C. 0,0086 gr.; således inalles 0,0152 gr.; återstoden förbrändes och gaf 0,0269 gr. CuO (motsv. 0,02148 gr. Cu).

3. 0,3137 gr. mellan papper pressadt salt förlorade i exsickator öfver svafvelsyra 0,0124 gr. och ytterligare vid 170° C. 0,0117 gr.; således inalles 0,0241 gr.; återstoden förbrändes och gaf 0,0433 gr. CuO (motsv. 0,03458 gr. Cu). (Alla tre analyserna äro utförda på salt af olika beredningar).

Beräknadt för $(C_6H_5 . C_2N_3(C_3H_7) . CO_2)_2Cu + 2^1/_2 H_2O$:		Funnet: 1	2	3
Cu	11,2	11,0	11,1	11,0
1 H_2O	3,2	3,6	3,4	4,0
$2^1/_2$ H_2O	7,9	—	7,9	7,7.

Fenylisopropyltriazolkarbonsyrans klorhydrat.

Fenylisopropyltriazolkarbonsyran löses lätt redan i köld i vanlig saltsyra. Vid stark koncentrering af lösningen utkristallisera färglösa nålar, som under stark gasutveckling smälta vid 153° C. Saltet är mycket lättlösligt i saltsyra; af vatten sönderdelas det samma i sina komponenter.

Fenylisopropyltriazolkarbonsyrans amid.

$$\begin{array}{l} \quad\;\; C_6H_5—N—N \\ \quad\quad\quad\quad\;\; | \quad\; \| \\ H_2NOC—C \quad C—CH\begin{cases} CH_3 \\ CH_3 . \end{cases} \\ \quad\quad\quad\quad\;\; \diagdown\diagup \\ \quad\quad\quad\quad\quad N \end{array}$$

Till en alkohollösning af etyletern sattes stark ammoniak, och blandningen fick stå i 24 timmar i tillslutet kärl vid vanlig temperatur. Lösningen koncentrerades därpå, och vid dess afsvalning utkristalliserade vårtformiga kristallgyttringar. Omkristalliserades några gånger ur mycket utspädd alkohol.

Analys:

0,1508 gr. lufttorkad substans aftog ej i vigt vid 100° C. och gaf vid förbränning med kopparoxid 31,3 ccm. N-gas, mätt öfver kalilut vid 757 mm. bar.tr. och 16,6° C.

	Beräknadt:		Funnet:
C_{12}	144	62,6	—
H_{14}	14	6,1	—
N_4	56	24,3	24,5
O	16	7,0	—
	230	100,0.	

Föreningen är mycket lättlöslig i alkohol, svårlöslig i vatten; vid kokning med vatten smälter den till en olja. Ur vatten, försatt med litet alkohol, kristalliserar den samma i färglösa nålar. Smältpunkt 127,5—128° C.

Fenylisopropyltriazolkarbonsyrans tiamid.

$$\begin{array}{l} \quad\;\; C_6H_5—N—N \\ \quad\quad\quad\quad\;\; | \quad\; \| \\ H_2NSC—C \quad C—CH\begin{cases} CH_3 \\ CH_3 . \end{cases} \\ \quad\quad\quad\quad\;\; \diagdown\diagup \\ \quad\quad\quad\quad\quad N \end{array}$$

I en med ammoniak försatt varm alkohollösning af ej renad nitril inleddes svafvelväte, tills lösningen luktade starkt däraf, hvarpå lösningen koncentrerades starkt. Efter afsvalning afskilde

sig gula kristaller, som renades genom upprepade omkristalliseringar ur femtioprocentig alkohol och benzol.

Analys:

0,1798 gr. lufttorkad substans förbrändes med kaliumklorat och soda och gaf 0,1777 gr. $BaSO_3$ (motsv. 0,02440 gr. S).

	Beräknadt:		Funnet:
C_{12}	144	58,5	—
H_{14}	14	5,7	—
N_4	56	22,8	—
S	32	13,0	13,6.
	246	100,0.	

Föreningen är mycket lättlöslig i alkohol, äfven lättlöslig i femtioprocentig alkohol i värme, hvarur vid afsvalning den samma afskiljer sig såsom små oljedroppar, hvilka inom kort öfvergå till vackra, svafvelgula nålar. Äfven i benzol är föreningen lättlöslig och kristalliserar därur i svafvelgula prismer. Smältpunkt 147—148° C.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1891. N:o 5.
Stockholm.

Meddelanden från Stockholms Högskola. N:o 119.

Vattnets specifika värme mellan 0° och + 40°.

Af A. M. JOHANSON.

[Meddeladt den 13 Maj 1891 genom O. PETTERSSON.]

Huru vattnets specifika värme varierar med temperaturen angifves ganska olika af skilda experimentatorer. Allmännast antages med REGNAULT, JAMIN m. fl., att det växer kontinuerligt med temperaturen. Sedan emellertid ROWLAND 1877 sökt påvisa, att vattnets specifika värme aftar eller är konstant, åtminstone ej växer, till omkring 30°, hafva flere försök gjorts för att utreda frågan. En del hafva utfallit till förmån för ROWLANDS påstående, andra ej.

De försök, för hvilka jag i korthet skall redogöra, äro utförda på *Stockholms högskolas fysiska Institut* på initiativ af dess föreståndare, D:r KNUT ÅNGSTRÖM, som under försökens gång beredvilligt bistått mig med råd och upplysningar.

I. **Försöksanordningen.**

Tvänne cylindriska kalorimetrar förfärdigades af tunt kopparbleck och gjordes så lika som möjligt. De voro 50 mm i diameter och 60 mm i höjd samt vägde, sedan en koppartråd af ett par cgr inlagts i den ena, hvardera 17,158 gr. Båda kalorimetrarne (Fig. 1 angifver en af kalorimetrarne; den andra är fullständigt lika med denna), som vi må beteckna med A_1 och A_2, stodo i vidare bleckkärl, B_1 och B_2. Kärlet B_2 stod i en blecklåda och var under hela försöksserien omgifven med is. Kärlet

B_1 stod i ett större kärl af bleck med dubbla väggar, som fyldes med vatten af en viss önskad temperatur. Var denna temperatur högre än rummets, hölls den konstant genom en medelst termostat reglerad gaslåga, var den åter lägre derigenom att det ditfördes en reglerad ström af kallt vatten från en isblandning, hvarför äfven samtidigt bortfördes en lika stor qvantitet vatten. I detta senare fall var det yttre kärlet dessutom ombonadt med ett lager af bomull.

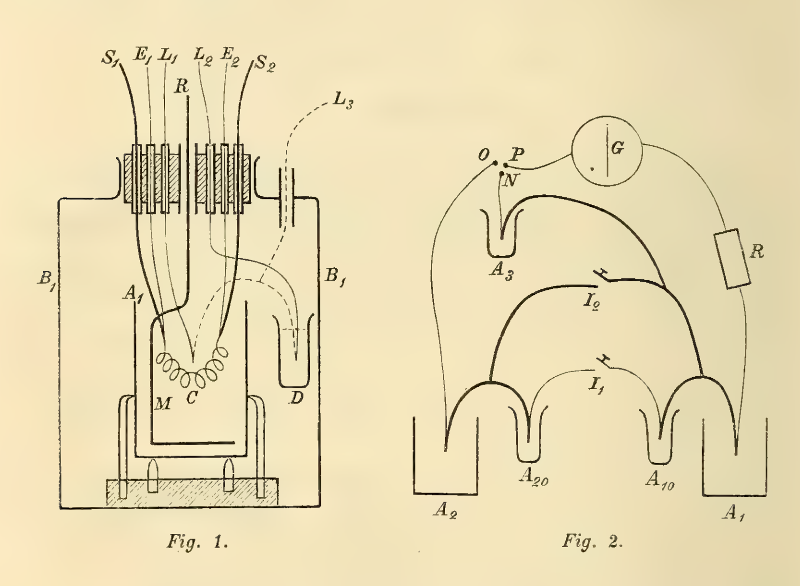


Fig. 1. *Fig. 2.*

Till båda kalorimetarne fördes ungefär samma värmeqvantitet genom värmeutvecklingen i ledningen af en elektrisk ström S_1 S_2, Fig. 1. Härför togos två stycken af samma platinatråd, virades i spiral och fastlöddes strax ofvanför spiralen vid gröfre koppartrådar (S_1 och S_2, Fig 1), hvarvid så afpassats, att trådens längd mellan lödställena var fullt lika för de båda trådarne. Platinatrådens tjocklek var 0,16 mm och längden mellan lödställena 152 mm.

Temperaturen hos vattnet i kalorimetrarne mättes medelbart med termoelement (L_1, L_2, L_3, Fig. 1, A_1, A_{10}, A_2, A_{20}, Fig. 2), som för den skull kunde sättas i förbindelse med en spegelgal-

vanometer. Till hvarje kalorimeter hörde två element, en nysilfvertråd med tvänne koppartrådar (nysilfvertråden är i Fig. 1 angifven genom den punkterade linien). Nysilfvertråden var ∩-formigt böjd, så att dess ena ända var i midten af kalorimetern och dess andra i ett med olja fyldt profrör *D*, Fig. 1 (A_{10}, A_{20}; Fig. 2), som befann sig i samma skyddande hylle som kalorimetern. Vi kunna härigenom uppmäta skilnaden mellan temperaturdifferenserna, (temper. hos A_1 — temper. hos A_{10}) och (temper. hos A_2 — temper. hos A_{20}) och som denna differens är ganska liten, kunna vi använda en galvanometer med stor känslighet. Vid midten af termoelementens nysilfvertråd fastlöddes en nysilfvertråd (L_3, Fig. 1) af samma slag som elementens för att kunna mäta skilnaden mellan temperaturerna hos A_1 och A_2.

De från kalorimetern uppstickande trådarne fästades på det sätt, att i en kork i locket till kärlet *B* fastgjordes glasrör, ett för hvarje tråd. När trådarne afpassats, så att de erhöllo tillbörlig längd, fastgjordes de genom att i rören smälta vax och kolofonium. Alla trådarne blefvo härigenom fullt isolerade och samtliga bildade ett helt, som lätt kunde sättas ned eller lyftas upp ur kalorimetern.

För att kunna bestämma termoelementens angifvelser i grader hade jag dessutom ett liknande termoelement i en tredje vattenmängd, A_3 Fig. 2. Dess temperatur uppmättes direkt med en GEISSLERS termometer, som var graderad i tiondels grad och hvilken med kikare kunde uppskattas i hundradels. Fig. 2 visar anordningen af termoelementen för temperaturbestämningarna; *G* betecknar galvanometern, *R* ett motstånd.

För strömmen i platinaspiralerna användes en galvanisk stapel af två à tre BUNSENS element. Platinaspiralerna sattes medels de vidfästade koppartrådarne (S_1 och S_2, Fig. 1) in i ledningen efter hvarandra, så att samma ström genomgick båda. Förhållandet mellan spiralernas motstånd uppmättes med en kapillarelektrometer derigenom att denna kunde sättas i förbindelse med de från ändpunkterna af platinaspiralerna utgående trådarna E_1 och E_2.

Hvarje kalorimeter var försedd med en omrörare, som utgjordes af en hästskoformig kopparskifva, fästad vid en koppartråd, som i sin ordning för att hindra värmeledning fortsattes af en nysilfvertråd. Vattnet i kalorimetrarne liksom ock vattnet i A_3 omrördes jämt och flitigt medelst en af vattenledningen drifven turbin.

Då vattnet i kalorimetarne ofta måste ombytas och för att slippa en mödosam vägning för hvarje gång, begagnade jag en pipett, som rymde jämt den för en kalorimeter lämpliga vattenmängden. Pipetten rymde ungefär 92 gr. Genom vägning af den af pipetten vid 6 olika försök mätta vattenmängden erhölls, att sannolika felet för hvarje enskild bestämning är $\pm 2{,}2$ mg, och är således det fel, som genom användande af pipetten kan uppstå, försvinnande litet.

Termometern komparerades efter försöken med den normaltermometer, som äges af *Kungl. Svenska Vetenskaps-Akademien*, TONNELOT's termometer N:o 4631, och står jag i tacksamhetsskuld till Akademiens Fysiker, Professor HASSELBERG, för det tillmötesgående, hvarmed han stält denna termometer till fysiska institutets förfogande i och för kompareringen.

Hvarje försök försiggick på följande sätt: kalorimetrarne erhöllo lika volymer vatten vid samma temperatur genom påfyllning med pipetten. Kalorimetern A_2 omgafs med is, kalorimetern A_1 med vatten vid en viss temperatur, som då hölls konstant. Vid denna temperatur hölls äfven A_3. Medelst ledningen $A_1A_3NPA_1$ (Fig. 2) kunde temperaturen hos A_1 bestämmas, enär man å termometern direkt kan bestämma temperaturen hos A_3. Temperaturen hos A_2 observerades samtidigt medelst ledningen $A_1I_2A_2OPA_1$. För att galvanometerns utslag ej skulle blifva för stora insköts vid dessa orienterande bestämningar ett passande motstånd R. Då variationen i temperaturerna hos A_1 och A_2 ej uppgick till 0°,01 på 15 minuter, observerades medelst ledningen $A_1A_{10}I_1A_{20}A_2OPA_1$ att äfven A_{10} och A_{20} voro vid samma temperatur som respektive A_1 och A_2 eller rättare att temperaturdifferensen mellan A_1 och A_{10} var densamma som mellan

A_2 och A_{20}. Härefter vidtog den egentliga försöksserien. Temperaturen observerades omkring 20 minuter, den elektriska strömmen slöts en 5 à 10 minuter och en ny observationsserie iakttogs. Derpå slöts ånyo strömmen och förhållandet mellan platinaspiralernas motstånd uppmättes medelst elektrometern, hvarvid ett så stort motstånd var inskjutet i uppvärmningsledningen, att elektrometern visade största känslighet.

Genom den här beskrifna anordningen vinnas följande fördelar:

1:o) Kalorimetrarne äro så identiskt lika som möjligt; båda äro utsatta för relativt lika yttre inverkningar, i det vattnet i hvardera är vid försöksseriens början vid samma temperatur som omgifningen och dess temperaturstigning under försöksserien i det närmaste densamma, medan omgifningens temperatur under tiden är konstant.

2:o) Motståndet hos uppvärmningsströmmen kan för hvarje försöksserie bestämmas lätt och noggrant.

3:o) Vi kunna med stor noggranhet uppmäta skilnaden mellan temperaturhöjningarne hos A_1 och A_2, som förorsakats af den genom den elektriska strömmen tillförda värmemängden. Mot en temperaturdifferens på 0°,1 svarade ungefär 14 skaldelars utslag på galvanometern och således mot 1 skaldel 0°,007. Galvanometerns utslag kunde uppskattas på 0,2 skaldelar när.

II. Resultatens beräkning.

Vi införa härför följande beteckningar:

t_1, t_2, t_3 äro temperat. hos respect. A_1, A_2, A_3, innan uppvärmningsströmmen gått igenom kalorimetarne.

t'_1, t'_2, t'_3 äro motsvarande temperat., sedan strömmen gått igenom.

t_{10}, t_{20} äro temperat. hos respect. A_{10}, A_{20}.

δ_1 är minskningen af t_1 på en minut.

δ'_1 » » » t'_1 » »

α_1, α_2 äro temperaturhöjningarne hos respect. A_1, A_2 på grund af uppvärmningsströmmen.

R_1, R_2 äro motstånden hos platinaspiralerna i respect. A_1, A_2.

h_1, h_2 äro de häremot svarande höjderna på elektrometern.

$$\frac{R_1}{R_2} = \mu ,$$

k_{31} är lika med temperaturdifferensen $t_3 - t_1$, om utslaget på galvanometern är 1 skaldel eller således lika med den konstant hvarmed galvanometerutslaget skall multipliceras för att gifva temperaturdiff. mellan A_3 och A_1.

k är lika med temperaturdifferensen $\alpha_2 - \alpha_1$, om utslaget på galvanometern är 1 skaldel.

C_1 är spec. värmet hos vattnet i kalorim. A_1 mellan t_1 och $t_1 + \alpha_1$.

C_2 är spec. värmet hos vattnet i kalorim. A_2 mellan t_2 och $t_2 + \alpha_2$.

Med bokstafven S med eller utan index förstås alltid antalet skaldelar, svarande mot galvanometerns utslag.

Om vi derjämte med Q_1 och Q_2 förstå de till kalorimetrarne af strömmen afgifna värmemängderna, med i strömstyrkan samt med P vattenmängdens vigt i hvardera kalorimetern, så är

$$Q_1 = R_1 i^2 \qquad Q_2 = R_2 i^2$$
$$= P\alpha_2 C_1 \qquad = P\alpha_2 C_2$$

samt häraf

$$\frac{R_1}{R_2} = \mu = \frac{\alpha_1 C_1}{\alpha_2 C_2}$$

eller

$$\frac{C_1}{C_2} = \mu\left(1 + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1}\right).$$

För att beräkna förhållandet $\frac{C_1}{C_2}$ erfordras således kännedom af de tre qvantiteterna α_1, $\alpha_2 - \alpha_1$ samt μ, och det är ock dessa som experimenten direkt gifva. Här är att observera, att vi bortsett från specifika värmet hos sjelfva kalorimetrarne med omrörare. Det fel, som häraf kan uppstå, skola vi återkomma till längre fram.

Bestämning af α_1: vi hafva härför

$$t_3 - t_1 = k_{31} \cdot S_{31}$$
$$t'_3 - t'_1 = k_{31} \cdot S'_{31},$$

der såsom nämts, k_{31} är en konstant samt S_{31} och S'_{31} galvanometerns utslag i skaldelar.

Häraf erhålles

$$t'_1 - t_1 = t'_3 - t_3 - k_{31}(S'_{31} - S_{31})$$

samt således

$$\alpha_1 = t'_3 - t_3 - k_{31}(S'_{31} - S_{31}) + \text{korrektionsterm.}$$

Korrektionstermen är den värmeförlust, som kalorimetern A_1 lidit på grund af omgifningens inverkan under den tid, som förflutit mellan det t_1 och t'_1 bestämdes. Enär man ej kan observera temperaturen under det att uppvärmningsströmmen går igenom kalorimetern, måste korrektionstermen bestämmas af temperaturens gång förut och efteråt. Då t_1 aftar med δ_1 på hvarje minut och t'_1 med δ'_1, kunna vi approximativt antaga, att korrektionen för en minut är $\frac{1}{2}(\delta'_1 + \delta_1)$ och således för ν minuter $\frac{\nu}{2}(\delta'_1 + \delta_1)$. Om alltså ν minuter förflutit mellan bestämningen af t_1 och t'_1, erhålla vi

$$\alpha_1 = t'_3 - t_3 - k_{31}(S'_{31} - S_{31}) + \frac{\nu}{2}(\delta'_1 + \delta_1).$$

Konstanten k_{31} bestämdes derigenom att t_1 hölls konstant under det att t_3 höjdes eller sänktes ungefär 1 grad.

Bestämning af $\alpha_2 - \alpha_1$: vi hafva härför

$$t_2 - t_{20} - (t_1 - t_{10}) = k \cdot S$$
$$t'_2 - t_{20} - (t'_1 - t_{10}) = k \cdot S',$$

hvaraf följer

$$t'_2 - t_2 - (t'_1 - t_1) = k(S' - S)$$

samt således

$$\alpha_2 - \alpha_1 = k(S - S) + \text{korrektion.}$$

Korrektionen beror på omgifningens inverkan under försökets gång.

Konstanten k bestämdes på det sätt, att den elektriska strömmen endast gick igenom kalorimetern A_1 och höjde dess temperatur ungefär 1 grad, hvars storlek kunde bestämmas såsom vid bestämningen af α_1.

Korrektionen bestämdes ur temperaturernas gång före och efter det uppvärmningsströmmen gått igenom kalorimetrarne. Låt minskningen i $t_2 - t_{20} - (t_1 - t_{10})$ på en minut vara Δ och minskningen i $t'_2 - t_{20} - (t'_1 - t_{10})$ vara Δ'. Vi kunna då approximativt antaga att korrektionen är $\frac{n}{2}(\Delta + \Delta')$, om n är antalet minuter, som förflutit mellan det S och S' bestämts. Således är

$$\alpha_2 - \alpha_1 = k(S' - S) + \frac{n}{2}(\Delta + \Delta').$$

Bestämningen af $\frac{R_1}{R_2} = \mu$: elektrometern förenades först med det ena motståndet och omedelbart derpå med det andra. Förhållandet $\frac{h_1}{h_2}$ bestämdes såsom medium af fyra observerade förhållanden. De observerade höjderna lågo samtliga mellan 80 mm och 100 mm och visar reduktionskurvan för detta höjdintervall följande potentialdifferenser, uttryckta i tusendels Volt.

höjder	80;	82;	84;	86;	88;	90;	92;
pot.diff.	96,20;	98,90;	101,68;	104,46;	107,24;	110,02;	112,80;
höjder	94;	96;	98;	100			
pot.diff.	115,58;	118,36;	121,14;	123,92.			

Komparation med normaltermometern: normaltermometern, TONNELOTS' termometer N:o 4631, var härvid nedsänkt i vatten till strax under den temperatur, som skulle afläsas; GEISSLERS' termometer var deremot under liknande förhållanden som under experimenten, nämligen endast nedre delen till ett bestämdt ställe nedsänkt i vatten, medan den öfriga delen var fritt utsatt för rummets temperatur. Kompareringen skedde för öfrigt på vanligt sätt. Bestämningen gjordes för hvar 4:de eller 5:te grad, de öfriga härleddes ur dessa genom interpolering. Den på TONNELOTS' termometer aflästa temperaturen korrigerades medelst

det medföljande certifikatet till vätgastermometer. Nedanstående tabell visar den korrektion, som skall läggas till GEISSLERS-termometern för att erhålla temperaturen uttryckt i vätgastermometer.

$$T_{\text{vätgas}} = T_{\text{Geislers termm.}} + korrektion.$$

	0°	2°	4°	6°	8°
	—0.672	—0.665	—0.647	—0.635	—0.626
1	—0.606	—0.590	—0.585	—0.581	—0.576
2	—0.571	—0.564	—0.552	—0.539	—0.524
3	—0.507	—0.490	—0.479	—0.464	—0.450
4	—0.435	—0.419			

Temperaturerna äro beräknade enligt teorin för minsta qvadratmetoden under antagande att variationen är lika för hvarje minut under en beräkningsserie. Således är vid

observationstiderna:	0,	1,	2,	$\ldots . n$
de observerade värdena:	a_0,	a_1,	a_2,	$\ldots . a_n$
de verkliga »	a,	$a+\alpha$,	$a+2\alpha$,	$\ldots . a+n\alpha$.

Häraf erhålles

$$a = 2 \cdot \frac{(2n+1)a_0 + (2n+1-3)a_1 + (2n+1-6)a_2 + \ldots + (1-n)a_n}{(n+1)(n+2)}$$

$$\alpha = 6 \cdot \frac{n(a_n - a_0) + (n-2)(a_{n-1} - a_1) + \ldots .}{n(n+1)(n+2)}$$

Jag anför här såsom exempel gången och beräkningen af en fullständig iakttagelse.

Konstanten k_{31} bestämdes såsom medium af 9 bestämningar och erhölls

$$-k_{31} = 0{,}0068.$$

För konstanten k erhölls som medium af 10 bestämningar

$$-k = 0{,}0064.$$

Bestämning af α_1:

Observationstider kl.	42^m	43^m	44^m	45^m	46^m	47^m
t_3	13°,16	13°,16	13°,16	13°,16	13°,17	13°,17

t_3 observerad kl. $47^m = 13°{,}17$

t_3 beräknad för kl. $47^m = 13°{,}169$.

Observationstider kl.	$40{,}5^m$	$42{,}5^m$	$44{,}5^m$	$46{,}5^m$
S_{31}	$-64{,}5$	$-65{,}0$	$-65{,}7$	$-66{,}1$

S_{31} observerad kl. $46{,}5^m = -66{,}1$

S_{31} beräknad för kl. $46{,}5^m = -66{,}15$

S_{31} beräknad för kl. $47^m = -66{,}36$.

Således

t_1 beräknad för kl. $47^m = 13°{,}169 + k_{31} \cdot 66{,}36$

$$\delta_1 = -0°{,}0023 - k_{31} \cdot 0{,}42.$$

Uppvärmningsströmmen slöts kl. $47{,}5^m$ och afbröts kl. $56{,}5^m$.

Observationstider kl.	$58{,}5^m$	$59{,}5^m$	$60{,}5^m$	$1{,}5^m$	$2{,}5^m$	$3{,}5^m$	$4{,}5^m$
t'_3	13°,93	13°,92	13°,92	13°,90	13°,90	13°,89	13°,89

t'_3 observerad kl. $58{,}5^m = 13°{,}93$

t'_3 beräknad för kl. $58{,}5^m = 13°{,}928$.

Observationstider kl.	0^m	2^m	4^m	6^m
S'_{31}	$-24{,}8$	$-24{,}2$	$-22{,}7$	$-21{,}5$.

S'_{31} observerad kl. $0^m = -24{,}8$

S'_{31} beräknad för kl. $0^m = -25{,}01$

S'_{31} beräknad för kl. $50{,}5^m = -25{,}86$.

Således

t'_3 beräknad för kl. $58{,}5^m = 13°{,}928 + k_{31} \cdot 25{,}86$

$$\delta'_1 = 0°{,}0071 + k_{31} \cdot 0{,}57$$

samt

$$\alpha_1 = 13^\circ{,}928 - 13^\circ{,}169 + k_{31}(25{,}86 - 66{,}36) +$$
$$+ \frac{11{,}5}{2}\left\{0^\circ{,}0071 - 0^\circ{,}0023 + k_{31}(0{,}57 - 0{,}42)\right\}$$
$$+ \text{korrektion till vätgastermometer}$$
$$= 0^\circ{,}787 - k_{31}\cdot 39{,}64 + 0^\circ{,}003$$
$$= 1^\circ{,}059.$$

Bestämning af $\alpha_2 - \alpha_1$:

Observationstider kl.	$41{,}5^m$	$48{,}5^m$	$45{,}5^m$	$47{,}5^m$
S	7,7	7,8	8,0	8,1

S beräknad för kl. $47{,}5^m = 8{,}11$

$$\triangle = -k\cdot 0{,}07.$$

Observationstider kl.	59^m	1^m	3^m	5^m
S'	12,1	11,9	11,5	11,7

S' beräknad för kl. $59^m = 12{,}02$

$$\triangle' = +k\cdot 0{,}08$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = k\cdot\left\{12{,}02 - 8{,}11 + \frac{11{,}5}{2}(0{,}08 - 0{,}07)\right\}$$
$$= k\cdot 3{,}97.$$

Bestämning af μ:

Förhållandet mellan höjderna i capillarelektrometern var

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{93{,}25}{91{,}12},$$

hvaraf erhålles

$$\mu = \frac{114{,}54}{111{,}56}.$$

Ofvanstående värden gifva:

$$\frac{C_1}{C_2} = \mu\left(1 + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1}\right)$$
$$= 1{,}0021.$$

De resultat, som vid samtliga observationer erhöllos, innehållas i tab. I.

Tab. I.

N:o	t_1	$-k_{31}$	$-k$	α_1	$\alpha_2-\alpha_1$	$\frac{h_1}{h_2}$	μ	$\frac{C_1}{C_2}$
1	3,0	0,0068	0,0064	1,034	k. 1,65	$\frac{90,0}{89,0}$	$\frac{110,02}{108,63}$	1,0025
2	4,3	»	»	1,552	k. 3,49	$\frac{91,8}{90,7}$	$\frac{112,52}{111,00}$	0,9991
3	5,1	»	»	1,635	k. 3,50	$\frac{92,22}{91,01}$	$\frac{113,11}{111,42}$	1,0010
4	6,9	»	»	1,573	k. 4,96	$\frac{92,53}{91,07}$	$\frac{113.54}{111,46}$	1,0016
5	8,6	»	»	1,521	k. 4,65	$\frac{87,25}{85,70}$	$\frac{106,24}{104,05}$	1,0001
6	5,4	»	»	1,175	k. 3,70	$\frac{91,60}{90,30}$	$\frac{112,25}{110,14}$	0,9989
7	6,9	»	»	1,209	k. 3,68	$\frac{89,8}{88,5}$	$\frac{109,75}{107,94}$	0,9950
8	10,2	»	»	1,363	k. 4,32	$\frac{92,33}{90,50}$	$\frac{113,26}{110,72}$	1,0022
9	12,4	»	»	1,985	k. 5,28	$\frac{93,3}{90,8}$	$\frac{114,60}{111,14}$	1,0105
10	12,1	»	»	1,059	k. 3,97	$\frac{93,25}{91,12}$	$\frac{114,54}{111,56}$	1,0021
11	10,3	»	»	1,577	k. 5,50	$\frac{93,20}{90,71}$	$\frac{114,47}{111,00}$	1,0081
12	14,8	»	»	1,079	k. 3,51	$\frac{93,51}{90,62}$	$\frac{114,96}{110,93}$	1,0140
13	13,8	»	»	1,563	k. 5,01	$\frac{93,45}{90,27}$	$\frac{114,82}{110.40}$	1.0179
14	14,5	»	»	2,186	k. 6,79	$\frac{92,48}{89,21}$	$\frac{113,47}{108,92}$	1,0210
15	1,5	»	»	1,882	k. 1,57	$\frac{89,72}{89,55}$	$\frac{109,64}{109,40}$	0,9970
16	2,3	»	»	1,567	k. 0,97	$\frac{89,81}{89,36}$	$\frac{109,76}{109,16}$	1,0016

N:o	t_1	$-k_{31}$	$-k$	α_1	$\alpha_2 - \alpha^1$	$\frac{h_1}{h_2}$	μ	$\frac{C_1}{C_2}$
17	2,5	0,0068	0,0064	1,568	k. 1,25	$\frac{88,47}{88,01}$	$\frac{107,90}{107,25}$	1,0001
18	6,8	»	»	2,038	k. 4,68	$\frac{90,65}{89,35}$	$\frac{110,93}{109,11}$	1,0018
19	9,3	»	»	2,779	k. 5,22	$\frac{91.55}{90,01}$	$\frac{112,18}{110,44}$	1,0063
20	10,6	»	»	1,529	k. 4,80	$\frac{90,82}{88,61}$	$\frac{111,17}{108,09}$	1,0080
21	13,5	»	»	1,339	k. 3,64	$\frac{91,05}{88,70}$	$\frac{111,41}{108,22}$	1,0120
22	11,5	»	»	1,904	k. 4,85	$\frac{91,45}{89,25}$	$\frac{112,04}{108,98}$	1,0070
23	12,9	»	»	2,183	k. 5,38	$\frac{92,21}{89,70}$	$\frac{113,09}{109,61}$	1,0145
24	12,7	»	»	1,905	k. 5,02	$\frac{90,90}{88,61}$	$\frac{111,28}{108,09}$	1,0121
25	13,7	»	»	2,219	k. 6.13	$\frac{92,11}{89,58}$	$\frac{112,95}{109,44}$	1,0140
26	19,6	»	»	1,966	k. 6,28	$\frac{93,65}{89,31}$	$\frac{113,71}{108,06}$	1,0301
27	25,2	»	»	1,912	k. 11,04	$\frac{93,70}{88,60}$	$\frac{115,17}{108,08}$	1,0166
28	25,3	»	»	1,443	k. 8,71	$\frac{94,16}{89,05}$	$\frac{115,80}{108,70}$	1,0240
29	28,2	»	»	2.004	k. 13,40	$\frac{94,72}{88,45}$	$\frac{116,59}{107,87}$	1,0345
30	27,8	»	»	1,285	k. 13,28	$\frac{94.52}{88,32}$	$\frac{116,31}{107,09}$	1,0303
31	26,4	0,0077	0,0071	1,985	k. 13,24	$\frac{90,02}{84,35}$	$\frac{110,04}{102,17}$	1,0260
32	30,6	»	»	2,034	k. 17,68	$\frac{97,90}{90,40}$	$\frac{121,00}{110,58}$	1,0266
33	39,4	»	»	2,710	k. 26,4	$\frac{98,00}{89,17}$	$\frac{121,14}{108,87}$	1,0337

N:o	t_1	$-k_{31}$	$-k$	α_1	$\alpha_2 - \alpha_1$	$\frac{h_1}{h_2}$	μ	$\frac{C_1}{C_2}$
34	40,6	0,0077	0,0071	1,916	k. 19,66	$\frac{97,50}{88,37}$	$\frac{120,44}{107,76}$	1,0363
35	34,5	»	»	1,517	k. 13,25	$\frac{98,25}{90,55}$	$\frac{121,49}{110,77}$	1,0347
36	30,8	»	»	1,949	k. 15,59	$\frac{97,80}{90,41}$	$\frac{120,86}{110,59}$	1,0309
37	26,6	»	»	1,877	k. 14,76	$\frac{95,15}{89,10}$	$\frac{117,18}{108,77}$	1,0179

Vi skola nu se till, i hvad mån $\frac{C_1}{C_2}$ anger förhållandet mellan vattnets specifika värme eller med andra ord, huru stor approximationen härför är, om vi bortse från kopparn i calorimetrarne.

Enligt BÈDE[1]) är kopparns medelspecifika värme

från 15° till 100° 0,09331
» 16° » 172° 0,09483
» 17° » 247° 0,09680.

Vi se häraf, att kopparns specifika värme tilltar med temperaturen, men ganska ringa. Vi anta derför, att kopparns specifika värme kan uttryckas genom formen

$$C_t = C_0(1+\beta t); \quad \beta > 0$$

och att vi likaledes för vattnet hafva

$$C_t = 1 + \alpha t; \quad \alpha > 0.$$

Vattenmängden i hvarje calorimeter var 92 gr. och kopparn ungefär 17 gr. För beräkning af förhållandet $\frac{C_1}{C_2}$ hade vi (sid. 330), $\mu = \frac{P\alpha_1 C_1}{P\alpha_2 C_2}$. Detta förhållande bör således egentligen vara

$$\mu = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{92(1+\alpha t_1) + 17 \cdot C_0(1+\beta t_1)}{92(1+\alpha t_2) + 17 \cdot C_0(1+\beta t_2)}$$

[1]) Mém. couronnés des Savants. pub. par l'Acad. Roy. de Belgique 1855/56.

eller, emedan t_2 kan antagas vara noll

$$\mu = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \left\{ \frac{92 + 17 \cdot C_0}{92 + 17 \cdot C_0} + t_1 \cdot \frac{92\alpha + 17 C_0 \beta}{92 + 17 C_0} \cdot \right\}$$

Första termen inom parentesen är alltid $= 1$ och oberoende af kopparn. Som ur ofvanstående värden på kopparns specifika värme $C_0 = 0{,}093$, blir andra termen

$$t_1 \cdot \frac{92\alpha + 1{,}6\beta}{92 + 1{,}6}.$$

Om β antages vara noll, göres α genom den additiva termen 1,6 ungefär 1 procent för liten. Antaga vi åter β lika med α uppstår ej något fel i bestämningen af α. Som nu emellertid β är mindre än α, uppnås visserligen ej detta, men kunna vi alltid med bestämdhet påstå, att, om vi sätta vattnets specifika värme under formen $C_t = 1 + \alpha t$, det fel i bestämningen af C_t, som uppstår deraf att vi ej taga kopparns specifika värme i betraktande, blir, att α erhålles för litet, men att felet i bestämningen af α ej öfverstiger 1 procent af dess verkliga värde. Om vi derför antaga, att C_1 är vattnets medelspecifika värme mellan t_1 och $t_1 + \alpha_1$, således specifika värmet vid $t_1 + \frac{\alpha_1}{2}$, och på samma sätt att C_2 är vattnets specifika värme vid $0 + \frac{\alpha_2}{2}$, som vi då, emedan α_2 ligger emellan 1 och 2 grader, kunna sätta lika med 1, anger förhållandet

$$\frac{C_1}{C_2} = C_1 = 1 + \alpha\left(t_1 + \frac{\alpha_1}{2}\right)$$

vattnets specifika värme vid temperaturen $t_1 + \frac{\alpha_1}{2}$.

III. Jämförelse med hittills kända resultat.

REGNAULT[1]) har för vattnets specifika värme funnit $C_t = 1 + 0{,}00004\,t + 0{,}000009\,t^2$. Som emellertid REGNAULT's

---

[1]) REGNAULT, Memoires de l'Academie des Sciences, pag. 279. 1847. Poggendorfs Ann. 79, pag. 241. 1850.

observationer ligga emellan 17° och högre grader, hafva vi ej utan vidare rätt att tillämpa denna formel för de lägre temperaturerna. Att den af REGNAULT funna stigningen i vattnets specifika värme är för liten har dessutom påvisats af BOSSCHA[1]), som genom omräkning af REGNAULT's observationer funnit $C_t = 1 + 0{,}00022\, t$.

Att en oregelbundenhet i variationen af vattnets specifika värme skulle ega rum i närheten af vattnets maximitäthet, har först framhållits af PFAUNDLER och PLATTER[2]). De funno

t	C	t	C
0	1,0000	6	1,1863
1	0,9512	7	1,1928
2	0,9712	8	1,1706
3	1,0274	9	1,1263
4	1,0939	10	1,0728
5	1,1512.		

Att dessa värden lida af svåra brister och att variationerna i C äro allt för stora hafva de sjelfve[3]) senare visat genom ett nytt försök, som dock äfven tyder på ett minimum vid omkring 4° och ett maximum mellan 7° och 8°. Samtidigt visade HIRN[4]) samt JAMIN och AMAURY[5]), att vid vattnets maximitäthet ej finnes någon märkbar skiljaktighet i specifika värmet, utan att detta vid lägre temperatur varierade analogt som REGNAULT funnit för högre. JAMIN och AMAURY ange

$$C_t = 1 + 0{,}00110\, t + 0{,}0000012\, t^2.$$

ROWLAND[6]) bestämmer den mekaniska eqvivalenten af den värmemängd, som höjer en gr vatten 1° och får härigenom en indirekt bestämning på vattnets specifika värme, som han dock

---

[1]) BOSSCHA, Poggendorfs Ann. jubb. pag. 549. 1874.

[2]) PFAUNDLER u. PLATTER, Poggendorfs Ann. 140, pag. 574. 1870.

[3]) PFAUNDLER u. PLATTER, » » 141, pag. 551. 1870.

[4]) HIRN, Compt. rendus 70, pag. 592 och 831. 1870.

[5]) JAMIN och AMAURY, Compt. rendus, 70, pag. 661. 1870.

[6]) ROWLAND, Proc. of the Americ. Acad. Boston 7, pag. 75. 1880.

äfven bestämmer direkt med blandningsmetoden. Båda bestämningssätten gifva det frapperande resultat, att specifika värmet aftar med ungefär 1 procent från 0° till 30°, men att det sedan växer lineärt med temperaturen. ROWLANDS försök med blandningsmetoden förnyades af LIEBIG[1]) med ROWLANDS apparater. Han erhöll samma resultat som ROWLAND. Till full öfverensstämmelse med ROWLAND kom likaledes DIETERICI[2]) genom bestämning af värmets mekaniska eqvivalent. VELTEN[3]) kommer genom talrika och noggranna undersökningar med blandningsmetoden och med användande af BUNSENS iskalorimeter till ännu mera afvikande resultat. Enligt VELTEN har vattnets specifika värme mellan 0° och 7° det högsta värde, som det öfver hufvud har mellan 0° och 100°, det aftar mellan 7° och 10° med ungefär 3 procent, växer från 10° till 20° med ungefär 3 procent och har vid 40° ett minimum. I förbigående må nämnas, att den samstämmighet med sina egna resultat, som VELTEN trott sig finna genom ett direkt uträknande af REGNAULTS data, i strid med REGNAULTS egna beräkningar, bestridas af W. SUTHERLAND[4]), som visat, att misstaget beror på en felaktig tabulering i vigten af vatten vid högtemperatur i just de observationer, som VELTEN begagnat. Hvad beträffar de högre temperaturerna står VELTEN ännu ensam. Hans resultat för de lägre temperaturerna visa deremot ett närmande mot ROWLANDS och DIETERICIS påståenden.

För ett kontinuerligt växande tala emellertid undersökningar af v. MÜNCHHAUSEN[5]), som funnit $C_t = 1 + 0{,}000425\, t$, af BAUMGARTNER[6]), som funnit $C_t = 1 + 0{,}00037\, t$, af HEINRICHSEN[7]), som anger $C_t = 1 + 0{,}00036\, t$, hvilka således sträfva åt REGNAULTS resultat.

---

[1]) LIEBIG, Sill. Journ. (3) 26, pag. 57. 1883.
[2]) DIETERICI, Wied. Ann. 33, pag. 417. 1888.
[3]) VELTEN, Wied. Ann. 21, pag. 31. 1884.
[4]) W. SUTHERLAND, Philosophical Magazin (5) 26, pag. 298. 1888.
[5]) v. MÜNCHHAUSEN u. WILLNER, Wied. Ann. 10, pag. 289. 1880.
[6]) BAUMGARTNER, Wied. Ann. 8, pag. 648. 1879.
[7]) HEINRICHSEN, Wied. Ann. 8, pag. 83. 1879.

I det närmaste till full öfverensstämmelse med JAMIN och AMAURY tala undersökningar af SAMO[1]) och af GEROSA[2]). Denne senare har dock funnit en oregelbundenhet vid vattnets maximitäthet.

Till sist må nämnas, att PUSCHL[3]) sökt på teoretisk väg visa, att vattnet skulle kunna ega oregelbundenheten i variationen af specifika värmet äfven på andra områden än vid dess maximitäthet.

Om man nu ur Tab. I grafiskt framställer den kurva, som anger förhållandet mellan vattnets temperatur och dess specifika värme erhålles följande värden:

Tab. II.

t	*C*	*t*	*C*	*t*	*C*
0	1,0000	14	1,0060	28	1,027
2	0,9999	16	1,0100	30	1,029
4	0,9998	18	1.0140	32	1,031
6	1,0000	20	1,0170	34	1,033
8	1,0000	22	1,020	36	1,034
10	1,0009	24	1,022	38	1,037
12	1,0020	26	1,024	40	1,039

Enligt denna undersökning skulle således följa, att vattnets specifika värme växer med temperaturen, men att de erhållna värdena äro något mindre än de af JAMIN och AMAURY angifna. Från 0° till 10° kan specifika värmet anses konstant, medan det derefter växer kontinuerligt med temperaturen.

[1]) SAMO, Inaugur. Diss. Zürich 1877.

[2]) GEROSA, Atti della R. Accad. dei Lincei (3), pag. 75. 1881.

[3]) PUSCHL, Sitzungsber. der K. Ak. Wien. Bd. 47, häfte 8. 1888.
» » » » 48 » 2. 1889.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1891. N:o 5.
Stockholm.

Ett par formler för beräkning af mortaliteten inom pensionskassor eller andra slutna sällskap.

Af G. Eneström.

[Meddeladt den 13 Maj 1891 genom D. G. Lindhagen.]

I min uppsats *Om måttet för dödligheten inom en bestämd åldersklass*[1]) har jag bevisat följande sats:

Om man under en bestämd tid iakttagit de personer inom ett sällskap, hvilka befunnit sig i åldern $x/x+1$ år och observerat, att dessa tillsammans utgjort a_x personer; om vidare bland dem d_x personer dött och u_x personer utträdt under observationstiden samt k_x personer vid observationstidens slut kvarstodo i åldern $x/x+1$ år; om slutligen w_x utmärker sannolikheten för en x-åring att dö inom ett år, så är

$$w_x = \frac{d_x}{N},$$

där

$$N = \sum_{r=1}^{r=n} \frac{a_r(1-\tau_r)}{1-\tau_r w_x} - \sum_{r=1}^{r=m} \frac{u_r(1-t_r)}{1-t_r w_x} - \sum_{r=1}^{r=m'} \frac{k_r(1-t'_r)}{1-t'_r w_x},$$

och där de i uttrycket för N förekommande tecknen hafva följande betydelse:

$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ äro de olika åldrar, räknade från x-te åldersårets början, från och med hvilka de iakttagna a_x personerna kunnat observeras, och a_r är antalet personer, som observerats från och med åldern $x+\tau_r$ år;

[1]) Öfvers. af Vet.-Akad. Förh. 1891 sid. 251—259.

$t_1, t_2, \ldots, t_m$ äro de olika åldrar, räknade från x-te åldersårets början, vid hvilka de u_x personerna utträdt, och u_r är antalet personer, som utträdt vid åldern $x+t_r$ år;

$t'_1, t'_2, \ldots, t'_{m'}$ äro de olika åldrar, räknade från x-te åldersårets början, i hvilka de k_x personerna vid observationstidens slut befunno sig, och k_r är antalet personer, som vid observationstidens slut befunno sig i åldern $x+t'_r$ år.

Känner man nu för hvar och en af de iakttagna personerna den ålder, från och med hvilken han observerats, vidare för hvar och en af de utgångna personerna utträdesåldern och slutligen lefnadsåldern vid observationstidens slut för hvar och en af de då kvarstående personerna, så kan man ur denna formel medels sukcessiva approximationer beräkna w_x. Egentligen borde man känna de nämda åldrarna exakt, men i praktiken är det tydligen fullt tillräckligt, om deras värden äro uttryckta i ett helt antal dagar.

I sådana fall, där de iakttagna personerna uppgå till flere tusen, skulle det emellertid vara ytterst besvärligt att beräkna alla storheterna $a_r(1-\tau_r)$, $u_r(1-t_r)$ och $k_r(1-t'_r)$. Detta tidsödande räknearbete kan också undvikas, om man dels med tillhjälp af lämpligt valda antaganden uttrycker a_r såsom funktion af a_x och τ_r, u_r såsom funktion af u_x och t_r samt k_x såsom funktion af k_x och t'_r, dels låter hvar och en af storheterna τ_r, t_r, t'_r antaga alla värden mellan 0 och 1. Härigenom öfvergå nämligen summorna till integraler, och efter utförande af integrationerna bör man erhålla en för numeriska kalkyler passande formel.

För detta ändamål är det dock bäst att fördela de a_x observerade personerna i tre grupper, af hvilka den första omfattar dem, som vid observationstidens början tillhörde sällskapet och då befunno sig i åldern $x/x+1$ år, den andra omfattar dem, som under observationstiden inträdt i sällskapet i en ålder af mindre än x år, och den tredje omfattar dem, som under observationstiden inträdt i sällskapet i åldern $x/x+1$ år. Antalet personer i den första gruppen kalla vi b_x, antalet personer i

den andra gruppen c_x, och antalet personer i den tredje gruppen i_x. Om observationstidens början sammanfaller med sällskapets stiftelse, är tydligen $b_x = 0$; om åter $x\ x+1$ år är den lägsta faktiskt förekommande inträdesåldern, är $c_x = 0$, och om en maximiålder af p år finnes föreskrifven för de nytillträdande, är $i_p = 0$.

Af definitionen på c_x följer, att alla c_x personerna observerats från och med fyllda x år, hvadan det till c_x hörande τ-värdet är 0, och således den term i den första summan, hvilken hänför sig till personerna i den andra gruppen, blir rätt och slätt c_x. Betecknar man med b_r antalet personer, som vid observationstidens början befunno sig i åldern $x+\tau'_r$ år ($\tau'_r < 1$) och med i_r antalet personer, som under observationstiden inträdt i sällskapet i åldern $x+\tau''_r$ år ($\tau''_r < 1$), så erhåller man följande ekvation

$$N = \sum \frac{b_r(1-\tau'_r)}{1-\tau'_r w_x} + c_x + \sum \frac{i_r(1-\tau''_r)}{1-\tau''_r w_x} - \sum \frac{u_r(1-t_r)}{1-t_r w_x} - \sum \frac{k_r(1-t'_r)}{1-t'_r w_x},$$

där summationstecknen hänföra sig till r och afse alla förefintliga r-värden.

Antaga vi nu, att τ'_r, τ''_r, t_r och t'_r genomlöpa *alla* värden mellan 0 och 1, så kunna vi utbyta dessa tecken mot de enklare τ', τ'', t och t' samt summationstecknen mot integraltecken; vi erhålla således ekvationen:

$$N = \int_0^1 \frac{b_r(1-\tau')}{1-\tau' w_x} + c_x + \int_0^1 \frac{i_r(1-\tau'')}{1-\tau'' w_x} - \int_0^1 \frac{u_r(1-t)}{1-t w_x} - \int_0^1 \frac{k_r(1-t')}{1-t' w_x}, \quad \ldots \quad (A)$$

där b_r nu utmärker antalet personer, som vid observationstidens början befunno sig i åldersgruppen $x+\tau'/x+\tau'+d\tau'$ år, och i_r, u_r, k_r hafva analoga betydelser.

För att kunna utföra integrationerna måste vi uttrycka b_r, i_r, u_r, k_r såsom funktioner af de oberoende variablerna och de gifna konstanterna. Vi utgå därvid från den förutsättningen, att bland de i_p personer, som inträda i sällskapet i åldern $p/p+1$ år, alla möjliga åldersgrupper äro lika talrikt representerade, och att således antalet personer, som inträda i sällskapet i åldern $p+s/p+s'$ år $(s < s' < 1)$, är $(s'-s)i_p$. Under detta antagande blir tydligen

$$i_r = i_x d\iota''$$

och således

$$\int_0^1 \frac{i_r(1-\iota'')}{1-\iota'' w_x} = i_x \int_0^1 \frac{(1-\iota'')d\iota''}{1-\iota'' w_x} = \frac{i_x}{w_x} + \frac{i_x(1-w_x)\log(1-w_x)}{w_x^2}.$$

Utveckla vi detta resultat efter stigande digniteter af w_x, finna vi, att om w_x är en liten storhet, man approximativt kan sätta

$$\int_0^1 \frac{i_r(1-\iota'')}{1-\iota'' w_x} = \tfrac{1}{2} i_x .$$

Vi skola nu söka uttrycka b_r såsom en funktion af b_x och ι', fasthålla fortfarande vid den nyss gjorda förutsättningen, att antalet inträdande i hvarje åldersklass $p/p+1$ år är likformigt fördeladt på de olika inom densamma förefintliga åldersgrupperna, och antaga för enkelhetens skull, att tiden mellan sällskapets stiftelse och observationstidens början utgör ett helt antal år, samt att observationstiden börjar med ett nytt kalenderår. Det bör då först påpekas, att funktionsformen för b_r blir en annan, om tidpunkten för sällskapets stiftelse är så aflägsen, att äfven de, som då inträdde i den lägsta faktiskt förekommade åldersklassen, alla vid observationstidens början uppnått $x+1$ års ålder, än om af de nyss nämda personerna ingen enda vid observationstidens början uppnått $x+1$ års ålder. Detta ådagalägges lättast genom att taga i betraktande ett specialfall. Vi förutsätta därvid, att sällskapet stiftats ett år före observationstidens början, och att den lägsta faktiskt förekommande inträdes-

åldern är ξ år, samt antaga först, att fråga är om dödligheten just inom åldersklassen $\xi/\xi+1$ år, i hvilken händelse tydligen äfven de yngsta bland dem, som vid sällskapets stiftelse inträdde (d. v. s. de ξ-årige), vid observationstidens början fyllt $\xi+1$ år. Det är nu lätt att inse, att om vid hvarje tidpunkt ett lika stort antal personer inom åldersklassen $\xi/\xi+1$ år inträdt, sällskapet vid observationstidens början måste ega ett relativt större antal medlemmar inom de högre åldersgrupperna af årsklassen $\xi/\xi+1$ år, än inom de lägre. Till de högre åldersgrupperna hafva nämligen i större eller mindre mån bidragit flertalet af de åldersgrupper, som vid inträdet tillhört årsklassen $\xi/\xi+1$ år, under det att de vid observationstidens början kvarstående lägre åldersgrupperna rekryterats blott från dem, som vid inträdet haft en relativt låg ålder. — Vi antaga nu i stället, att fråga är om dödligheten inom åldersklassen $\xi+4/\xi+5$ år, i hvilken händelse tydligen den yngsta årsklassen bland dem, som vid sällskapets stiftelse inträdde, d. v. s. årsklassen $\xi/\xi+1$ år, icke ens till någon del kunnat vid observationstidens början uppnå $\xi+5$ års ålder. Vi inse då lätt, att om vid hvarje tidpunkt under det första året af sällskapets tillvaro lika många personer inträdt inom åldersklasserna $\xi+3/\xi+4$ år och $\xi+4/\xi+5$ år, ungefär lika många skola finnas kvar vid observationstidens början inom alla åldersgrupper af årsklassen $\xi+4/\xi+5$ år — de skulle vara exakt lika många, om sannolikheten att dö eller utträda inom ett år vore exakt lika för alla ifrågavarande åldersgrupper. I själfva verket bidraga till åldersgruppen $\xi+4$ år de, som inträdt vid tidpunkterna

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n} \text{ år,}$$

räknadt från stiftelsetidpunkten och som då varit respektive

$$\xi+3 \text{ år}, \quad \xi+3+\frac{1}{n} \text{ år}, \quad \xi+3+\frac{2}{n} \text{ år}, \ldots\ldots, \xi+3+\frac{n-1}{n} \text{ år;}$$

på samma sätt bidraga till åldersgruppen $\xi+5-\frac{1}{n}$ år de personer, som inträdt vid samma tidpunkter och då varit respektive

$$\xi+4-\frac{1}{n} \text{ år}, \quad \xi+4 \text{ år}, \quad \xi+4+\frac{1}{n} \text{ år}, \ldots, \quad \xi+4+\frac{n-2}{n} \text{ år},$$

och ett liknande förhållande eger rum för dem, som tillhöra de mellanliggande åldersgrupperna af årsklassen $\xi+4/\xi+5$ år. Men enligt antagandet är antalet inträdande vid $\xi+3$ år lika stort som antalet inträdande vid $\xi+4-\frac{1}{n}$ år, o. s. v.; sannolikheten att dö eller utträda bör också vara ungefär lika stor för alla åldersgrupperna, och således bör antalet personer, som vid observationstidens början befinna sig i åldern $\xi+4/\xi+5$ år, vara ungefär likformigt fördeladt på alla åldersgrupper inom nämde årsklass.

Efter denna förberedande anmärkning öfvergå vi till en analytisk lösning af den föreliggande frågan. För detta ändamål antaga vi, att under hvarje år af sällskapets tillvaro blifvit intagna i personer i åldern $x/x+1$ år, i' personer i åldern $x-1/x$ år, ..., $i^{(x-\xi)}$ personer i åldern $\xi/\xi+1$ år. Vid tidpunkten $-s$ räknad från observationstidens början hafva då inträdt ids personer i åldern $x/x+1$ år, af hvilka $ids d\tau'$ tillhöra åldersgruppen $x+\tau'-s/x+\tau'+d\tau'-s$ år, och hvilka således rekrytera den åldersgrupp, som vid observationstidens början är $x+\tau'/x+\tau'+d\tau'$ år. Af dessa $idsd\tau'$ personer kvarlefva vid observationstidens början, om W_x utmärker sannolikheten för en x-åring att dö eller utträda inom ett år, ett antal personer af

$$idsd\tau' - \frac{idsd\tau' s W_x}{1-(\tau'-s)W_x} = \frac{idsd\tau'(1-\tau' W_x)}{1-(\tau'-s)W_x}.$$

Integrerar man detta uttryck mellan gränserna $s=0$ och $s=\tau'$, erhåller man tydligen antalet personer, som vid inträdet tillhört åldersklassen $x/x+1$ år och vid observationstidens början tillhörde åldersgruppen $x+\tau'/x+\tau'+d\tau'$ år. Detta antal är således

$$\int_0^{\tau'} \frac{i(1-\tau' W_x)d\tau' ds}{1-(\tau'-s)W_x}.$$

På alldeles samma sätt finner man, att antalet personer, som vid inträdet tillhört åldersklassen $x - 1/x$ år, och vid observationstidens början tillhörde åldersgruppen $x + \tau'/x + \iota' + d\iota'$ år, är

$$\int_{\tau'}^{1+\tau'} \frac{i'(1 - W_{x-1})(1 - \tau' W_x) d\tau' ds}{1 - (1 + \iota' - s) W_{x-1}},$$

om sällskapet stiftats mer än ett år före observationstidens början, men

$$\int_{\tau'}^{1} \frac{i'(1 - W_{x-1})(1 - \tau' W_x) d\iota' ds}{1 - (1 + \tau' - s) W_{x-1}},$$

om sällskapet ägt bestånd blott ett år före observationstidens början. Fortgår man vidare på samma sätt, finner man slutligen, att hela antalet personer (b_r), som vid observationstidens början tillhörde åldersgruppen $x + \iota'/x + \iota' + d\tau'$ år, angifves genom formeln

$$b_r = \int_0^{\tau'} \frac{i(1 - \iota' W_x) d\tau' ds}{1 - (\tau' - s) W_x} + \int_{\tau'}^{1+\tau'} \frac{i'(1 - W_{x-1})(1 - \iota' W_x) d\tau' ds}{1 - (1 + \iota' - s) W_{x-1}} + \ldots$$

$$+ \int_{x-1-\xi+\tau'}^{x-\xi+\tau'} \frac{i^{(x-\xi)}(1 - W_{x-1}) \ldots (1 - W_\xi)(1 - \iota' W_x) d\iota' ds}{1 - (x - \xi + \tau' - s) W_\xi},$$

om sällskapet ägt bestånd mer än $x - \xi$ år före observationstidens början. Har åter sällskapet ägt bestånd blott $\varkappa$ år ($\varkappa \overline{\leq} x - \xi$), ingå i formeln för b_r blott de $\varkappa + 1$ första integralerna, och den sista af dem har till öfre integrationsgräns icke $\varkappa + \tau'$ utan $\varkappa$.

Egentligen borde nu detta värde på b_r insättas i ekv. (A) och de två integrationerna i afseende på s och τ' utföras. Men dels skulle på detta sätt formeln för w_x blifva alldeles ohanterlig, dels ingå i värdet på b_r storheterna i, i', i'', o. s. v., hvilka icke förutsättas vara bekanta. Vi måste därför genom lämpliga antaganden och förenklingar söka erhålla ett för numerisk kalkyl användbart uttryck. Därvid taga vi först i betrak-

tande specialfallet $x = \xi$, d. v. s. då fråga är om dödligheten inom den lägsta faktiskt förekommande årsklassen $\xi/\xi+1$ år. I detta fall är

$$i' = i'' = \ldots = 0,$$

och således

$$b_r = \int_0^{\tau'} \frac{i(1 - \iota' W_x) d\iota' ds}{1 - (\tau' - s) W_x}.$$

Då här sannolikheten att dö inom ett år får antagas vara mycket liten, och sannolikheten att utträda inom ett år också är obetydlig, samt då både ι' och $\tau' - s$ äro mindre än 1, kan man utan nämnvärdt fel sätta

$$b_r = \int_0^{\tau'} i d\iota' ds = i\iota' d\iota'.$$

Men nu är enligt definitionen på b_r

$$b_x = \int_0^1 b_r = \int_0^1 i\iota' d\iota' = \tfrac{1}{2} i,$$

och således blir approximativt

$$b_r = 2 b_x \tau' d\iota'.$$

Häraf följer, att

$$\int_0^1 \frac{b_r(1 - \tau')}{1 - \iota' w_x} = 2 b_x \int_0^1 \frac{\tau'(1 - \tau') d\iota'}{1 - \iota' w_x},$$

och då man i detta uttryck utan nämnvärdt fel kan försumma $\tau' w_x$, blir approximativt

$$\int_0^1 \frac{b_r(1 - \tau')}{1 - \tau' w_x} = 2 b_x \int_0^1 \iota'(1 - \tau') d\tau' = \tfrac{1}{3} b_x.$$

Vi öfvergå nu till det fall, då $x > \xi$. Genom enkla lineära substitutioner kan den allmänna formeln för b_r förenklas till

$$b_r = \int_0^{\tau'} \frac{i(1-\iota' W_x)d\iota' ds}{1-(\tau'-s)W_x}$$

$$+(1-\iota' W_x)d\iota' \int_0^1 \left[\frac{i'(1-W_{x-1})}{1-(1-\sigma)W_{x-1}} + \ldots + \frac{i^{(x-\xi)}(1-W_{x-1})\ldots(1-W_\xi)}{1-(1-\sigma)W_\xi}\right] d\sigma ,$$

om sällskapet ägt bestånd mer än $x-\xi$ år före observationstidens början. Får man nu antaga, att antalet inträdande minskas, då inträdesåldern stiger, på sådant sätt att approximativt

$$i = i'(1-W_{x-1}) = i''(1-W_{x-1})(1-W_{x-2})$$
$$= \ldots = i^{(x-\xi)}(1-W_{x-1})\ldots(1-W_\xi) ,$$

och betecknar man med W ett medelvärde af alla storheterna W_{x-1}, W_{x-2}, ..., W_ξ, erhåller man

$$b_r = \int_0^{\tau'} \frac{i(1-\iota' W_x)d\iota' ds}{1-(\tau'-s)W_x} + (x-\xi)i(1-\iota' W_x)d\iota' \int_0^1 \frac{d\sigma}{1-(1-\sigma)W} ,$$

hvarur genom försummande af de små storheterna $\iota' W_x$, $(\iota'-s)W_x$ och $(1-\sigma)W$ erhålles det approximativa värdet

$$b_r = \int_0^{\tau'} i d\iota' ds + (x-\xi) i d\tau' \int_0^1 d\sigma = i(\tau'+x-\xi)d\iota' .$$

Påminner man sig nu, att

$$b_x = \int_0^1 b_r = \int_0^1 i(\iota' + x - \xi)d\tau' = i(\tfrac{1}{2} + x - \xi) ,$$

erhåller man approximativt

$$b_r = b_x \frac{\iota' + x - \xi}{\frac{1}{2} + x - \xi} d\tau' .$$

Häraf följer, att

$$\int_0^1 \frac{b_r(1-\iota')}{1-\iota' w_x} = b_x \int_0^1 \frac{(1-\iota')(\iota'+x-\xi)}{(1-\iota' w_x)(\frac{1}{2}+x-\xi)} d\iota' ,$$

eller, om man äfven i detta fall försummar storheten $\iota' w_x$,

$$\int_0^1 \frac{b_r(1-\iota')}{1-\iota' w_x} = b_x \int_0^1 \frac{(1-\tau')(\tau'+x-\xi)}{\frac{1}{2}+x-\xi} d\iota' = b_x \frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}(x-\xi)}{\frac{1}{2}+x-\xi}.$$

Ju större talet $x-\xi$ är, dess mera närmar sig detta uttryck till $\frac{1}{2}b_x$, och då redan för $x-\xi=1$ dess värde är $\frac{4}{9}b_x$, kunna vi utan betänkligheter sätta approximativt

$$\int_0^1 \frac{b_r(1-\tau')}{1-\tau' w_x} = \frac{1}{2}b_x .$$

Har sällskapet ägt bestånd blott $\varkappa$ år ($\varkappa \overline{\overline{<}} x-\xi$) före observationstidens början, kan man på den nyss angifna vägen lätt visa, att b_r approximativt kan uttryckas genom formeln

$$b_r = \int_0^{\tau'} i d\tau' ds + (\varkappa - 1) i d\iota' \int_0^1 d\sigma + \int_0^{1-\tau'} i d\iota' d\sigma_1 ,$$

hvadan således

$$b_r = i\tau' d\tau' + (\varkappa - 1) i d\iota' + i(1-\tau') d\tau' = i\varkappa d\iota' ,$$

och man erhåller i detta fall såsom approximativt slutresultat

$$\int_0^1 \frac{b_r(1-\tau')}{1-\tau' w_x} = \frac{1}{2}b_x ,$$

d. v. s. samma formel som i föregående fall.

Sammanfatta vi de nu härledda resultaten med afseende på den term i ekv. (A), i hvilken b_r ingår, kunna vi uttrycka dem sålunda:

Den första termen af högra ledet i ekv. (A) kan approximativt ersättas med $\frac{1}{3}b_x$ eller $\frac{1}{2}b_x$, allteftersom x är lika med eller större än den lägsta faktiskt förekommande inträdesåldern.

Sedan vi således beräknat värdet af den integral, i hvilken b_r ingår, kunna vi omedelbart erhålla värdet af den integral, i hvilken k_r ingår. Det är nämligen tydligt, att hvad som ofvan blifvit uppvisadt om fördelningen af de vid observationstidens

början kvarstående, äfven gäller om fördelningen af dem, som kvarstå vid en godtycklig tidpunkt efter observationstidens början, eftersom storheten $\varkappa$ icke förekommer i slutresultatet, och att det således också gäller för observationstidens slut. Man kan således approximativt sätta

$$\int\limits_0 \frac{k_r(1-t')}{1-t'w_x} = \tfrac{1}{3}k_x\,,$$

eller

$$\int\limits_0^1 \frac{k_r(1-t')}{1-t'w_x} = \tfrac{1}{2}k_x\,,$$

alltefter som x är lika med eller större än den lägsta faktiskt förekommande inträdesåldern.

Det återstår nu blott att uttrycka u_r såsom en funktion af u_x och t, samt med tillhjälp häraf bestämma värdet af den integral, i hvilken u_r ingår; vi antaga därvid sannolikheten att utträda inom ett år vara konstant $= \omega$ för hvarje åldersgrupp.

Taga vi då först i betraktande den lägsta faktiskt förekommande inträdesåldern, $\xi/\xi+1$ år, så veta vi af det föregående, att vid hvarje tidpunkt antalet kvarstående i åldern $\xi+t'/\xi+t'+dt'$ år kan approximativt uttryckas genom

$$it'dt'\,,$$

om sällskapet vid observationstidens början egt bestånd åtminstone ett år. Häraf följer, att antalet utträdande under tiden $\tau/\tau+d\tau$ inom åldersgruppen $\xi+t'/\xi+t'+dt'$ år approximativt uppgår till

$$it'dt'\omega d\tau\,,$$

och antalet utträdande inom denna åldersgrupp under hela observationstiden, om denna tid omfattar $\varkappa'$ år, blir approximativt

$$u_r = \int\limits_0^{\varkappa'} it'dt'\omega d\tau = i\varkappa'\omega t'dt'\,.$$

Men då nu enligt definitionen på u_r

$$\int_0^1 u_r = u_x ,$$

så blir

$$u_x = \int_0^1 i\varkappa' \omega t' dt' = \tfrac{1}{2} i\varkappa'\omega$$

och således

$$u_r = 2u_x t' dt' .$$

Man erhåller alltså approximativt

$$\int_0^1 \frac{u_r(1-t')}{1-t'w_x} = 2u_x \int_0^1 (1-t')t'dt' = \tfrac{1}{3}u_x .$$

Detta värde kan också utan nämnvärdt fel användas, äfven om observationstidens början sammanfaller med sällskapets stiftelse. Skulle observationstiden omfatta blott första året af sällskapets tillvaro, borde visserligen formeln något modifieras. Betecknar man med i antalet personer, som under detta första år inträdt i sällskapet i åldern $\xi/\xi+1$ år, kan antalet under året utträdande personer i åldern $\xi+t'/\xi+t'+dt'$ år, d. v. s. u_r, uttryckas genom dubbelintegralen

$$\int_0^{t'}\int_0^{1+t-t'} \omega i dt' dt d\tau ;$$

genom utförande af de två integrationerna, användande af formeln

$$\int_0^1 u_r = u_x$$

samt några enkla reduktioner, erhåller man

$$u_r = 3u_x(t' - \tfrac{1}{2}t'^2)dt' ,$$

och således approximativt

$$\int_0^1 \frac{u_r(1-t')}{1-t'w_x} = \int_0^1 3u_x(t'-\tfrac{1}{2}t'^2)(1-t')dt' = \tfrac{3}{8}u_x .$$

Då emellertid beräkningen af en mortalitetstabell icke gärna grundas blott på ett års erfarenhet och då för öfrigt differensen

mellan $\frac{3}{8}$ och $\frac{1}{3}$ icke uppgår till mer än $\frac{1}{24}$, är det onödigt att för detta undantagsfall uppställa en särskild formel, och vi kunna således anse värdet $\frac{1}{3}u_x$ för den lägsta åldersklassen användbart utan inskränkning.

Äfven för det fall, att $x > \xi$, kunna vi begagna oss af uttrycket för antalet kvarstående i åldern $x+t'/x+t'+dt'$ år och tillämpa den nyss använda metoden för bestämmande af antalet utträdande i denna ålder; vi erhålla på detta sätt approximativt

$$\int_0^1 \frac{u_x(1-t')}{1-t'w_x} = \tfrac{1}{2}u_x.$$

Härmed äro alla beräkningar utförda, hvilka behöfvas för att bringa ekv. (A) till en för numerisk kalkyl lämplig form. Det resultat, till hvilket vi kommit, kan sammanfattas i följande sats:

Om åldern $x/x+1$ är den lägsta faktiskt förekommande inträdesåldern, är approximativt

$$w_x = \frac{d_x}{\frac{1}{2}i_x - \frac{1}{3}[u_x + (k_x - b_x)]};$$

i annat fall åter är approximativt

$$w_x = \frac{d_x}{c_x + \frac{1}{2}i_x - \frac{1}{2}[u_x + (k_x - b_x)]}.$$

Den sista formeln för w_x har användts 1873 af W. LAZARUS vid beräkning af en mortalitetstabell för »Pensions-Casse für Wittwen und Waisen der Angestellten des Hamburgischen Staats» och sedermera bl. a. för det stora arbetet: *Deutsche Sterblichkeitstafeln aus den Erfahrungen von 23 Lebensversicherungsgesellschaften, veröffentlicht im Auftrage des Kollegiums für Lebensversicherungswissenschaft in Berlin* (Berlin 1883). Däremot har den första formeln, så vidt jag vet, icke förut varit framställd eller använd; äfven för den lägsta faktiskt förekommande årsklassen har man hittills beräknat dödligheten enligt den andra formeln. Detta är, såsom af det föregående framgår, ur teoretisk synpunkt oriktigt; i praktiken har dock denna omständighet i all-

mänhet haft föga eller ingen betydelse, enär ofta blott ett ringa antal personer i nämda ålder stått under observation, så att det outjämnade värdet på dödligheten egt en relativt mycket liten vikt. Stundom har antalet dödsfall i denna ålder varit 0, och det direkt beräknade värdet på dödligheten måste då naturligtvis blifva 0, vare sig man väljer den ena eller den andra formeln. Emellertid har det synts mig vara af intresse att i sammanhang med en mera exakt härledning af den vanliga formeln äfven påpeka, att denna icke strängt taget är användbar för den lägsta faktiskt förekommande årsklassen.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts. från sid. 288.)

Paris. *Société astronomique de France.*
Bulletin. Année 4(1890). 8:o.
— *Société entomologique de France.*
Annales. (6) T. 9: Trim. 1–4. 8:o.
— *Société zoologique de France.*
Mémoires. T. 2: N:o 4; 3: 2–4. 1889—90. 8:o.
Bulletin. T. 14(1889): N:o 10; 15(1890): 1–10. 8:o.
Rom. *R. Accademia dei lincei.*
Memorie. (4) Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. 4: P. 1; 6: P. 2. 1888—89. 4:o.
S:t Petersburg. *Société Imp. géographique de Russie.*
Isvestia (Bulletin). T. 25(1889): B. 6–7; 26(1890): 1–5. 8:o.
Otschetie (Compte rendu). 1889. 8:o.
Toronto. *Canadian institute.*
Transactions. Vol. 1: P. 1. 1890. 8:o.
Toulouse. *Académie des sciences, inscriptions et belles lettres.*
Mémoires. (9) T. 1. 1889. 8:o.
Troyes. *Société académique d'agriculture, des sciences, arts et belles-lettres du dép. de l'Aube.*
Mémoires. T. 53(1889). 8:o.
Förlagsbokhandlaren Hr F. Beijer. Stockholm.
NATHORST, A. G., Jordens historia. H. 6. Sthm. 1891. 8:o.
Kanslisekreteraren Hr D:r S. Nordström. Stockholm.
MEUNIER, S., Géologie des environs de Paris. Paris 1875. 8:o.
SURELL, A., Étude sur les torrents des Hautes-Alpes. Éd. 2. T. 1—2. Paris 1870—72. 8:o.
Kamreraren Hr G. A. Lindberg. Stockholm.
VENTENAT, E. P., Description des plantes nouvelles ou peu connues cultivées dans le jardin de J. M. Cels. Paris an 8. 4:o.
Utgifvarne.
Journal of comparative neurology, ed. by C. L. Herrick. Vol. 1(1891): N:o 1. Cincinnati. 8:o.
Monatliche Mittheilungen aus dem Gesammtgebiete der Naturwissenschaften. Bd. 5. Berlin 1888. 8:o.
Societatum litteræ, hrsg. von E. Huth. Jahr 1890. Berlin. 8:o.
Författarne.
CARLSON, F., Öfversigt öfver Göteborgs och Bohus läns fiskarförenings ekonomiska verksamhet 1870—1890. Göteb. 1891. 8:o.
LILLJEBORG, W., Sveriges och Norges fiskar. H. 7—8. Ups. 1890—91. 8:o.
STOLPE, HJ., Utvecklingsföreteelser i naturfolkens ornamentik. Sthm. 1890. 8:o.
THORELL, T., Studi sui Ragni Malesi e Papuani. P. 4. Genova 1889—90. 8:o.
— Aracnidi artogastri Birmani, raccolti da L. Fea nel 1885—87. Genova 1889. 8:o.

Thorell, T., Aracnidi di Pinang, raccolti nel 1889 dai signori L. Loria e L. Fea. Genova 1890. 8:o.

— Aracnidi di Nias e di Sumatra, raccolti nel 1886 dal sig. E. Modigliani. Genova 1890. 8:o.

— Diagnoses Aranearum aliquot novarum in Indo-Malesia inventarum. Genova 1890. 8:o.

Barot, A., L'Ortie ... Sa culture en France et en Suède. Paris 1891. 12:o.

Bogdanow, A., Materiali ... — Materialier till en historia öfver vetenskapliga ... arbeten i Ryssland inom zoologien ... 1850—1888. F. 3. Moskwa 1991. 4:o.

Huggins, W., On Wolf and Rayet's bright-line stars in Cygnus. London 1891. 8:o.

Malaise, C., Sur les Graptolithes de Belgique. Bruxelles 1890. 8:o.

Schneider, J. S., Crustacea og Pycnogonida indsamlede i Kvænangsfjorden 1881. Tromsö 1884. 8:o.

— Småskrifter. 18 häften. 8:o.

Scudder, S. H., The fossil Insects of North America. Vol. 1—2. New York 1890. 4:o.

Stockholm, 1891. Kongl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 48. 1891. № 6.

Onsdagen den 10 Juni.

INNEHÅLL:

Tillkännagafs, att Akademiens utländske ledamot, Professorn vid universitetet i München CARL WILHELM VON NÆGELI med döden afgått.

H:r ROSSANDER meddelade några resultat af epithelialkräftas behandling med injektioner i och omkring kräftknölarne med hydras kalicus.

H:r Friherre NORDENSKIÖLD dels redogjorde för innehållet af en inlemnad uppsats: »Undersökning af en kis, hvilken tyckes innehålla ett nytt enkelt ämne», af Bergskonduktören L. J. IGELSTRÖM[1]), dels meddelade utdrag ur ett bref från Friherre FERD. VON MUELLER i Melbourne öfver utsigterna för insamlingen af penningebidrag för den ifrågasatta antarktiska expeditionen.

[1]) Uppsatsens tryckning uppskjuten till ett följande häfte af Öfversigten.

H:r HASSELBERG refererade en uppsats af Docenten K. ÅNGSTRÖM: »L'intensité de la radiation des gaz sous l'influence de la decharge électrique»*.

H:r WITTROCK meddelade en uppsats af Fröken HEDVIG LOVÉN: »Några rön om algernas andning» (Se Bihang till K. Vet.-Akad. Handl.).

H:r NILSSON öfverlemnade en uppsats af Fil. Licentiaten D. S. HECTOR: »Om derivat af svafvelurinämnen. III»*.

H:r MITTAG-LEFFLER meddelade en uppsats af Docenten O. OLSSON: »Lösning af ett mekaniskt problem, som leder till Rosenhainska funktioner» (se Bihang etc.).

Sekreteraren aflemnade för intagande i Akademiens skrifter följande inkomna uppsatser: 1:o) »Die mit Oxypisthen, Thomson, verwandten afrikanischen Gattungen der Calandriden», af Professor CHR. AURIVILLIUS; 2:o) »Jemförelse mellan ÅNGSTRÖMS och NEUMANS metoder för bestämning af kroppars ledningsförmåga för värme. II. Experimentella undersökningar. B. Enligt NEUMANS metod», af Fil. Licentiaten K. L. HAGSTRÖM*; 3:o) Om 1-6 Dibromnaftalin», af Fil. Kandidaten G. FORSLING*; 4:o) »Om iridiums amoniakaliska föreningar. II», af Amanuensen K. W. PALMÆR*; 5:o) Triazolföreningar, framställda af aldehyder och dicyanfenylhydrazin», af Fil. Kandidaten P. J. HOLMQVIST*; 6:o) »Om de befolkningsstatistiska formlerna för beräkning af dödligheten under första lefnadsåret», af Amanuensen G. ENESTRÖM*.

Genom anställdt val kallades Direktorn för Kejserl. Botaniska Trädgården i S:t Petersburg, Geheimerådet EDVARD VON REGEL till utländsk ledamot af Akademien.

Följande skänker anmäldes:

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

Lund.
Akademiskt tryck. 1890/91. 5 häften. 4:o & 8:o.

Kristiania. *K. universitetet.*
Nyt Magazin for Naturvidenskaberne. Bd. 32: H. 1. 1890. 8:o.
Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Bd. 14: H. 3–4. 1890. 8:o.

(Forts. å sid. 372.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1891. N:o 6.
Stockholm.

Die mit *Oxyopisthen* Thomson verwandten, afrikanischen Gattungen der Calandriden.

Von Chr. Aurivillius.

[Meddeladt d. 10 Juni 1891 genom G. Lindström.]

Nachdem ich neulich von D:r O. Staudinger eine Sammlung zu dieser Gruppe gehöriger Formen aus Gabun empfangen und dieselben zu bestimmen versucht habe, sah ich bald die Nothwendigkeit ein, neue Gattungen aufzustellen und die alten besser zu begrenzen, und liefere darum nun folgenden Versuch diesem Mangel abzuhelfen.

Die mit *Oxyopisthen* verwandten Gattungen sind alle durch das verlängerte, wagerecht oder beinahe wagerecht vorstehende Pygidium, die geraden, vorgestreckten Fühler und die ganz oder zum grössten Theil chitinisirte Fühlerkeule ausgezeichnet.

Conspectus generum.

A. Tarsorum articulus tertius maximus, 1:o et 2:o simul sumtis numquam brevior, late obovatus, apice plus minus profunde *fissus*, infra totus spongiosus; articulus quartus parvus, 3:o semper brevior eumque parum vel modice tantum superans. Unguiculi parvi, basi plus minus connati. Scutellum parvum, sublineare, interstitio 2:o elytrorum angustius. Oculi infra sat late, circiter rostri latitudine separati.

α. Tarsorum articulus ultimus *pone* medium articuli 3:ii insertus. Elytra apice recte truncata. Pars tomentosa clavæ antennarum a latere clavæ visibilis. Femora po-

stica valde elongata, tibiis fere duplo longiora. Pygidium distincte carinatum.

*. Prothorax in medio marginis postici spina longa, depressa, scutellum obtegente armatus. Unum saltem interstitiorum elytrorum costatum. Femora inermia.

1. *Oxyopisthen* THOMS.

**. Prothorax postice rotundatus, inermis. Interstitia elytrorum numquam costata. Femora subtus dentata. Stria 10:a elytrorum abbreviata.

2. *Ichthyopisthen* n. gen.[1])

β. Tarsorum articulus ultimus *in medio* aut *ante* medium articuli 3:ii insertus. Elytra apice ad suturam plus minus profunde emarginata. Pars tomentosa clavæ antennarum a latere clavæ inconspicua. Femora postica modice elongata, inermia. Pygidium convexum, obsolete carinatum.

*. Rostrum tenue, subcylindricum, subrectum, nudum. Antennæ in lateribus frontis protuberantis ad oculos insertæ, rostrum longitudine æquantes.

3. *Haplorrhynchus* AUR.

**. Rostrum crassum, subcompressum, arcuatum, infra dense hirsutum. Antennæ sat longe ultra rostri basin insertæ, breves, apicem rostri haud attingentes; scapus clavâ fere brevior, oculos haud attingens.

4. *Cyrtopisthen* n. gen.

B. Tarsorum articulus tertius suborbicularis, *integer*, supra versus apicem excavatus, infra spongiosus linea media nuda; articulus ultimus elongatus 3:o plus duplo longior. Unguiculi mediocres, liberi.[2]) Scutellum triangulare, elytrorum interstitio 2:o latius. Oculi infra subcontigui. Prothorax supra basi utrinque sinuatus et medio late lobatus. Pygidium

---

[1]) Die mir in der Natur unbekannte Gattung *Anoxyopisthen* KOLBE ist wahrscheinlich mit *Ichthyopisthen* nahe verwandt, aber wenigstens durch den nicht abgekürzten zehnten Streif der Flügeldecken verschieden.

[2]) Die folgenden Kennzeichen passen auf die neue Art; PASCOE erwähnt sie nicht.

apice subdepressum et anguste rotundatum. Elytra apice subtruncato-rotundata. 5. *Stenophida* PASCOE.

Oxyopisthen

THOMSON Archiv. Ent. II, 1858 p. 141. — LACORDAIRE Gen. des Col. VII p. 282.

1. *O. funebre* ILLIGER Magas. I, 1802 p. 177 = funerarium THOMSON[1]) Arch. Ent. II p. 142. Sierra Leona, Gabun.
2. *O. Westermanni* AURIV. Ent. Tidskrift 7, 1886 p. 97. Guinea.

Ichthyopisthen n. gen.

ιχθύς piscis; ὄπισθεν postice.

Generi præcedenti affine, sed corpore multo angustiore, sublineari, prothorace postice rotundato, inermi, femoribus subtus dente armatis pygidioque magis elongato facillime distinctum. Stria 10:a elytrorum in omnibus mihi cognitis speciebus ante basin abdominis desinit.

Die mir bekannten Arten können durch folgende Kennzeichen leicht unterschieden werden.

A. Tibiæ posticæ intus omnino rectæ, inermes, brevissime ciliatæ. Prothorax supra deplanatus.
  α. Corpus unicolor, nigrum.
    *. Segmentum primum abdominis utrinque ad marginem elytrorum macula rotundata niveo-hirta, haud micante ornatum; episterna metathoracis nitida, nuda. Antennæ apicem rostri haud attingentes. Pygidium dorso convexum et emarginatum (fig. 1). *I. bimaculatum.*
    **. Segmentum primum abdominis utrinque et episterna metathoracis linea albosericeo-micante ornata. Antennæ rostri longitudinem æqvantes. Pygidium dorso omnino rectum (fig. 2). *I. albolineatum.*

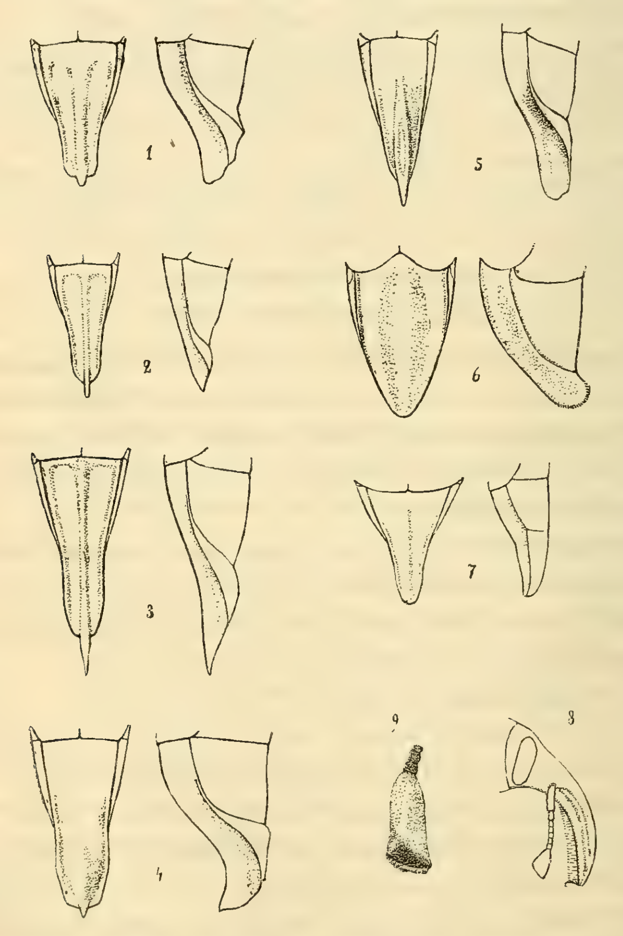
---

[1]) Der Verf. beschreibt den langen Dorn am Hinterrande des Halsschildes als Scutellum!!

β. Femora (basi apiceque nigris exceptis) aurantiaca; corpus præterea nigrum lateribus nudis, nitidis, haud albo-maculatis. Pygidium vide fig. 3. *I. rufofemoratum.*

B. Tibiæ posticæ intus plus minus emarginatæ et dente armatæ.

α. Femora (apice excepto), tibiæ anteriores maximam par-



tem, clavaque elongata antennarum (fig. 9) aurantiaca. Prothorax supra deplanatus. Segmentum primum abdominis utrinque macula nivea, valde sericeo-micante instructum. Antennæ rostrum fere superantes. Tibiæ posticæ in lateribus omnino læves, intus prope basin dentatæ. *I. rufoclavatum.*

β. Femora apice excepto rufa, corpus præterea nigrum. Prothorax transversim æqualiter leviter convexus. Antennæ rostro multó breviores. Apex pygidii (fig. 5) valde compressus desuper visus acutissimus, a latere visus obtuse rotundatus. Tibiæ posticæ in lateribus sulcatæ, intus in medio dentatæ. *I. convexicolle.*

1. *I. bimaculatum* n. sp. Gabun.
2. *I. albolineatum* n. sp. »
3. *I. rufofemoratum* THOMSON Archiv Ent. II, 1852 p. 142. Gabun.
4. *I. rufoclavatum* n. sp. »
5. *I. deplanatum* ROELOFS Notes Leyden Museum 13, 1891 p. 116. Niam-Niam.
6. *I. pygidiale* SIMPSON The story of the Rear Column of the Emin Pascha Relief Expedition. 1890 p. 425. (2 species?). Africa centr.
7. *I. convexicolle* n. sp. Africa.

I.? Büttikoferi ROELOFS[1]) Notes Leyden Museum 13. 1891 p. 118. Liberia.

Ichthyopisthen bimaculatum n. sp. — Elongatum, subparallelum, nitidum, undique omnino nigrum segmento primo abdominis utrinque macula parva rotundata niveo-lanuginosa; antennis rostro brevioribus clava compressa trigona, parte quarta apicali spongiosa; prothorace supra in medio præsertim versus basin valde depresso et dense fortiter punctato; elytris subparallelis, profunde striatis striis 3—8 punctatis, interstitiis nitidis, subplanis, interstitiis 4—7 pone medium impressione profunda, transversa instructis; pygidio (fig. 1) elongato-conico, undique punctato, carina media sat obtusa apice quam carinis lateralibus longius producta, dorso pygidii a latere viso (fig. 1) ad basin convexo,

---

[1]) Ob diese Art ein wirkliches *Ichthyopisthen* ist, wage ich nach der Beschreibung nicht zu entscheiden. »La base du prothorax, qui est prèsque droite» passt auf keine der mir bekannten Arten.

deinde emarginato, apice vix recurvo: prosterno rude punctato, meso- et metasterno pedibusque obsolete punctulatis, abdomine sparsim punctato; femoribus anterioribus infra tibiisque intus brevissime obscure ciliatis, femoribus posticis medium pygidii paullo superantibus, curvatis, infra fere nudis; tibiis utrinque lævibus. — Long. corporis (rostro excl.) 14‴, lat. max. ad humeros 3,75‴.

Patria: Gabun. — Museum Holmiense.

Ichthyopisthen albolineatum n. sp. — Elongatum, nitidum, unicolor, nigrum; macula rotundata epimerorum metathoracis, macula elongata in episternis metathoracis nec non linea in lateribus segmenti 1:i abdominis niveo-sericeis, micantibus; antennis rostro haud brevioribus, clava compressa trigona, parte spongiosa brevissima; prothorace supra plano, dense punctato, linea angusta media utrinque abbreviata impressa; elytris profunde striatis, striis exterioribus punctatis, interstitiis subconvexis, 2—5 pone medium transversim leviter impressis; pygidio (fig. 2) elongato-conico, punctato, carina media alta, acuta, apice ultra carinas laterales longe producta, a latere visa (fig. 2) omnino recta; prosterno fortiter punctato, meso- et metasterno pedibusque obsolete punctatis; abdomine sparsim sat profunde punctato; femoribus infra, tibiisque intus brevissime obscure ciliatis, tibiis utrinque lævibus (haud sulcatis). — Long. corporis 12‴, lat. max. (ad humeros) 3‴.

Patria: Gabun. — Museum Holmiense.

Der vorhergehenden Art in Farbe und Sculptur sehr ähnlich, aber durch die längeren Fühler, deren Keule nur an der äussersten Spitze schwammartig ist, durch die eingedrückte Rückenlinie des Halsschildes, durch die gefleckten Seiten der Mittel- und Hinterbrust und durch das ganz anders gebildete Pygidium sofort zu unterscheiden.

Ichthyopisthen rufoclavatum n. sp. — Elongatum, nigrum, nitidum, femoribus (apice nigro excepto), tibiis anticis et intermediis medio plus minus clavaque cornea antennarum (summo apice nigro excepto) aurantiacis; segmento 1:o abdominis utrinque

macula niveo-sericea ornato; rostro parum arcuato apice supra carinato et dense punctulato quam antennis paullulo breviore; scapo, funiculo clavaque antennarum inter se fere æque longis; clava (fig. 9) valde elongata et compressa apice incrassato et paullulum torto; prothorace supra medio deplanato et dense rude punctato linea media utrinque abbreviata, elevata, angustissima, lateribus minus dense punctato; elytris elongatis, profunde striatis, apice fere omnino recte truncatis, interstitiis leviter convexis, striis 1—4 obsolete, 5—8 fortiter punctatis, interstitiis 5—7 pone medium plus minus transversim rugosis; pygidio (fig. 4) modice elongato, basi valde convexo, haud carinato, apice paullulum recurvo carina acuta instructo, undique dense fortiter punctato; femoribus infra ante dentem rufo-ciliatis, anterioribus ipso apice, posticis parte apicali usque ad dentem nigris; tibiis posticis intus prope basin dente valido armatis, utrinque lævibus nitidis, obsolete punctulatis; articulo primo tarsorum posticorum subtus processu magno vomeriformi armato. — Long. corporis (rostro excl.) 17''', lat. max. (ad humeros) 4,3'''.

Patria: Gabun. — Museum Holmiense.

Durch die sehr verlängerte, gelbrothe Fühlerkeule leicht kenntlich. *I. deplanatum* ROEL., welches schwarze Fühlerkeule hat, muss eine nahe verwandte Art sein.

Ichthyopisthen convexicolle n. sp. — Valde elongatum, nigrum, undique (elytris exceptis) punctis, sæpissime setis vel squamis brevissimis gerentibus, obsitum; femoribus anterioribus (apice nigro excepto), dimidia parte basali femorum posticorum maculaque interna tibiarum anticarum corallino-rubra; rostro subcylindrico, parum arcuato, lateribus ante medium sulcatis, supra apice lineis duabus elevatis sulcum includentibus instructum; antennis subbasalibus, rostro brevioribus, clava nigra, trigona, quam dimidio funiculi haud longiore; prothorace valde conico-elongato, quam latitudine basali fere duplo longiore, undique densissime profunde punctato, linea elevata dorsali utrinque abbreviata nitida, supra leviter convexo, haud depresso; elytris elongatis, subparallelis, apice recte truncatis, profunde striatis, striis 5—8 distincte punc-

tatis, interstitiis subplanis uniseriatim leviter punctulatis, 5—7 medio transversim rugosis; pygidio (fig. 5) elongato, basi punctato, apicem versus fere lævi, supra medio carina lata apicem versus deplanata, quasi duplici instructo, ipso apice valde compresso, apice a latere viso (fig. 5) obtuse rotundato carinis lateralibus usque ad apicem continuatis; pectore profunde punctato punctis præsertim in episternis metathoracis silaceo-squamosis; femoribus profunde punctatis, infra ante dentem rufociliatis, posticis longissimis pygidii apicem fere attingentibus; tibiis posticis intus longe ochraceo-ciliatis et in medio dentatis, utrinque sulco punctato exsculptis. — Long. corporis (rostro excl.) 15‴, lat. max. (ad humeros) 3‴.

Patria: Africa (Coll. Chevrolat) — Museum Holmiense.

Diese Art steht in Chevrolats Sammlung als *O. rufofemoratum* THOMSON, was doch gewiss nicht richtig ist, denn THOMSONS Beschreibung passt nicht auf *convexicolle*, sondern dagegen recht gut auf eine andere von mir in der Uebersicht aufgenommene Art, von der ich mehrere Stücke aus Gabun erhielt und deren Pygidium ich in Figur 3 (s. 364) abgebildet habe.

Anoxyopisthen

KOLBE Stettin. Ent. Zeit. 50, 1889 p. 131.

1. *A. Büttneri* KOLBE l. c. S:t Salvador.

Genus novum?

1. »*Oxyopisthen*» *vittatum* ROELOFS Notes Leyden Museum 13, 1891 p. 119. Congo.

   Durch »la massue des antennes peu élargie vers le bout, presque cylindrique» weicht diese Art von allen übrigen ab und möchte als der Typus einer neuen Gattung aufzustellen sein.

2. »*Oxyopisthen*» *linea alba* THOMSON Archiv Ent. II, 1852 p. 143. Gabun.

   Nach der sehr mangelhaften Beschreibung, in welcher der Verfasser weder der Beine noch der Fühler Erwähnung thut, ist die generische Stellung dieser Art gar nicht zu ent-

räthseln. In der Zeichnung muss sie dem *vittatum* ROEL. sehr ähnlich sein.

Haplorrhynchus

AURIVILLIUS Ent. Tidskrift 7, 1886 p. 95.

1. *H. Valdaui* AURIVILLIUS l. c. p. 96 Camerun, Gabun.

Cyrtopisthen n. gen.

κυρτός convexus; *ὄπισθεν* postice.

Rostrum crassum, arcuatum, subcompressum, basi qvam apice multo crassius, ultra medium utrinque bisulcatum, scrobibus foveiformibus. — Antennæ ad finem primæ tertiæ partis rostri insertæ, rectæ, breves, rostri apicem haud attingentes; scapus brevis oculos haud attingens, subcylindricus; funiculus 6-articulatus, scapo fere duplo longior, articulis subquadratis compositus; clava ut in genere *Haplorrhynchus* formata. — Oculi supra spatio rostri latitudinem æquante separati. — Pygidium supra obtusissime longitudinaliter elevatum. — Epimera metathoracis minuta, subtrigona. — Tibiæ posticæ intus levissime tantum emarginatæ. — Cætera omnia ut in genere *Haplorrhynchus* AURIV.

Wenn mann das ganz verschiedene Rostrum und die Fühler nicht in Betrachtung nimmt, ist diese Gattung in allem Uebrigen und im ganzen Habitus so nahe mit *Haplorrhynchus* verwandt, dass mann beinahe an geschlechtliche Unterschiede zu denken versucht wäre.

1. *C. rubicundum* n. sp. Atro-brunneum elytris dilutioribus rubidis; lateribus prothoracis, interstitiis 2:o et 3:o elytrorum ad basin et in medio corporeque toto subtus pruina flavescente indutis, pygidio pedibusque subnudis; rostro (fig. 8) pone insertionem antennarum infra dense fulvo-ciliato et apice subtus processu cylindrico dependente instructo, supra punctulato et linea impressa longitudinali instructo; capite dense punctato; prothorace supra nitido, leviter convexo, medio dense, versus latera sparsius punctato, postice rotundato; elytris elongatis, dorso subplanis,

striatis, striis exterioribus leviter punctatis, interstitiis leviter punctulatis, apice singulis obtuse rotundatis et ad suturam conjunctim profunde emarginatis; pygidio (fig. 6) convexo, leviter punctato; pedibus punctatis. — Long. corporis 17‴, lat. max. (ad humeros) 4,7‴.

Patria: Gabun. — Museum Holmiense.

Stenophida

PASCOE Journ. Linn. Soc. 19, 1886 p. 336.

1. *S. linearis* PASCOE l. c. p. 336. Mamboia.
2. *S. trilineata* n. sp. Gabun.

Stenophida trilineata n. sp. Atra, opaca rostro nitido, prothorace supra vittis tribus albo-tomentosis, lateralibus ad latera corporis usque ad apicem pygidii continuatis, epimera mesothoracis et episterna epimeraque metathoracis tota tegentibus, vitta media antice abbreviata, postice vero per scutellum usque ad medium elytrorum in interstitiis primis prolongata; rostro omnino cylindrico, basi paullum incrassato, supra per totam longitudinem tenue sulcato, sparsim punctulato; antennis subbasalibus, rostro vix brevioribus, scapo funiculoque inter se fere æque longis, clava quam funiculo fere duplo breviore, elongato-trigona basi punctata et opaca, apice nitida; capite punctulato; prothorace conico, apicem versus sensim angustato, apice quam basi duplo angustiore, latitudine basali parum longiore, supra in parte postica fortiter deplanato, supra sparsim, in lateribus densius punctato; scutello cordiformi, toto niveo; elytris basi prothorace paullo latioribus, apicem versus modice angustatis, quam latitudine basali haud duplo longioribus, apice conjunctim subtruncato-rotundatis, supra leviter convexis, minus profunde punctulato-striatis, stria 10:a abbreviata seriato-punctata, interstitiis subplanis, sexto longe ante apicem abbreviato; pygidio (fig. 7) subdepresso, triangulari, punctato, supra medio fere a basi costato, lateribus elevato-marginato, dorso a latere viso in altero sexu (fig. 7) in medio angulato-depresso, in altero omnino recto; corpore subtus cum femo-

ribus sparsim punctato, punctis in fundo indumento griseo plus minus repletis; femoribus infra nunc omnibus subnudis nunc anterioribus dense rufo-ciliatis (differentia sexual.?); tibiis rectis, intus haud emarginatis, inermibus, quam femoribus haud multo brevioribus, in latere exteriore serie impressa punctorum instructis. — Long. corporis (rostro excl.) 10‴—17‴, lat. max. (ad humeros) 3‴—5,5‴.

Patria: Gabun. — Museum Holmiense.

So weit PASCOE's Beschreibung der Gattung *Stenophida* geht, passt sie sehr gut auf diese Art. Es ist jedoch nicht unmöglich, dass ein genauerer Vergleich der beiden Arten grössere Differenzen aufdecken kann, und darum habe ich in der Gattungsübersicht die von PASCOE angegebenen Kennzeichen von denen, die ich nur der neuen Art entnommen habe, getrennt angeführt.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts. från sid. 360.)

Berlin. *K. Akademie der Wissenschaften.*
JACOBI, C. G. J., Gesammelte Werke. Bd. 6, hrsg. von K. Weierstrass. 1891. 4:o.
— *K. Preussisches geodätisches Institut.*
Veröffentlichungen. — Das Berliner Basisnetz 1885—1887. 1891. 4:o.
— *Centralbureau der Internationalen Erdmessung.*
Verhandlungen der [10:n] Conferenz der permanenten Commission der Internationalen Erdmessung, abgehalten 1890 zu Freiburg i/B. Berlin 1891. 4:o.
Bologna. *R. Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna.*
Memorie. (4) T. 10. 1889. 4:o.
» Indici generali della serie 4. 1890. 4:o.
Del meridiano iniziale e della ora universale. Bologna 1890. 8:o.
Bremen. *Naturwissenschaftlicher Verein.*
Abhandlungen. Bd. 12: H. 1. 1891. 8:o.
Brünn. *Naturforschender Verein.*
Verhandlungen. Bd. 28 (1889). 8:o.
Bericht der Meteorologischen Commission des Vereines. 8 (1888). 8:o.
Bruxelles. *Société malacologique.*
Annales. T. 24 (1889). 8:o.
Procès-verbaux. T. 18 (1889): P. 133–214; 19 (1890): 1–88. 8:o.
Budapest. *K. Ungarische Geologische Anstalt.*
Földtani Közlöny. — Geologische Mittheilungen. K. 21 (1891): F. 1–3. 8:o.
Mittheilungen aus dem Jahrbuche. Bd. 9: H. 3–5. 1891. 8:o.
Jahresbericht. Jahr 1889. 8:o.
Calcutta. *Government of India.*
Account of the operations of the great trigonometrical survey of India. Vol. 11—13. Dehra Dun 1890. 4:o.
Scientific results of the second Yarkand mission: Coleoptera. Calcutta 1890. 4:o.
Cambridge. *Philosophical Society.*
Transactions. Vol. 15: P. 1. 1891. 4:o.
Proceedings. Vol. 7: P. 2. 1890. 8:o.
Edinburgh. *Botanical society.*
Transactions and proceedings. Vol. 18—19: S. 1–87. 1891. 8:o.
Glasgow. *Geological Society.*
Transactions. Vol. 9: P. 1 (1888/90). 8:o.
Göttingen. *K. Gesellschaft der Wissenschaften.*
Abhandlungen. Bd. 36 (1889—90). 4:o.
Nachrichten. Jahr 1890. 8:o.
Gelehrte Anzeigen. Jahr 1890: Bd. 1—2. 8:o.

(Forts. å sid. 380).

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1891. N:o 6.
Stockholm.

L'intensité de la radiation des gaz sous l'influence de la décharge électrique

Note préliminaire

Par KNUT ÅNGSTRÖM

[Communiquée le 10 Juin 1891 par K. B. HASSELBERG.]

Les phénomènes intéressants, quoique encore en majeure partie non expliqués, qui accompagnent la décharge électrique à travers les gaz raréfiés, ont été, dans les derniers temps, l'objet des recherches répétées des opticiens aussi bien que des électriciens. La relation quantitative entre les phénomènes optiques et électriques n'a toutefois été que très peu étudiée. Or, ce n'est qu'après une connaissance plus parfaite de cette relation, que l'on peut espérer de bien comprendre et de bien expliquer l'origine et la nature de la radiation que nous observons dans les tubes de Geissler, de même que le rôle que joue l'électricité dans ces phénomènes remarquables.

Des recherches calorimétriques sur le développement de la chaleur dans les tubes de Geissler ont été faites par M. E. WIEDEMANN[1]) et par M. B. HASSELBERG[2]). De plus, M. G. STAUB[3]) a récemment fait quelques expériences sur le développement de la chaleur à la décharge des bouteilles de Leyde par des tubes de Geissler remplis d'air et d'hydrogène; en même temps, il a cherché à déterminer la relation entre la radiation obscure et la radiation lumineuse. Dans ce but, il a enfermé le tube

[1]) WIED. Ann. *6*, 298, 1879 et *10*, 202, 1880.

[2]) Mém. de l'Acad. Imp. des sciences de St.-Pétersbourg, *27*, N:o 1, 1879.

[3]) Inaugural-Dissert., Theil 2, Zürich, 1890.

dans un calorimètre de glace de Bunsen, où le tube et le calorimètre ont successivement transmis ou absorbé la radiation lumineuse; dans le dernier cas le tube était noirci.

Ce qui a été déterminé dans ces expériences, n'est toutefois pas seulement l'énergie totale, absorbée par le gaz pour la rayonner ensuite, mais aussi l'énergie qu'ont reçue directement les parois des tubes et qu'ils ont transformée en chaleur. Quelque valeur qu'aient ces recherches, elles ne donnent cependant pas une réponse directe à la question de la radiation du gaz sous l'action de la décharge électrique. Une détermination directe de l'intensité de cette quantité n'a, que je sache, pas encore été effectuée, et la possibilité d'une détermination pareille à l'aide des ressources actuelles a même été mise en question. J'ai par cette raison essayé d'employer le bolomètre pour déterminer la radiation, sous l'action du courant électrique, de gaz différents à l'état raréfié, d'exprimer l'intensité de cette radiation en mesures absolues, et de chercher à déterminer ensuite la relation entre la radiation et les causes électriques qui la produisent.

Après avoir travaillé plus d'un an à cette recherche très ardue, je crois pouvoir regarder comme terminées au moins les premières expériences d'orientation. Je vais donc exposer ici quelques-uns des résultats auxquels je suis arrivé, pour traiter bientôt plus à fond le matériel d'observation que j'ai recueilli.

II. La lumière de la cathode étant beaucoup trop faible et sa configuration du reste trop variable pour que je pusse espérer d'en obtenir des résultats quantitatifs bien nets, je me suis restreint à étudier seulement la lumière positive.

Pour tubes à décharge, j'ai employé des tubes de verre cylindriques, d'épaisseur égale et du diamètre de 10—15 mm. Les électrodes étaient ordinairement placées dans des tubes latéraux, formant angle droit avec le tube principal. L'un des bouts, et quelquefois les deux bouts du tube à décharge étaient toujours fermés par une lame polie de sel gemme à faces parallèles, fixée hermétiquement au tube par le moyen de silicate de soude. Dans l'axe du tube était placé un bolomètre sensible, séparé de ce

dernier par un écran double, avec ouvertures circulaires dans la direction de l'axe du tube. Entre les parois de l'écran se trouvait un autre petit écran double et mobile.

Les indications du bolomètre furent comparées avec l'un de mes instruments pour la détermination de la chaleur rayonnante en mesures absolues[1]). Je constatai de la sorte, qu'une division d'échelle correspondait à une radiation de 278 (10^{-9}) gr. calories par seconde et par centimètre carré.

Pour constater si et combien le caractère de la radiation change avec les conditions différentes du gaz, j'ai mesuré d'un côté la radiation totale, de l'autre la radiation transmise par une lame d'alun de 3,95 mm d'épaisseur. La radiation déterminée par les observations directes, se compose de deux parties, savoir la radiation du gaz, et celle des parois plus ou moins chauffées du tube. La dernière partie doit être éliminée, ce qui s'opère par une série d'observations de la radiation du tube après que le courant électrique a été interrompu. De la courbe de refroidissement ainsi trouvée, il est facile de calculer la radiation du tube pendant l'expérience, et en soustrayant cette quantité de la quantité observée pendant le passage du courant, on trouve la radiation du gaz. Toutefois cette valeur est augmentée par réflexion des parois du tube de décharge, et de l'autre côté diminuée par la réflexion de la lame de sel gemme fermant le tube. — Des expériences directes, dont je supprime ici les détails, m'ont permis de corriger cette réflexion d'une manière satisfaisante, et de déterminer par suite la radiation actuelle en mesures absolues.

Comme source d'électricité j'ai principalement employé un accumulateur de 800 éléments, modèle Planté, mais aussi une bobine de Ruhmkorff de grandeur moyenne. Le courant fut déterminé par un galvanomètre à réflexion apériodique et à fil isolé par du caoutchouc. La différence du potentiel entre deux points dans la lumière positive fut mesurée au moyen de deux fils minces

[1]) Acta Reg. Soc. Upsal., Ser. III. 1886. Voir aussi: Öfversigt af Kongl. Vet.-Akad. Förhandl., N:o 6, 379, 1888.

de platine, soudés dans le tube à décharge, et mis en communication avec un électromètre à quadrants, modèle Mascart.

Pour évacuer les tubes, je me suis d'abord servi d'une pompe à mercure de Bessel-Hagen, et dans les dernières expériences, d'une pompe d'après le principe de Sprengel, modifié comme l'a proposé M. PRYTZ[1]), puis légèrement perfectionné par moi.

Je n'ai épargné aucune peine pour rendre les gaz examinés aussi purs que possible. Ainsi, ni robinets, ni tubes de caoutchouc, ni suif, aussi peu à la préparation des gaz qu'aux points de réunion du tube à décharge avec la pompe pneumatique. Pour introduire les gaz dans le tube à décharge, pour les dessécher et empècher l'entrée de la vapeur de mercure dans le tube, je me suis servi de la méthode indiquée par M. CORNU[2]), après l'avoir quelque peu modifiée pour mon but. Mes recherches ont porté sur l'oxygène et l'hydrogène, développés par électrolyse d'eau pure oxidulée par l'acide phosphorique, sur l'azote, produit en conduisant l'air pur privé d'acide carbonique sur le cuivre incandescent (réduit d'abord par l'hydrogène) et sur l'oxyde de carbone, produit par le chauffage de l'acide sulfurique et de l'acide oxalique, et purifié en le faisant passer à travers une solution de potasse.

III. Je donne ici le résumé des résultats les plus importants de cette recherche.

1. *Pour une pression déterminée*, le gaz dans des conditions données, *la radiation de la lumière positive est proportionnelle à l'intensité du courant électrique.* Il est vrai qu'en employant des courants à grande intensité, on peut observer de petits écarts de cette loi, mais en ce cas il sont toujours accompagnés d'une altération permanente du gaz, de sorte qu'on ne retrouve plus le même rayonnement pour les courants moins forts.

2. Si l'on maintient le courant électrique constant, et que l'on varie la pression du gaz, il semble *que l'intensité du rayonnement total ne varie guère entre les limites de pression de* 0,1—

---

1) WIED. Ann. *62*, 191, 1891.

2) Journal de Physique, *5*, 100 et 341, 1886.

1,5 *mm mais, qu'elle augmente un peu à de plus hautes pressions.* A des pressions dépassant 1,5 mm, le caractère de la décharge électrique semble se modifier, après quoi le rayonnement augmente considérablement avec la pression (toutefois après avoir, du moins dans certains cas, passé par un minimum).

3. *Pour un même gaz sous la même pression, la composition du rayonnement est constante, et ne dépend pas de l'intensité du courant électrique.* Cela toutefois avec la réserve indiquée sous 1.

4. *Quand la densité du gaz change, la composition du rayonnement change aussi, en ce que le rapport entre l'intensité du rayonnement des longueurs d'onde plus courtes et celle du rayonnement total décroît avec l'augmentation de la pression.*

Ce rapport, indiqué dans mes expériences par la relation entre l'intensité du rayonnement transmis par une lame d'alun et celle du rayonnement total, varie par exemple, entre les limites de pression de 0,1—1,6 mm, pour l'oxyde de carbone de 46 %—15 % et pour l'azote de 94 %—60 %.

5. On voit par ces chiffres, que le rapport entre le rayonnement lumineux et le rayonnement total s'élève à des valeurs considérables pour de très basses pressions, valeurs bien plus grandes que celles de nos sources lumineuses ordinaires. Ce rapport ne monte pourtant pas toujours à de si grandes valeurs à la décharge électrique par les gaz raréfiés. Déjà à des pressions de 5—10 mm il est assez petit.

6. L'intensité du rayonnement total varie beaucoup pour des gaz différents. Elle ne se trouve pas dans un rapport simple avec le poids moléculaire de la substance aussi peu qu'avec la différence du potentiel dans la couche du gaz rayonnant. Elle ne paraît dépendre non plus essentiellement de l'absorption du gaz à la pression et à la température ordinaires, ni quant à son intensité ni par rapport à sa composition[1]), comme on peut le voir par le petit

[1]) Sur l'absorption des gaz, voir les travaux de l'auteur: »Bihang till K. Svenska Vet.-Akad.» *15*, N:o 9, 1889, et Öfversigt af K. Vet.-Akad. Förhandlingar, N:o 9, 549, 1889 et N:o 7, 331, 1890.

tableau suivant, contenant les valeurs relatives du rayonnement et de la différence de potentiel pour une pression de 0,7 mm et pour la même intensité du courant électrique.

Gaz.	Radiation		Différence de potentiel.
	totale.	transmise par l'alun.	
Oxygène	c. 1,0	—	17
Hydrogène	5,9	2,3	19
Azote	30,0	27,4	25
Oxyde de carbone	13,0	3,8	27

IV. Quand il s'agit des basses pressions, il me semble que l'on peut donner l'explication suivante de ces phénomènes:

Quand le gaz raréfié devient conducteur d'un courant électrique, ce sont principalement les molécules qui servent à transporter l'électricité, c.-à-d. les molécules actives, qui rayonnent. Le nombre de ces molécules est proportionnel à la quantité d'électricité transmise, et une certaine quantité d'énergie est transformée en radiation dans chaque molécule. Cette radiation est donc proportionnelle à l'intensité du courant et ne varie que peu avec les variations de la pression, tant que la décharge garde son caractère (III, 1 et 2). Ce rayonnement est d'une nature irrégulière, selon M. R. v. HELMHOLTZ[1]), ou il appartient à la classe des phénomènes auxquels M. E. WIEDEMANN[2]) a donné le nom de *phénomènes de luminescence*, en ceci que la composition du rayonnement ne correspond pas avec la température du gaz. Le rayonnement peut donc être d'une extrême intensité dans les groupes de longueurs d'onde courtes.

Quand la pression augmente et avec elle le nombre de molécules inactives, le rayonnement irrégulier des molécules actives peut plus facilement être transmis aux premières. Le nombre des molécules rayonnantes augmente donc, et par conséquent

[1]) »Die Licht und Wärmestrahlung verbrennender Gase», Berlin 1890.

[2]) WIED. Ann. *37*, 177, 1889.

aussi le rayonnement du gaz, mais il change de caractère, en ce que le rayonnement des groupes de longueurs d'onde plus courtes diminue relativement (III, 2—6).

La description plus détaillée des expériences, avec un résumé plus complet des observations et le développement des conclusions qu'on en peut tirer, sera publiée dans un prochain travail.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts. fr. sid. 372.)

Hamburg. *Deutsche Seewarte.*
Katalog der Bibliothek. 1890. 8:o.
Harlem. *Société Hollandaise des sciences.*
Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles. T. 24 (1890/91): L. 1—5. 8:o.
— *Teyler's tweede Genootschap.*
Archives du Musée Teyler. (2) Vol. 3: P. 5. 1890. 4:o.
Helsingfors. *Société Finno-Ougrienne.*
Journal. 9. 1891. 8:o.
Kiel. *Naturwissenschaftlicher Verein für Schleswig-Holstein.*
Schriften. Bd. 8: H. 2. 1891. 8:o.
Leiden. *Nederlandsch Botanisch Vereeniging.*
Kruidkundig Archief. (2) D. 5: St. 2. 1891. 8:o.
Leipzig. *K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften.*
Abhandlungen. Bd. 26: N:o 3; 28: 1—2; 29: 1—4. 1890—91. st. 8:o.
= » Math.-Phys. Classe. Bd. 16: 3; 17: 1—4.
= » Philol.-Hist. » 12: 1—2.
Berichte über die Verhandlungen:
Math.-Phys. Classe. Bd. 42 (1890): 2—4. 8:o.
Philol.-Hist. » » 42 (1890): 1—3. 8:o.
— *Deutsche Astronomische Gesellschaft.*
Vierteljahrsschrift. Jahrg. 25 (1890): H. 1—4. 8:o.
Catalog. Abth. 1: St. 3. 1890. 4:o.
— *Verein für Erdkunde.*
Mitteilungen. Jahr 1890. 8:o.
Lisboa. *Academia R. das Sciencias.*
RAMOS-COELHO, J., Historia do infante D. Duarte. T. 1—2. 1889—90. 8:o.
London. *British museum.*
WOODWARD, A. S., Catalogue of fossil fishes. P. 2. 1890. 8:o.
SMITH, F., » » British Hymenoptera. P. 1. Andrenidæ and Apidæ. New issue. 1891. 8:o.
FORD, A. J., » » fossil Cephalopoda. P. 2. 1891. 8:o.
— **(Ontario.)** *Entomological society of Ontario.*
Annual report. 22 (1890). 8:o.
— *Fruit growers' association.*
Annual report. 22 (1890). 8:o.
Marseille. *Musée d'histoire naturelle.*
Annales. Zoologie. T. 3. Travaux du laboratoire de zoologie marine 1886/1889. 1889. 4:o.
Melbourne. *R. Geographical Society of Australasia, Victorian branch.*
Transactions. Vol. 8: P. 1—2. 1890—91. 8:o.

(Forts. å sid. 392.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1891. N:o 6.
Stockholm.

Jämförelse mellan Ångströms och Neumanns metoder för bestämning af kroppars ledningsförmåga för värme.

Af K. L. Hagström.

[Meddeladt den 10 Juni 1891 genom T. R. Thalén.]

II. Experimentella undersökningar.

B. Enligt Neumanns metod.

Experimentella anordningar.

I en föregående uppsats[1]) har jag redogjort för metoden och lösningen af differentialekvationerna.

De experimentella anordningarne vid mina försök voro följande. Den ring, hvars värmeledningsförmåga skulle bestämmas, placerades horisontelt, understödd i tre punkter af vertikala, i ändarne tillspetsade stöttor. — Upphettningen skedde genom en Bunsens brännare med liten låga. Brännaren placerades under en punkt af ringen (skarfven), och försågs med skorsten af järnbleck, som omfattade ringen. För att hindra strålning omgafs denna skorsten med ett omhölje af papp. — På de ställen af ringen, där temperaturerna skulle observeras, voro hål af 1 till $1^1/_2$ mm vidd borrade till midten af ringens tjocklek. Dessa hål fyldes till en del med kvicksilfver, och i kvicksilfret nerstuckos de tillspetsade ändarna af järn-nysilfver-elementen.

Upphettningen fick fortgå så länge (2 till 3 timmar), tills dess att galvanometrarne tillkännagåfvo konstant temperatur.

---

[1]) Öfversigt af K. Vet.-Akad. Förhandl. 1891, N:o 2, pag. 45.

Då släcktes lågan, skorstenen och brännaren aflägsnades, så att ringen blef fri och observationerna togo sin början. Galvanometrarne observerades omvexlande hvar tionde sekund, och omgifningens temperatur aflästes emellanåt på en termometer *B*, upphängd i ringens närhet. Nedre delen af denna termometer var genom ett cylinderformigt hölje af papper, som tillät luften fritt cirkulera, skyddad för strålning från den varma ringen. Efter 15 till 20 min. afbrötos observationerna för bestämning af galvanometrarnes nollpunkter, hvarefter observationerna stundom fortsattes ånyo. Härigenom blef hvarje observationsserie bestående af två till tre afdelningar med några minuters mellanrum. Observationerna i de senare afdelningarne blefvo dock på grund af de små variationerna tämligen osäkra.

Samma galvanometrar användes som vid ÅNGSTRÖMS metod. Ena lödställets temperatur var vid alla försöken 0°. Kontakten mellan järn-nysilfverelementen och ledningstrådarne till galvanometern förmedlades af klämskrufvar, nerstuckna i profrör af glas, som fyldes med paraffin och under försöken höllos nerbäddade i en låda med is. Komparation med samma termometer *A* som vid försöken enligt ÅNGSTRÖMS metod har gifvit följande formler:

$$u = [9.07148]g - [5.1052]g^2,$$
$$u = [9.11122]G - [5.84632]G^2 + [2.83813]G^3,$$

erhållna hvardera genom sex observationer mellan 22° och 60°, eller mellan 200—600 skaldelar. Skilnaden mellan observation och beräkning uppgår vid g till högst $^1/_4$ procent, vid G till $^1/_3$ procent, utom för 1 observation, för hvilken den går till nära 1 procent. Dessa formler ha tabulerats för helt tals värden på g och G.

Observationsmaterialets beräkning.

Galvanometerutslagen reduceras först till temperaturgrader efter den uppgjorda reduktionstabellen, och medeltal tagas af två och två på hvarandra följande temperaturer vid det från

värmekällan aflägsnaste observationsstället, där variationerna äro minst, för att få observationsvärden samtidiga med observationerna på det andra. Af dessa samtidiga temperaturer bildas summor och skilnader, summorna korrigeras genom subtraktion af dubbla temperaturen hos omgifningen, och man erhåller på detta sätt en serie af värden $v_1 + v_2$ och en dylik serie af $v_1 - v_2$, svarande mot ekvidistanta värden på tiden. På dessa serier skola nu ekvationerna (33), sid. 67, eller, om så ske kan, ekvationerna (40), sid. 72, tillämpas.

I det följande äro anförda två af mina försök med NEUMANNS metod, det ena på en ring af, enligt uppgift, engelsk koppar, böjd af ett stycke af samma runda stång, som användes vid försök 2, ÅNGSTRÖMS metod, det andra på en ring af mindre tjocklek än den förra, äfven den af engelsk koppar. Ytan hos de båda ringarne hade icke undergått annan behandling, än att den putsats blank med smärgelpapper.

Den förra ringens omkrets är 123.45 cm, tjockleken i ringplanet = 2.258 cm och vinkelrätt däremot 2.268 cm. Härur beräknas medelradien = 18.52 cm samt genomskärningsarean dividerad med omkretsen $= \frac{q}{p} = [9.7526] = 0.5657$ cm.

För den senare ringen gäller: yttre omkretsen = 211.5 cm, tjockleken i och vinkelrätt mot ringplanet 1.593 samt 1.619 cm. Härur beräknas medelradien = 32.86 cm, samt $\frac{q}{p} = [9.6037] =$ 0.4015 cm.

Vid den förra ringen voro vid skarfven de båda ändarne falsade mot hvarandra och sammanhållna af en metallskruf. Vid den senare var vid skarfven den ena ändan af ringen försedd med ett koniskt tapphål, i hvilket den andra koniskt tillspetsade ändan stacks in. Sammanhållningen åstadkoms genom en sprint af koppar.

För att få större galvanometerutslag, särskildt på den från värmekällan aflägsnare observationspunkten, användes vid försöket 2 tvänne så nära lika BUNSENS brännare som möjligt, hvilka

placerades under två diametralt motsatta punkter af ringen (skarfven den ena), hvarigenom ringens radie förkortades till hälften.

Tabellerna innehålla i de tre första kolumnerna galvanometerutslagen samt observationerna på omgifningens temperatur. u_1 och u_2 beteckna temperaturerna på de båda observationspunkterna på $^1/_8$ och $^5/_8$ af ringens omkrets, och äro tagna ur reduktionstabellerna. $2u_0$ betyder dubbla temperaturen hos omgifningen, erhållen genom grafisk interpolation med stöd af observationerna i tredje kolumnen och de observationer, som gjordes före observationsseriens början. Betydelsen af de i de öfriga kolumnerna anförda siffrorna framgår af det föregående.

Vid beräkningen af h_0 och k_0 har antagits samma värde på c_0 som vid ÅNGSTRÖMS metod eller

$$c_0 = 0.8448 .$$

Försök 1. Blank kopparring.

$r^2 = [2.5352]$, $q/p = [9.7526]$.

$v_1 + v_2 = u_1 + u_2 - 2u_0$, $v_1 - v_2 = u_1 - u_2$, $t = 750^s - 1170^s$.

g	G	u_0	u_1	u_2	$2u_0$	$v_1 + v_2$	$\log \frac{v_1 + v_2}{v'_1 + v'_2}$	$v_1 - v_2$	$\log \frac{v_1 - v_2}{v'_1 - v'_2}$
—	552.8	20°.40	—	—	—	—	—	—	—
635.1	51.2	—	69°.72	61°.45	40°.78	90°.39	—	8°.27	—
29.4	47.7	—	69.15	61.17	.77	89.55	0.0040	7.98	0.015
24.1	45.8	—	68.61	60.92	.76	88.77	38	7.69	16
19.2	44.0	—	68.11	60.71	.75	88.07	35	7.40	17
14.0	42.0	—	67.58	60.49	.75	87.32	37	7.09	19
08.6	39.8	—	67.04	60.25	.74	86.55	38	6.79	19
04.0	37.0	—	66.56	59.96	.73	85.79	39	6.60	14
598.6	34.8	—	66.00	59.69	.73	84.96	42	6.31	20
94.4	32.9	20.36	65.57	59.46	.72	84.30	34	6.11	14
89.5	31.0	—	65.06	59.25	.72	83.59	36	5.81	22
85.3	28.2	—	64.63	58.97	.71	82.89	37	5.66	11
80.8	26.5	—	64.18	58.72	.70	82.20	36	5.46	16

g	G	u_0	u_1	u_2	$2u_0$	v_1+v_2	$\log \frac{v_1+v_2}{v'_1+v'_2}$	v_1-v_2	$\log \frac{v_1-v_2}{v'_1-v'_2}$
76.4	24.3	—	63.72	58.49	40.69	81.52	0.0036	5.23	0.019
72.0	21.6	—	63.26	58.23	.68	80.81	38	5.03	17
67.6	19.2	—	62.82	57.93	.68	80.09	37	4.89	12
63.6	16.5	—	62.40	57.66	.67	79.39	38	4.74	14
59.8	14.4	—	62.01	57.38	.66	78.73	37	4.63	10
55.7	11.9	20.33	61.59	57.13	.66	78.06	37	4.46	16
51.9	09.4	—	61.20	56.85	.65	77.40	37	4.35	11
48.2	07.5	—	60.81	56.59	.64	76.76	36	4.22	13
43.6	05.8	—	60.32	56.40	.63	76.09	36	3.92	32
Media:					40.71		0.00374		0.0165 (de 10 första).

Beräkning enligt formel (33) ger, då $t' - t$ sättes $= 10^s$,

$$MH = 0.0001870, \quad M\left(\frac{K}{r^2} + H\right) = 0.000825,$$
$$H = 0.0004305,$$
$$h_0 = 0.000206, \quad \frac{K}{r^2} + H = 0.001900,$$
$$u_0 = 20^\circ.36.$$
$$K = 0.5041,$$
$$k_0 = 0.426,$$
$$u_0 = 20^\circ.36.$$

Ett annat försök med samma ring, gjordt under enahanda förhållanden som försök 1 har vid en medeltemperatur hos omgifningen af 19°.23 gifvit $H = 0.0004052$ och $K = 0.5055$, hvaraf beräknas $h_0 = 0.000194$ och $k_0 = 0.427$.

Ett tredje försök vid medeltemperaturen 18°.48 har gifvit $H = 0.0004456$ och $K = 0.4987$, hvaraf $h_0 = 0.000213$, $k_0 = 0.422$.

Försök 2. Blank kopparring.

$r^2 = [2.4313]$, $q/p = [9.6037]$.

$v_1 + v_2 = u_1 + u_2 - 2u_0$, $v_1 - v_2 = u_1 - u_2$, $t = 410^s - 890^s$.

g	G	u_0	u_1	u_2	$2u_0$	$v_1 + v_2$	$\log \frac{v_1 + v_2}{v'_1 + v'_2}$	$v_1 - v_2$	$\log \frac{v_1 - v_2}{v'_1 - v'_2}$
—	535.9	—	—	—	—	—	—	—	—
646.9	33.2	—	70°.93	59°.53	40°.00	90°46	—	11°.40	—
38.2	30.2	—	70.04	59.21	.00	89.25	0.0059	10.83	0.022
29.3	27.6	20°00	69.14	58.89	.00	88.03	60	10.25	24
21.4	24.8	—	68.33	58.58	.00	86.91	56	9.75	22
12.8	22.3	—	67.46	58.29	39.99	85.76	58	9.17	27
04.2	19.9	—	66.58	58.01	.98	84.61	59	8.57	29
596.7	16.5	—	65.81	57.69	.97	83.53	62	8.12	23
89.6	13.7	—	65.08	57.34	.95	82.47	49	7.74	21
82.0	10.4	—	64.30	57.01	.94	81.37	48	7.29	26
74.4	07.4	—	63.51	56.65	.93	80.23	61	6.86	26
68.0	04.1	—	62.86	56.30	.92	79.24	54	6.56	20
61.1	01.0	—	62.14	55.95	.91	78.18	58	6.19	25
54.6	497.9	—	61.47	55.59	.90	77.16	57	5.88	23
48.0	94.3	—	60.79	55.22	.88	76.13	58	5.57	23
41.8	90.9	—	60.14	54.84	.87	75.11	59	5.30	22
35.8	88.0	—	59.51	54.49	.86	74.14	57	5.02	23
29.6	84.5	—	58.86	54.14	.85	73.15	58	4.72	27
23.8	81.0	—	58.25	53.76	.84	72.17	58	4.49	22
18.0	77.6	—	57.65	53.38	.82	71.21	58	4.27	22
12.7	74.0	—	57.10	53.00	.81	70.29	57	4.10	27
07.0	71.1	—	56.50	52.66	.80	69.36	58	3.84	29
02.2	67.6	—	55.99	52.30	.79	68.50	54	3.69	17
496.7	64.6	—	55.41	51.94	.77	67.58	59	3.47	27
91.9	61.2	19.88	54.91	51.60	.76	66.75	54	3.31	20
Media:					39.90		0.00574		0.0234

Approximativ beräkning enligt ekvationerna (33) ger, då då $t' - t = 20$,

$$MH = 0.000287, \qquad M\left(\frac{K}{r^2} + H\right) = 0.00117,$$

$$H = 0.000661,$$

$$h_0 = 0.000224, \qquad \frac{K}{r^2} + H = 0.002694,$$
$$u_0 = 19^\circ.95.$$
$$K = 0.549,$$
$$k_0 = 0.464.$$

Ehuruväl vid detta, liksom andra mina försök, $\log \frac{v_1 + v_2}{v'_1 + v'_2}$, icke visar någon tydlig ändring med tiden, har jag likväl gjort försök till beräkning efter en strängare räknemetod. Utvecklas de i tabellen gifna värdena på $v_1 + v_2$ i serie enligt TSCHEBYSCHEWS metod med 4 termer, erhålles:

$$v_1 + v_2 = a_0 + a_1(t - 650) + a_2(t - 650)^2 + a_3(t - 650)^3 + + a_4(t - 650)^4 .$$

nämligen

$$a_0 = [1.89041] = 77^\circ.698 ,$$
$$a_1 = [8.71248]_n ,$$
$$a_2 = [5.166] ,$$
$$\dots\dots\dots$$

Värdet af H blir då enligt ekvationen öfverst sidan 74,

$$H = 0.000742,$$

hvaraf

$$h_0 = 0.000252.$$

Enligt den approximativa räkningen ha vi

$$\frac{K}{r^2} + H = 0.002694.$$

Häraf erhålles

$$K = 0.527$$

och

$$k_0 = 0.445.$$

Man finner vidare ur de båda första ekvationerna (44)

$$A = 85.9,$$
$$B = -8.2.$$

Insättas värdena på A, B och H i tredje ekvationen (44), erhålles som kontroll

$$a_2 = [5.164] \text{ i st. f. } [5.166].$$

Ur ekvationerna (41) erhålles slutligen

$$\delta_{00} = \eta - 2\gamma = -0.00222,$$

hvaraf, om 2γ sättes $= 0.0047$, liksom vid försöken enligt ÅNGSTRÖMS metod[1]),

$$\eta = -0.00175.$$

Den jämförelse mellan ÅNGSTRÖMS och NEUMANNS metoder, som jag härmed afslutar, har i den teoretiska grundläggningen gått ut på att uppvisa en generell solution till differentialekvationen för det variabla temperaturtillståndet i en jämntjock stång, hvilken solution funnit tillämpning för båda metoderna, därigenom att konstantbestämningen i densamma kunnat ske i öfverensstämmelse med de för hvardera metoden egendomliga sidovilkoren. Af den teoretiska utvecklingen har vidare framgått, hvilka vilkor observationerna böra uppfylla, för att de experimentelt funna serierna skola kunna identifieras med de teoretiska serie-utvecklingarne.

De anförda experimentella undersökningarne hafva omfattat 3 försök enligt ÅNGSTRÖMS metod och 4 enligt NEUMANNS. Slutresultaten sammanfattas i tabellen å nästa sida.

Försöken enligt ÅNGSTRÖMS metod hafva utförts dels på en stång af svensk (Fahlu-)koppar, samma stång som utgjort föremål för ÅNGSTRÖMS egna undersökningar, dels på en stång, af engelsk koppar. För den svenska kopparn har erhållits ett värde på inre ledningsförmågan, som vid 0° är $2^1/_2$ gång så stort som för den engelska kopparn, under det att temperaturkoefficienterna för samma kvantitet ha olika tecken vid de olika slagen koppar.

Försöken enligt NEUMANNS metod hafva utförts på två ringar af engelsk koppar, af hvilka den ena var böjd af ett stycke af samma stång som vid försök 2 enligt ÅNGSTRÖMS metod. De båda metoderna, använda på samma material, hafva lemnat värden på k, som på 2 % skilja sig från hvarandra.

[1]) Jfr noten pag. 304.

Värmeledningskonstanter och temperaturkoefficienter

enligt Ångströms och Neumanns metoder.

Metod.	k_0.	$2\varkappa$.	h_0.	η.	Omgifningens temperatur.
Ångströms	1. Ångströms stång, svensk koppar:				
	0.951	— 0.00111	0.000246	— 0.0075	14°.3
	9.940	— 0.000167	0.000428	— 0.0280	14.1
	formel: $k = 0.954.(1 - 0.00064t)$ . . . (1)				
	2. Rund stång, engelsk koppar:				
	0.412	+ 0.00343	0.000346	— 0.0079	14.5
		Med.	0.000340	— 0.0145	14.3
	formel: $k = 0.392.(1 + 0.00343t)$ . . . (2)				
Neumanns	1. Ring, engelsk koppar, samma som vid försök 2 enligt Ångströms metod:				
	0.426		0.000206		20.36
	0.427		0.000194		19.23
	0.422		0.000213		18.48
Med.	0.425				
	Formel (2) ger för 19°.4: k = 0.417.				
	2. Annan ring, engelsk koppar:				
	0.445		0.000252	— 0.00175	19.95
		Med.	0.000216		19.50

Beträffande yttre värmeledningskoefficienten, så hafva de skilda försöken lemnat mycket olika värden på denna kvantitet; likaså på dess temperaturkoefficient, som dock vid alla försöken blir negatif. I någon mån torde olikheten i de erhållna värdena

af h förklaras genom olikhet i ytans beskaffenhet vid de olika försöken. Stundom iakttogs det försigtighetsmåttet att afputsa ytan med smärgelpapper, omedelbart före försöket, hvarigenom ytan befriades från det oxidlager, som särskildt till följd af upphettningen bildades. Men som det icke ingick i min ursprungliga plan att bestämma yttre ledningsförmågan, iakttogs icke alltid detta försigtighetsmått. Det är dessutom att märka att försöken skedde i öppen luft, i samma rum, där observatören och värmekällorna befunno sig. Visserligen var stången eller ringen skyddad af skärmar för direkt strålning, men det är alltför troligt, att strömningarne i den omgifvande luften vid de olika försöken varit högst olika.

I sammanhang härmed vill jag påpeka några omständigheter af vigt att iakttaga vid kommande experimentella undersökningar i frågan:

1:o. Stången eller ringen bör placeras i ett särskildt rum, afstängdt från observatören och om möjligt äfven från värmekällorna, hvilket senare åtminstone vid ÅNGSTRÖMS metod lätt bör kunna verkställas.

2:o. Omflyttning af elementen i hålen af observationsstången bör undvikas, så att elementen få sitta på oföränderligt afstånd från hvarandra under hvarje försök, såväl som från ena försöket till det andra. Visserligen kvarstår svårigheten att noga uppskatta detta afstånd; men för bestämning af temperaturkoefficienterna ur observationer på *två* punkter är denna omständighet af mindre betydelse, om blott afståndet bibehålles oförändradt.

3:o. Större variationer i medeltemperaturerna på de båda observationspunkterna än vid mina försök enligt ÅNGSTRÖMS metod är för en noggrann bestämning af temperaturkoefficienterna önsklig. Bäst torde detta kunna åstadkommas, om observationerna ske i *två* punkter och värmekällorna byta plats vid de olika försöken.

4:o. Galvanometern på den aflägsnare observationspunkten göres känsligare.

Vid mina fortsatta undersökningar enligt de båda metoderna hoppas jag själf bli i tillfälle draga nytta af de erfarenhetsrön, som jag under dessa mina preliminära försök gjort. Måhända komma då också undersökningarne att något varieras.

Undersökningarne hafva utförts på fysiska institutionen i Upsala, till hvars prefekt, Herr Professor THALÉN, jag står i största tacksamhetsskuld för den välvilja, hvarmed för undersökningen behöfliga materialier och instrument stälts till mitt förfogande, liksom för det intresse, hvarmed han städse följt mitt arbete.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. fr. sid. 380.)

New Haven, U. S. *Connecticut Academy of arts and sciences.*
Transactions. Vol. 8: P. 1. 1890. 8:o.

Pulkowa. *Nicolai-Hauptsternwarte.*
Catalog von 5634 Sternen für die Epoche 1875.0 aus den Beobachtungen am Pulkowaer Meridiankreise während der Jahre 1874—1880. S:t Petersburg 1891. 4:o:
Sternephemeriden auf das Jahr 1891 ... von W. Döllen. S:t Petersburg 1890. 4:o.
Bericht für die Periode 1887/5—1889/11. 1890. 8:o.
NYRÉN, M., Über ein von der Temperatur abhängiges Glied in den Collimatorablesungen des Pulkowaer Meridiankreises. S:t Petersburg 1890. 4:o.

Topeka, U. S. *Kansas academy of science.*
Transactions. Vol. 12 (1889—90). 8:o.

Toronto. *Canadian institute.*
Transactions. Vol. 1: P. 2. 1891. 8:o.
Annual report. 4 (1890/91). 8:o.
FLEMING, S., Time-reckoning from the 20:th century. Washington 1889. 8:o.

Utrecht. *Provinciaal Utrechtsch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen.*
Aanteekeningen van het verhandelnde in de algemeene Vergadering 1890 2/7. 8:o.
» » » » » » Sectie-Vergaderingen 1890 2/7. 8:o.

Författarne.
ARNELL, H. W., Jungermannia Medelpadica. Lund 1891. 8:o.
GULLSTRAND, A., Om samtidig bestämning af refraktion och synskärpa. Sthm 1891. 8:o.
KEY, A., Om pubertetsutvecklingen och dess förhållande till sjukligheten hos skolungdomen. Sthm 1891. 8:o.
[LJUNGBERG, C. E.,] De diplomatiska angelägenheterna ... H. 1—2. Sthm 1891. 8:o.
LUNDBERG, R., Det stora sillfisket i Skåne under medeltiden och nyare tidens början. Sthm 1891. 8:o.
NATHORST, A. G., Kritische Bemerkungen über die Geschichte der Vegetation Grönlands. Lpz. 1891. 8:o.
ALBERT I VON MONACO, Zur Erforschung der Meere und ihrer Bewohner. Gesammelte Schriften, aus dem Französischen von E. Marenzeller. Wien 1891. 8:o.
ASCHEHOUG, T. H., Statistiske Studier over folkemængde og jordbrug i Norges landdistrikter i det 17:e og 18:e aarhundrede. Kra 1890. 8:o.
BERGBOHM, J., Neue Rechnungsmethoden der höheren Mathematik. Stuttgart 1891. 8:o.

(Forts. å sid. 396.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1891. N:o 6.
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska laboratorium.

192. Om 1-6 dibromnaftalin.

Af S. Forsling.

[Meddeladt den 10 Juni 1891 genom P. T. Cleve.]

η-Diklornaftalin (smpt 48° C.) har konstitutionen:

Cl

Cl .

Jolin[1]) sammanställer med denna en dibromnaftalin af smpt 76°—77° C., hvilken han på grund häraf kallas η-dibromnaftalin. I en föregående uppsats[2]) har jag emellertid visat, att en dibromnaftalin af smpt 75° måste motsvara ϑ-diklornaftalin (smpt 62°) och sålunda hafva konstitutionen:

Br

Br .

Som denna dibromnaftalin utan tvifvel är identisk med Jolins η-dibromnaftalin, har således den mot η-diklornaftalin svarande dibromnaftalin ännu ej med säkerhet varit känd.

För att erhålla denna har jag utgått från den af mig förut[3]) beskrifna 2-5-amidonaftalinsulfonsyran (amidonaftalinsul-

---

[1]) Acta Soc. Reg., Ups. 1877.
[2]) Öfvers. af K. Vet.-Akad. Handl. 1890, N:o 2.
[3]) Bihang till K. Vet.-Akad. Förh. 1888, N:o 2.

fonsyra 2). Denna diazoterades enligt en af ERDMANN angifven metod[1]), hvilken gaf bättre resultat än den metod, jag förut användt för framställande af diazonaftalinsulfonsyror, i det att inga färgade biprodukter bildades. Diazonaftalinsulfonsyran öfverfördes därefter på vanligt sätt till bromnaftalinsulfonsyra.

Kaliumsalt af 2-5 bromnaftalinsulfonsyra, $C_{10}H_6BrSO_3K + H_2O$, är tämligen svårlösligt i vatten. Det kristalliserar i breda, hvita nålar, hvilka öfver svafvelsyra eller vid upphettning till 100° C. lätt förlora sitt kristallvatten.

Analys: I procent

	Funnet:	Beräknadt:
K	11,48	11,42
H_2O	5,19	5,25.

2-5 bromnaftalinsulfonbromid, $C_{10}H_6BrSO_2Br$, erhölls af kaliumsaltet med fosforpentabromid. Den kristalliserar ur isättika i breda, ljusgula prismer. Smpt 104° C.

Analys: I procent

	Funnet:	Beräknadt:
Br	45,36	45,71.

Dibromnaftalin,

$C_{10}H_6Br_2$.

Ofvanstående bromnaftalinsulfonbromid destillerades på vanligt sätt med fosforpentabromid. Den erhållna dibromnaftalin destillerades först med vattenånga, och omkristalliserades därefter ur isättika. Efter några omkristalliseringar erhöll den konstant smältpunkt 56° C.

Den kristalliserar ur isättika i korta, hårda, hvita nålar.

Analys: I procent

	Funnet:	Beräknadt:
Br	56,25	55,94.

---

[1]) Ann. Chem. Pharm. 247, s. 329.

Tribromnaftalin.

$C_{10}H_5Br_3$.

Vid bromidens destillering med fosforpentabromid erhölls icke uteslutande dibromnaftalin; fosforpentabromiden verkade nämligen därjämte bromerande, så att en del tribromnaftalin bildades. Vid destillation med vattenånga afskiljdes dibromnaftalin härifrån. Dibromnaftalin, som var ganska lättflyktig med vattenånga, förflyktigades med denna; den högre bromerade substansen, som var ytterligt svårflyktig härmed, stannade åter i destillationskolfven. Efter flerfaldiga omkristalliseringar af denna senare ur isättika lyckades det mig att afskilja en i långa nålar kristalliserande tribromnaftalin af smpt 88° C. Huruvida utom denna ytterligare tribromnaftaliner bildades, var mig på grund af materialets ringa mängd omöjligt att afgöra.

Analys: I procent

	Funnet:	Beräknadt:
Br	65,22	65,75.

Ofvanstående dibromnaftalin, som enligt framställningssättet måste vara ett 1-6-(2-5) derivat, har samtidigt framställts af R. MAUZELIUS[1]) ur 1-6-bromnaftalinsulfonsyra, hvars bromid har smältpunkten 112° C.

Hvad beträffar tribromnaftalinen, kan om dess konstitution för närvarande endast sägas, att den har 2:ne bromatomer i ställningen 1-6.

---

[1]) Privatmeddelande.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts. fr. sid. 392.)

Ceulenaer, A. de, Type d'Indien du nouveau monde, représenté sur un bronze antique du Louvre. Bruxelles 1890. 8:o.

Ekroll, M. H., Plan für eine Schlittenboot-Expedition nach dem Nordpol. s. l. 1891. 8:o.

Hahn, P., Mikrometrische Vermessung des Sternhaufens Σ 762, ausgeführt am zwölffüssigen Äquatorial der Leipziger Sternwarte. Lpz. 1891. st. 8:o.

Hjelt, O. E. A., Svenska och Finska medicinalverkets historia 1663—1812. H. 1. Hfors 1891. 8:o.

Raina, M., Sul metodo grafico nel calcolo delle eclissi solari. Milano 1891. 8:o.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1891. N:o 6.
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska Laboratorium.

195. Om derivat af svafvelurinämnen. III.

Af D. S. Hector.

[Meddeladt den 10 Juni 1891 genom L. F. Nilson.]

I trenne föregående afhandlingar[1]) har jag redogjort för undersökningar angående aromatiskt substituerade svafvelurinämnens förhållande till oxidationsmedel, förnämligast till vätesuperoxid. Jag har nu utsträckt dessa undersökningar till några svafvelurinämnen, tillhörande den alifatiska serien, nämligen till allyl- och metylsvafvelurinämne samt till det enkla svafvelurinämnet. Af dessa försök har framgått, att den reaktion, som eger rum vid aromatiska svafvelurinämnens oxidation med vätesuperoxid, visserligen äfven inträder, då alifatiska svafvelurinämnen behandlas med samma oxidationsmedel under för öfrigt lika förhållanden, men stannar på halfva vägen. I det förra fallet eger reaktionen rum enligt dessa formler (Ar = arom. radikal):

$$\text{I.}\quad \mathrm{ArHN{-}}\overset{\overset{\displaystyle \mathrm{NH}}{\|}}{\mathrm{C}}\mathrm{{-}SH}\quad \mathrm{HS{-}}\overset{\overset{\displaystyle \mathrm{HN}}{\|}}{\mathrm{C}}\mathrm{{-}NHAr} + H_2O_2 = \overset{\overset{\displaystyle \mathrm{NHAr\ \ NH}}{\diagdown\,\|}}{\mathrm{C}}\mathrm{{-}S{-}S{-}}\overset{\overset{\displaystyle \mathrm{HN\ \ ArHN}}{\|\,\diagup}}{\mathrm{C}} + 2H_2O$$

$$\text{II.}\quad \mathrm{ArHN{-}}\overset{\overset{\displaystyle \mathrm{NH}}{\|}}{\mathrm{C}}\mathrm{{-}S{-}S{-}}\overset{\overset{\displaystyle \mathrm{HN}}{\|}}{\mathrm{C}}\mathrm{{-}NHAr} + H_2O_2 = \begin{array}{c} \mathrm{N{-}N} \\ \|\quad\ \| \\ \mathrm{ArHN{-}C\quad C{-}NHAr} \\ \diagdown\ \diagup \\ \mathrm{S} \end{array} + 2H_2O + S\,,$$

---

[1]) Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1889, N:o 5.
Ibid. N:o 10.
Ibid. 1890, N:o 2.

d. v. s. svafvelurinämnet oxideras först till en disulfid, som derpå under afskiljande af hälften af sitt svafvel oxideras till ett oiaztiolderivat; i det senare fallet stannar deremot reaktionen vid första skedet och kan ej föras vidare genom tillsats af mera oxidationsmedel. En bestämd skilnad förefinnes således mellan alifatiska och aromatiska svafvelurinämnens förhållande till vätesuperoxid, i det att de förra deraf oxideras till disulfider, de senare under afskiljande af svafvel till oiaztiolderivat. Om orsaken till denna skilnad torde det ännu vara för tidigt att yttra sig; fortsatta undersökningar af med svafvelurinämnena närslägtade föreningars (t. ex. xantogenamid, sulfoxaminsyreeter, sulfoxamid, tioamider, tiosemikarbazider m. fl.) förhållande till vätesuperoxid skola sannolikt lemna förklaring häröfver. Af några redan anstälda försök i denna riktning tyckes det framgå, som skulle benägenheten för bildning af oiaztiolderivat ökas, ju mera den med gruppen $-C\begin{smallmatrix}\diagup SH\\ \diagdown NH\end{smallmatrix}$ i förening stående radikalen mister af basisk karakter.

Ett vilkor för, att oxidation öfverhufvud skall ega rum, åtminstone inom den alifatiska svafvelurinämneserien (den aromatiska är i detta afseende ännu icke undersökt), är, att oxidationen sker i *sur* lösning. Är lösningen neutral eller alkalisk, bildas ingen disulfid; i stället öfvergår det använda svafvelurinämnet till ett vanligt urinämne under svaflets oxidation till svafvelsyra. Denna senare reaktion, som är funnen af MALY[1]) och förutsätter, att de alifatiska svafvelurinämnena äfven i neutral och alkalisk lösning reagera efter formeln $C\begin{smallmatrix}\diagup NHAl\\ SH\\ \diagdown NH\end{smallmatrix}$ (Al = alif. radikal), kan icke gerna förklaras utan antagandet af en i första hand af svafvelurinämnet bildad sulfonsyra, som derefter under upptagande af en atom syre och en mol. vatten sönderfaller i urinämne och svafvelsyra. Oxidationen skulle sålunda försiggå i tvenne akter enligt följande ekvationer:

---

[1]) Monatshefte f. Chem. 1890. Sid. 277.

$$\text{I.}\quad C\begin{cases}NHAl\\ SH\\ NH\end{cases} + 3O = C\begin{cases}NHAl\\ SO_3H\\ NH\end{cases}$$

$$\text{II.}\quad C\begin{cases}NHAl\\ SO_3H\\ NH\end{cases} + H_2O + O = C\begin{cases}NHAl\\ OH\\ NH\end{cases} + H_2SO_4$$

Några försök att isolera dessa med all sannolikhet såsom mellanlänkar uppträdande sulfonsyror hafva af mig ej gjorts, deremot af L. STORCH[1]), som särskildt studerat oxidationsmedels inverkan på enkelt svafvelurinämne. Dessa försök hafva likväl tillsvidare strandat på den bildade formamidinsulfonsyrans

$$C\begin{cases}NH_2\\ SO_3H\\ NH\end{cases}$$

lätta sönderfall och på svårigheten att aflägsna de olika oorganiska salterna.

Om sålunda både de substituerade svafvelurinämnena och det enkla svafvelurinämnet i såväl alkalisk som neutral och sur lösning reagera enligt den osymmetriska formeln

$$C\begin{cases}NHR\\ SH\\ NH\end{cases},$$

visar en annan af mig funnen, hittills endast på de alifatiska svafvelurinämnena pröfvad reaktion, att dessa i sur lösning (på alkalisk sådan är ännu ingen undersökning gjord) äfven kunna reagera enligt den symmetriska formeln

$$CS\begin{cases}NHAl\\ NH_2\end{cases},$$

i händelse man använder salpetersyrlighet som oxidationsmedel.

---

[1]) Monatshefte f. Chem. 1890. Sid. 452.

Försätter man nämligen en med svafvelsyra surgjord vattenlösning af tiosinamin med kaliumnitritlösning, samlar sig så småningom under utveckling af en färglös gas på vätskeblandningens yta en gul olja. Utdrager man denna med eter, torkar eterlösningen med klorkalcium, afdunstar eterlösningen och analyserar den qvarvarande gula oljan, finner man den sammansatt enligt formeln $C_8H_{11}N_3S_2$. Den vid reaktionen utvecklade färglösa gasen består af qväfgas, hvilken sedermera uppblandas med rödbruna ångor af salpetersyrlighet och undersalpetersyra. Reaktionen eger rum enligt följande formel:

$$2C_3H_5NH . CS . NH_2 + 3HO . NO = C_8H_{11}N_3S_2 + 4H_2O + N_2 + 2NO.$$

För hvarje droppe kaliumnitritlösning, som sättes till den svafvelsyrade tiosinaminlösningen, uppstår en tung, rödbrun olja, som dock genast löser sig, hvarvid vattenlösningen antager en gul färg. När en del af kaliumnitritlösningen tillsatts, börja små blåsor af qväfgas att bildas på kärlets väggar och uppstiga till vätskans yta, ytterligare tillsättning af kaliumnitritlösning framkallar ej längre någon fällning af rödbrun olja, men i stället grumlas hela lösningen och en gul olja samlar sig på ytan. Man kan skilja mellan tvenne skeden i reaktionen, hvilka kunna uttryckas med följande ekvationer:

I. $$C_3H_5NH . CS . NH_2H_2N . CS . NHC_3H_5 + HONO =$$
$$C_3H_5NH . CS . NH . N : N . CS . NHC_3H_5 + 2H_2O.$$

II. $$C_3H_5NH . CS . NH . N : N . CS . NHC_3H_5 + 2HONO =$$
$$C_8H_{11}N_3S_2 + 2H_2O + N_2 + 2NO.$$

Det första skedet utgöres af en diazoteringsprocess, det senare af en oxidationsprocess under afgifvande af qväfgas. Under det första skedet absorberas salpetersyrligheten fullständigt, och först mot reaktionens slut uppstå rödbruna ångor af salpetersyrlighet. Samma olja bildas, om salpetersyrlighet nedledes i en vattenlösning af tiosinamin. Behandlas metylsvafvelurinämne med kaliumnitrit och svafvelsyra, erhålles en analogt sammansatt förening under liknande reaktionsförhållanden. I begge fallen, såväl

vid användning af tiosinamin som metylsvafvelurinämne, är det dock endast en mindre del af urinämnet, som deltager i ofvan beskrifna reaktion. Större delen sönderfaller, då salpetersyrlighet nedledes direkt i tiosinaminlösningen, i allylamin och amoniak.

Hvad nu beträffar den rationela sammansättningen af den empiriska formeln $C_8H_{11}N_3S_2$, kunna tre eller, om man betraktar de under *a* och *b* nedan anförda konstitutionsformlerna såsom afarter af en formel, endast två sådana tänkas, nämligen:

I.

a. $C_3H_5 . N—N . C_3H_5$
$|\quad|$
$SC\quad CS$
$\diagdown\diagup$
NH

b. $C_3H_5 . N—N . C_3H_5$
$|\quad|$
$SC\quad CSH$
$\diagdown\diagup\!\!\diagup$
N

och

II.

$S—S$
$|\quad|$
$C_3H_5N = C\quad C = NC_3H_5$
$\diagdown\diagup$
NH

Har man att välja mellan dessa båda formler, måste man otvifvelaktigt föredraga N:o I, ty skulle föreningen vara sammansatt enligt formeln II, så förutsätter detta, att tiosinaminen bör skrifvas

$$CSH\begin{matrix}\diagup\!\!\diagup NC_3H_5\\ \diagdown NH_2\end{matrix},$$

och man skulle således få icke mindre än tre formler för de alifatiska svafvelurinämnena. Vore tiosinaminen sammansatt enligt denna senare formel, borde den med vätesuperoxid gifva disulfiden

$$\begin{matrix}C_3H_5N\diagdown\!\!\diagdown\\ H_2N\diagup\end{matrix}C—S—S—C\begin{matrix}\diagup\!\!\diagup NC_3H_5\\ \diagdown NH_2\end{matrix},$$

hvilken återigen, behandlad med salpetersyrlighet, borde gifva upphof till en förening af formeln II. Så är emellertid ej förhållandet. Nedleder man salpetersyrlighet i en vattenlösning af den med vätesuperoxid framstälda disulfidens sulfat eller behandlar

en dylik lösning med kaliumnitrit och svafvelsyra, så samlar sig ingen gul olja på vätskeytan, och utdrager man efter salpetersyrlighetsbehandlingen lösningen med eter, lemnar den senare vid afdunstning nästan ingen återstod. Tiosinamin reagerar således ej vid behandling med salpetersyrlighet enligt formeln

$$CSH\begin{cases} \diagup NC_3H_5 \\ \diagdown NH_2 \end{cases} .$$

utan enligt den symmetriska formeln

$$CS\begin{cases} \diagup NHC_3H_5 \\ \diagdown NH_2 \end{cases} .$$

Ett annat, länge kändt förhållande, som bestyrker, att de monosubstituerade svafvelurinämnena vid behandling med salpetersyrlighet kunna reagera enligt denna symmetriska formel, är, att de ej gifva några nitrosoderivat, hvilket de borde göra, om de reagerade enligt imidformeln

$$CSH\begin{cases} \diagup NHR \\ \diagdown\!\!\diagdown NH \end{cases} .$$

Reaktionen med salpetersyrlighet finner derför sitt uttryck i ekvationerna

I. $$\begin{matrix} C_3H_5 . NH & & HN . C_3H_5 \\ | & & | \\ SC . NH_2 & H_2N & CS \end{matrix} + HONO = 2H_2O + \begin{matrix} C_3H_5 . NH & & HN . C_3H_5 \\ | & & | \\ SC . N : N . H & N & CS \end{matrix}$$

II. $$\begin{matrix} C_3H_5 : N & H & H & N : C_3H_5 \\ | & & & | \\ SC . & N : N & H & NCS \end{matrix} + 2HONO = 2H_2O + N_2 + 2NO + \begin{matrix} C_3H_5 . N & — & N . C_3H_5 \\ | & & | \\ SC & & CS \\ & \diagdown NH \diagup & \end{matrix}$$

Några försök med enkelt svafvelurinämne och salpetersyrlighet hafva af mig ännu ej blifvit gjorda. Deremot har L. STORCH[1]) anstält sådana i och för framställning af svafvelurinämnets disulfid. Vid titrering af en salpetersyrad vattenlösning af svafvelurinämne med en natriumnitritlösning af känd salthalt »färgas», säger han, »vätskan brungul, gasblåsor utvecklas, hvarefter färgen småningom bleknar. Ur lösningen afsatte sig efter någon tid disulfidnitrat i vackra kristaller.» »Endast omkring 50 % af svafvelurinämnet deltog likväl i disulfidbildningen». Häraf tyckes framgå, att en analog förening bildas äfven här; som dock endast 0,1 gr. svafvelurinämne, löst i 10 kcm. vatten, användes till försöket, löste sig den bildade oljan antagligen i vattnet, hvarför den ej af STORCH blifvit observerad.

De monosubstituerade svafvelurinämnena gifva sålunda upphof till tvenne högeligen intressanta reaktioner: behandlade med salpetersyrlighet ger den alifatiska serien *tetrahydro-triazolderivat*, den aromatiska med salpetersyrlighet eller vätesuperoxid *oiaztiolderivat.* Fortsatta undersökningar få visa, om den förra reaktionen gäller äfven för den aromatiska serien samt den senare äfven för den alifatiska. Hvad den sistnämda reaktionen vidkommer, så har det ännu icke lyckats mig att framställa några oiaztiolderivat af den alifatiska serien, men af några af mina senaste försök tyckes det framgå, som skulle äfven sådana kunna framställas, om förfaringssättet underkastas en liten modifikation. Som dessa undersökningar ännu icke äro afslutade, skall jag framdeles återkomma dertill.

Till sist vill jag påpeka den stora analogi, som förefinnes mellan de båda reaktionerna. Betrakta vi ekvationerna för dem:

I. *a.*

$$\mathrm{ArHN{-}\overset{\overset{\textstyle NH}{\|}}{C}{-}S\boxed{H\ \ H}S{-}\overset{\overset{\textstyle HN}{\|}}{C}{-}NHAr + H_2O_2 =}$$

$$\mathrm{= ArHN{-}\overset{\overset{\textstyle NH}{\|}}{C}{-}S{-}S{-}\overset{\overset{\textstyle HN}{\|}}{C}{-}NHAr + 2H_2O}$$

[1]) l. c.

b.

$$\begin{array}{l} \mathrm{Al{-}NH} \qquad\qquad \mathrm{HN{-}Al} \qquad \mathrm{Al{-}NH} \qquad\qquad \mathrm{HN{-}Al} \\ \mathrm{SC{-}N\,H_2H\,HN{-}CS + HONO = SC{-}N{=}N{-}HN{-}CS + 2H_2O} \end{array}$$

II. *a.*

$$\begin{array}{l} \mathrm{N\,H \qquad H\,N} \qquad\qquad\qquad\qquad \mathrm{N{-}N} \\ \mathrm{ArHN{-}C{-}S{-}S{-}C{-}NHAr + O = ArHN{-}C \quad C{-}NHAr +} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \mathrm{S} \qquad \mathrm{+ S + H_2O} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \mathrm{Al{-}N\,H \qquad\qquad H\,N{-}Al} \qquad \mathrm{Al{-}N{-}N{-}Al} \\ b. \quad \mathrm{SC{-}N{-}N{-}HN{-}CS + O = SC \quad CS + N_2 + H_2O} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mathrm{NH} \end{array}$$

se vi, att oxidationsprocessen i *I a* motsvaras af diazoteringsprocessen i *I b* samt att reaktionen i *II a* och *II b* är densamma endast med den skilnaden, att hopslutningen till en femledig kärna i *II a* sker under utfällning af svafvel, i *II b* under utveckling af qväfgas, ett förlopp, som förklaras af de två olika formler, enligt hvilka de substituerade svafvelurinämnena reagera vid behandling med de två ifrågavarande oxidationsmedlen.

Efter att hafva förutskickat detta går jag att närmare redogöra för de anstälda oxidationsförsöken samt för dervid erhållna föreningar.

I. Svafvelurinämne och vätesuperoxid.

5 gr. svafvelurinämne löstes i vatten, lösningen försattes med klorvätesyra och kokades derefter med 80 gr. 3-procentig vätesuperoxidlösning, motsvarande en mol. vätesuperoxid på en mol. svafvelurinämne. Härvid utföll hälften af det i svafvelurinämnet ingående svaflet. Lösningen afdunstades och kristalliserade vid afsvalning vackert i fina nålar, hvilkas smältpunkt låg vid 153°. Nålarne befunnos vid elementaranalys utgöras af osönderdeladt svafvelurinämne.

I ett annat försök behandlades på samma sätt 2 gr. svafvelurinämne i klorvätesur lösning med vätesuperoxid i smärre portio-

ner, hvarunder svafvel utföll hela tiden lösningen kokades. Det vägdes och befanns utgöra 0.41 gr. (ber. för halfva svafvelmängden 0.42 gr.). I detta fall behöfdes likväl ända till 60 gr. vätesuperoxid (= 2 mol.) för att utfälla halfva svafvelmängden. Lösningen afdunstades till en tjock vätska, som försattes med alkohol, hvarvid salmiak utföll. Afdunstningen och fällningen med alkohol upprepades tre gånger, hvarefter lösningen fäldes med platinaklorid. En fin ljusgul fällning erhölls, som vid analys visade sig vara endast platinasalmiak (Ber. för Pt 43.81 %, fnt 43.88 %). Lösningen afdunstades ånyo, då en tjock olja qvarblef, som vid afsvalning stelnade kristalliniskt. Den fasta massan kokades med alkohol, som qvarlemnade salmiaken olöst, alkohollösningen afdunstades och stelnade vid afsvalning till långa strålformiga kristaller, bestående af osönderdeladt svafvelurinämne.

I ytterligare ett annat försök med 5 gr. svafvelurinämne och närmare 150 gr. (= 2 mol.) vätesuperoxid afdunstades lösningen, sedan svaflet utfälts, samt försattes med alkohol för att aflägsna större delen af den bildade salmiaken. Derpå afdunstades filtratet ånyo till en tjock vätska, som försattes med stark kalilut. Någon fällning erhölls härvid icke annat än af klorkalium. Den härifrån dekanterade lösningen utspäddes med vatten och destillerades. Destillatet utdrogs med eter, hvilken vid afdunstning ej lemnade någon återstod. Det från etern separerade destillatet försattes med klorväte och platinaklorid, hvarvid endast platinasalmiak utföll.

Såsom af ofvanstående försök framgår, sönderfaller svafvelurinämne vid kokning med vätesuperoxid i klorvätesur lösning i svafvel och amoniak hvarvid kolet måste oxideras till kolsyra. Då endast den ena hälften af svaflet utföll, äfven då 2 mol. vätesuperoxid användes till 1 mol. svafvelurinämne, så måste den andra svafvelhälften oxideras till svafvelsyra och reaktionen förlöpa enligt följande formel:

$$2C\begin{cases} // NH_2 \\ SH \\ \backslash NH \end{cases} + O_5 + 3H_2O = 4NH_3 + S + H_2SO_4 + 2CO_2 .$$

Försättes en lösning af svafvelurinämne med salpetersyra samt derefter med en för disulfidbildning beräknad mängd vätesuperoxid och får lösningen stå utan att uppvärmas, utfaller såsom L. STORCH[1]) har visat, disulfidnitrat, resp. oxalat i vackra, hvita kristaller. Nitratet är dock högst obeständigt och kan endast förvaras på sin höjd 2—3 timmar i vakuum öfver svafvelsyra utan att sönderdelas. Oxalatet är beständigare. I vattenlösning kan det uppvärmas till 60—65°, men då sönderdelas det under svafvelafskilning. Den fria disulfiden har han ej lyckats framställa.

II. Rodanamonium och vätesuperoxid.

För jemförelsens skull gjorde jag ett försök för att se, huru rodanamonium förhåller sig vid behandling med vätesuperoxid. 2 gr. rodanamonium löstes i vatten, lösningen försattes med klorvätesyra och, sedan den uppkokats, med 30 gr. (= 1 mol.) vätesuperoxid, hvarvid den färgades rödaktig samt afskilde genast en rödgul fällning, som frånfiltrerades. Under kokningen bortgingo skarpa, i näsa och ögon stinkande ångor af rodanväte. Filtratet kokades ånyo, hvarvid en mindre ny gul fällning erhölls, som frånfiltrerades. Derefter kokades filtratet ånyo omkring 15 minuter; härvid erhölls ingen fällning. Nu tillsattes 15 gr. vätesuperoxid, hvarvid ånyo en gul fällning erhölls i likhet med den förra; denna frånfiltrerades. Filtratet hade nu mistat sin rödaktiga färg. Då vätskan vid förnyad uppkokning förblef klar, tillsattes ånyo 15 gr. vätesuperoxid. Härvid färgades lösningen endast öfvergående rödaktig, men ingen fällning erhölls mera. Nu afdunstades lösningen, men lemnade endast salmiak till återstod.

Den rödgula fällningen utgjordes, såsom var att vänta, af pseudosvafvelcyan

$$HS-(CN)_3\langle\begin{matrix}S\\ |\\ S\end{matrix},$$

bildad enligt eqvationen

[1]) l. c.

$$3HSCN + H_2O_2 = HS(CN)_3\langle{}^{S}_{S}| + 2H_2O\ ,$$

en förening, som förut framstälts genom att oxidera rodanväte med salpetersyra eller klor. Den löste sig ej i alkohol, men väl i kalilut, hvarur den fäldes vid tillsats af klorvätesyra. Kokades lösningen, utvecklades amoniak. Försattes kalilösningen med silfvernitrat, erhölls en gul, till gulbrun fällning Cy_3S_3Ay(?). Pseudosvafvelcyanfällningen förflyktigades ej ens vid glödgning.

III. Allylsvafvelurinämne och vätesuperoxid.

a. *I neutral lösning.*

0.2059 gr. tiosinamin löstes i vatten och oxiderades med vätesuperoxid. Sedan lösningen uppvärmts på vattenbad en half timme, tillsattes klorbarium, hvarvid en fällning af bariumsulfat erhölls. Fällningen frånfiltrerades, mera vätesuperoxid tillsattes och vätskan kokades ånyo på vattenbad, hvilket förfaringssätt upprepades, så länge fällning uppstod vid tillsats af klorbarium. Bariumsulfatfällningarne glödgades och vägdes. De innehöllo tillsammans 96.17 % af det i tiosinaminen befintliga svaflet i form af svafvelsyra. Af försöket framgår således, att i neutral lösning oxideras tiosinaminets svafvel af vätesuperoxid till svafvelsyra. Någon fällning af svafvel erhölls ej.

I ett annat försök oxiderades tiosinamin med vätesuperoxid i neutral lösning, den bildade svafvelsyran utfäldes med barythydrat, hvarmed lösningen kokades. En del af filtratet försattes derpå med klorvätesyra och platinaklorid, hvarvid en gul kristallinisk fällning erhölls, hvilken vid analys gaf 40.22 % platina.

I ett annat försök oxiderades tiosinamin med tre mol. vätesuperoxid, lösningen kokades med barythydrat, hvarvid amoniak och allylamin bortgingo, hvilka uppfångades i ett förlag. Destillatet försattes med klorvätesyra och platinaklorid. Den erhållna gula kristalliniska fällningen gaf vid analys 40.92 % platina, utvisande att lika molekyler amoniak och allylamin utvecklats vid destillationen.

Ber. för	$(NH_4Cl)_2 . PtCl_4$,	för $(C_3H_5NH_2 . HCl)_2 . PtCl_4$
Pt	44.14	37.21.

Beräknadt för $(NH_4Cl)_2 . PtCl_4 + (C_3H_5NH_2 . HCl)_2 . PtCl_4$:	Funnet: I.	II.
40.29	40.22	40.92.

Vätskan i destillationskolfven behandlades med kolsyra för utfällning af öfverskjutande baryt, filtratet afdunstades och gaf vid afsvalning kristaller af bariumformiat.

Tiosinamin sönderfaller således vid oxidation med vätesuperoxid i neutral lösning samt oxidationsproduktens kokning med barythydrat i svafvelsyra, myrsyra, allylamin och amoniak enligt ekvationen

$$CSH\begin{matrix}\diagup NHC_3H_5 \\ \diagdown NH\end{matrix} + O_3 + 3H_2O = H_2SO_4 + C_3H_5NH_2 + NH_3 + \\ + HCOOH .$$

Den bildade myrsyran tyder på, att den genom oxidation uppkomna svafvelfria produkten ej utgöres af allylurinämne, enär detta vid kokning med barythydrat ger allylamin, amoniak och *kolsyra.* Oxidation har derför sannolikt egt rum enligt ekvationen

$$CSH\begin{matrix}\diagup NHC_3H_5 \\ \diagdown NH\end{matrix} + O_3 + H_2O = \begin{matrix}C_3H_5NH\diagdown \\ NH\diagup\end{matrix}CH + H_2SO_4 ,$$

hvarefter den bildade allylformamidinen vid kokning med baryt sönderfallit enligt ekvationen

$$\begin{matrix}C_3H_5NH\diagdown \\ NH\diagup\end{matrix}CH + 2H_2O = C_3H_5NH_2 + NH_3 + HCOOH .$$

På annat sätt kan icke bildningen af myrsyra förklaras. Möjligt är, att äfven allylurinämne uppstår vid oxidationen; allylformamidin skulle genom upptagning af en atom syre gifva upphof till en mol. allylurinämne, dock har efter den oxiderade lösningens afdunstning ingen kristalliserande produkt kunnat erhållas. Några närmare undersökningar angående oxidationsprodukten har jag ej anstält.

b. *I sur lösning.*

Allylformamidindisulfid,

$$\begin{array}{l} S-C\begin{cases} NHC_3H_5 \\ NH \end{cases} \\ | \\ S-C\begin{cases} NH \\ NHC_3H_5 \end{cases} \end{array}$$

För att erhålla denna förening löstes tiosinamin i vatten, lösningen försattes med svafvelsyra samt kokades derpå med en beräknad mängd vätesuperoxid. Endast en mycket obetydlig fällning af svafvel uppstod. Sedan denna frånfiltrerats och vätskan fått svalna, försattes den med barytvatten i öfverskott för att utfälla den tillsatta svafvelsyran, den öfverflödiga baryten utfäldes med kolsyra, hvarefter filtratet afdunstas till större delen. Fick det derpå afsvalna, utföll en tjockflytande sirup. Den ofvanstående lösningen afhäldes och sirupen kokades en längre tid på vattenbad. Torkad, är den nästan färglös, i värme tjockflytande, men stelnar i exsiccator till en fast, glasliknande massa. Vid analys af denna, framstäld i olika beredningar, erhöllos följande procenttal:

	Ber. f. $C_8H_{14}N_4S_2$:	Ber. f. $C_8H_{14}N_4S_2 + H_2O$:	Funnet: I.	II.	III.
H	6.09	6.45	6.81	7.08	6.31
C	41.74	38.71	40.07	41.84	39.18
N	24.35	22.58	—	—	21.40
S	27.83	25.81	—	—	26.17.

Analyserna under III äro gjorda på samma beredning. Af dessa tyckes framgå, att disulfiden håller en mol. vatten, som ej bortgår vid 100°.

Disulfiden är en stark, tvåsyrig bas. Den löser sig lätt i kokande vatten, är deremot temligen svårlöslig i kallt. Lösningen blånar rödt lackumspapper. Den är löslig i alkohol, dock ej så mycket som i vatten, men kan utfällas ur lösningen med eter,

då den faller som en tjock, halfflytande olja. Den är olöslig i benzol, hvarför den icke kan utdragas dermed, om man fäller ett af dess salter med kalilut. Ett kristalliserande salt har ej kunnat framställas; försök hafva gjorts med svafvelsyra, salpetersyra, klorvätesyra, oxalsyra och ättiksyra. Alla de med dessa syror bildade salterna äro nämligen ytterst lättlösliga i vatten. Disulfiden kan ej destilleras, ej heller öfvergår den med vattenångor. Upphettas den enbart, bortgå ångor af amoniakgas och svafvelväte, igenkänliga på lukten, och en gul olja öfverdestillerar.

Disulfiden afsvaflas icke vid kokning med qvicksilfveroxid eller blyoxid. Endast en ringa mängd svafvelmetall bildas. Försättes en disulfidlösning med silfvernitrat, uppstår en hvit fällning, som dock genast skiftar färg, blir brun och slutligen svart; färgförändringen inträder nästan genast vid vätskans uppvärmning. Kokas lösningen med silfvernitrat, uppstår svafvelsilfver, den måste dock kokas dermed flere timmar, innan den blir fullständigt afsvaflad.

En lösning af ett disulfidsalt ger förutom med silfvernitrat äfven fällningar med platinaklorid, qvicksilfverklorid, pikrinsyra, ferro- och ferricyankalium.

En vattenlösning af disulfiden kokades med bariumhydrat i en kolf och de bildade gaserna leddes genom ett kylrör samt uppfångades i en vattenlösning; denna blef snart starkt alkalisk, någon lukt af amoniak eller allylamin kändes ej, deremot en annan egendomlig, oangenäm lukt. Destillat rengjordes med klorvätesyra, afdunstades samt fäldes med platinaklorid. En gul fällning erhölls, som vid analys efter torkning vid 100° visade sig innehålla 40.47 % platina. Detta skulle öfverensstämma med en blandning af amonium- och allylaminplatinaklorid (ber. 40.29 % Pt); skulle hithörande baser hafva bildats, borde de dock kunnat igenkännas på lukten. En elementaranalys kunde ej göras af brist på material.

Allylformamidindisulfidsulfat.

$C_8H_{14}N_2 + H_2SO_4 + H_2O.$

Detta salt beredes genom att fälla en med vätesuperoxid oxiderad, svafvelsyrad tiosinaminlösning med alkohol, sedan lösningen förut afdunstats till större delen. Sulfatet, som är olösligt i alkohol, utfaller då som en hvit seg massa, som ej kan fås att kristallisera. I vatten är saltet ytterst lättlösligt. Såsom af nedanstående analyser framgår, är det utfälda saltet ej alldeles rent, utan innehåller förutom vatten ett öfverskott af svafvelsyra samt oorganiska ämnen från den använda vätesuperoxiden. Vid analys af i exsiccator en vecka torkadt salt erhölls följande procenttal:

	Beräknadt för $C_8H_{14}N_4S_2 + H_2SO_4 + H_2O$:	Funnet: I.	II.	III.
H	5.20	5.37	5.36	5.32
C	27.75	27.23	26.67	27.01.

En svafvelsyrebestämning gaf

Ber. för $C_8H_{14}N_4S_2 + H_2SO_4$:	Funnet:
29.88 %	33.00.

Vattenbestämning:

Beräknadt:	Funnet: I.	II.
5.20	3.84	3.45.

Genom att glödga saltet befanns det af oorganiska beståndsdelar innehålla 1.25 %.

Beräknar man nu de på det orena saltet funna ofvanstående kol- och väteprocenttalen med fråndragning af föreningarna på vattenfritt rent salt, får man

	Beräknadt för $C_8H_{14}N_4S_2 + H_2SO_4$:	Funnet: I.	II.	III.
H	4.88	4.92	4.91	4.87
C	29.27	29.21	28.55	28.95.

Försättes en koncentrerad vattenlösning af svaflet med stark kalilut, utfaller disulfiden som en tjock hvitaktig olja.

Pikratet,

$$C_8H_{14}N_4S_2 \cdot C_6H_2(NO_2)_3OH \,,$$

erhålles genom att försätta en vattenlösning af disulfidsulfat med en alkoholisk pikrinsyrelösning. Det småningom utfallande saltet omkristalliseras ur kokande vatten. Det kristalliserar i fina korn, är gult till färgen. Smälter vid 178—80°. Efter torkning i exsiccator och vid upphettning till 100° i torkskåp förlorade det ej i vigt.

	Beräknadt:	Funnet: I.	Funnet: II.
H	2.91	3.17	—
C	34.88	35.28	—
N	20.35	—	20.38.

Qväfveanalysen gjordes på ej omkristalliserad substans. För jemförelses skull beredt tiosinaminpikrat smälter vid 190°. GABRIELS[1]) ψ-propylsvafvelurinämne vid 198°.

Kloroplatinatet,

$$C_8H_{14}N_4S_2, 2HCl \cdot PtCl_4 + 2H_2O \,,$$

utfaller som en rödbrun, vid lösningens afsvalning stelnande massa, om klorvätesyra och platinaklorid sättas till en varm lösning af sulfidens svafvelsyrade salt. Fällningen torkades vid 70°.

	Beräknadt:	Funnet: I.	Funnet: II.
Pt	28.84	28.51	28.52.

Analyserna utfördes å olika beredningar.

Kloroplatinatet,

$$1^1/_2(C_8H_{14}N_4S_2, 2HCl) \cdot PtCl_4 .$$

Ett platinat af ofvanstående formel erhölls vid tvenne försök under för öfrigt lika förhållanden. Äfven till utseendet liknar

[1]) Ber. d. Deutsch. chem. Ges. XX, 2298.

det det förra samt smälter liksom detta under 100° till en tjockflytande massa, hvarför den exakta smältpunkten ej kan fixeras.

	Beräknadt:	Funnet: I.	II.	III.
H	3.03	2.90	—	—
C	18.19	16.93	—	—
Pt	24.64	24.55	25.29	24.81.

Analysen III är utförd på annan beredning än I och II.

Qvicksilfverkloridföreningen,

$C_8H_{14}N_4S_2 . 4HgCl_2$,

utfaller vid tillsats af qvicksilfverklorid till en vattenlösning af disulfiden. Den är hvit och kristallinisk, smälter vid 171—72°. Löser sig ej i ättiksyra, såsom WILL[1]) uppgifver vara fallet med motsvarande tiosinaminförening.

	Beräknadt:	Funnet:
N	4.26	4.59
Cl	21.61	21.49.

Med *metylsvafvelurinämne* hafva endast några få oxidationsförsök anstälts i sur lösning, hvilka dock varit tillräckliga för att visa, att reaktionsförloppet här är detsamma som vid oxidation tiosinamin.

IV. Allylsvafvelurinämne och salpetersyrlighet.

Diallyldisulfotetrahydrotriazol,

```
C3H5 . N—N . C3H5
       |  |
       SC  CS     .
        \/
        NH
```

5 gr. tiosinamin löstes i vatten, svafvelsyra tillsattes och derefter 2 gr. i vatten löst kaliumnitrit och derpå ytterligare en lika stor mängd deraf. För hvarje droppe kaliumnitritlösning,

---

[1]) Ann. d. Chem. 52, 11.

som tillsattes, uppstod en tung, rödbrun olja, som dock genast löste sig i vattnet, som småningom grumlades. En gul olja samlade sig på vätskans yta. Lösningen utdrogs flere gånger med eter, som derpå tvättades med en svag sodalösning för att borttaga medföljande syra, derpå med vatten. Den tvättade eterlösningen fick stå 24 timmar öfver klorkalciumstycken, derpå fick den afdunsta frivilligt. Som återstod erhölls en gul olja af ytterst stark stinkande lukt. Fick oljan stå i exsiccator en eller två dagar, mistade den likväl denna lukt, hvilken antagligen härrörde från spår af senapsolja; den hade derefter en svag, icke oangenäm lukt. Vid analys af olika beredningar erhölls i procent:

	Beräknadt:	Funnet: I.	II.	III.	IV.
H	5.16	5.32	5.79	5.78	5.47
C	45.07	44.73	44.39	43.23	45.27
N	19.72	19.85	—	—	—
S	30.05	30.12	—	—	27.71.

Nedledes salpetersyrlighet i en kall lösning af tiosinamin, uppkommer för hvar gasblåsa vid gasrörsmynningen en brun olja, hvilken dock genast löser sig i vattnet. Inga gasblåsor afgå under första delen af gasinledningen, salpetersyrligheten uppsupes fullständigt. Lösningen antar en skarp stickande lukt, antagligen af senapsolja. Sedan gasinledningen fortgått en stund, börjar gasblåsor bildas på kolfväggen och uppstiga derifrån. Lösningen grumlas och en gul olja uppflyter på vätskeytan. Oljan, som utgör samma fällning som ofvan beskrifvits, utdrages med eter.

Afdunstas vattenlösningen derefter, qvarblir en tjock färglös vätska, som sönderdelas vid upphettning. Försättes den med klorvätesyra och platinaklorid, utfaller ett gult kristalliniskt pulver, som vid analys ger

	Beräknadt för $(NH_4Cl)_2 . PtCl_4 + (C_3H_5NH_2, HCl)_2 . PtCl_4$:	Funnet:
Pt	40.29	40.61.

Vattenlösningen tyckes sålunda innehålla en blandning af amoniak och allylamin.

Den gula oljan är olöslig i vatten och utspädda syror, lättlöslig i alkohol och eter; är en svag bas, som ger fällningar med platinaklorid, silfvernitrat, qvicksilfverklorid och kopparsulfat. Försättes en alkohollösning deraf med silfvernitrat, uppstår en hvit fällning, som vid uppvärmning genast blir svart. Föreningen afsvaflas således lätt, hvilket äfven bättre öfverensstämmer med den uppställda formeln än med nedanstående äfven tänkbara:

$$\begin{array}{c} S - S \\ | \quad\quad | \\ C_3H_5 = C \quad C = NC_3H_5 \\ \diagdown \diagup \\ NH \end{array},$$

hvilken dock är osannolik äfven af andra skäl, för hvilka förut redogjorts.

Kloroplatinatet,

$$(C_8H_{11}N_3S_2, HCl)_2 . PtCl_4,$$

uppstår som en gul kristallinisk fällning, om klorvätesyra och platinaklorid sättas till en alkoholisk lösning af triazolderivatet. En platinaanalys gaf i procent:

	Beräknadt:	Funnet:
Pt	23.32	23.17.

V. Metylsvafvelurinämne och salpetersyrlighet.

Dimetyldisulfotetrahydrotriazol,

$$\begin{array}{c} CH_3 . N — N . CH_3 \\ | \quad\quad | \\ SC \quad CS \\ \diagdown \diagup \\ NH \end{array}.$$

Denna förening bildas på ett med allylderivatet alldeles analogt sätt vid behandling af en vattenlösning af metylsvafvelurinämne med kaliumnitrit och svafvelsyra. Den är en gul olja, hvars samtliga reaktioner öfverensstämma med allylföreningens. En elementaranalys gaf i procent:

	Beräknadt:	Funnet:
H	4.35	5.15
Cl	29.81	29.27.

Som mitt närmaste mål för närvarande är att fullfölja undersökningen af, hvilka med svafvelurinämnena närslägtade svafvelhaltiga derivat vid oxidation med vätesuperoxid gifva upphof till oiaztiolderivat, kan jag först längre fram återkomma till dessa hydrotriazolderivat.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1891. N:o 6.
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska laboratorium.

194. Om iridiums ammoniakaliska föreningar II.

Af W. Palmær.

[Meddeladt den 10 Juni 1891 genom P. T. Cleve.]

I mitt första meddelande om iridiums ammoniakaliska föreningar[1]) har jag redogjort hufvudsakligen för de af mig framstälda iridiumpentaminföreningarna. Af denna serie hafva sedan ett par nya salter framstälts, för hvilka redogörelse här följer.

Iridiumpentaminbromonitrit — $Ir(NH_3)_5Br(NO_2)_2$ — erhålles af tribromiden (se nämda uppsats, sid. 370!) och en beräknad mängd silfvernitrit. Saltet bildar ljusgula, tjocka, väl utbildade prismer, som äro vattenfria. Dess lösning reagerar alkaliskt.

Analys:

	Funnet:	Beräknadt:
Br	18,3 [2])	17,8
N	22,09	21,88

Saltet löses i 17,9 delar vatten af + 18°.

Specifika vigtsbestämningar:[3])

2,731 vid + 14°
2,736 » + 13°.

Medeltal = 2,733; molekylarvolym = 164,7 vid + 13,5°.

Iridiumpentaminbromosulfat — $Ir(NH_3)_5BrSO_4 + H_2O$ — framstäldes genom inverkan af svafvelsyra på bromonitritet. Vid

---

[1]) Denna Öfversigt, årg. 1889; sid. 355 ff.

[2]) Denna bestämning är blott approximativ.

[3]) Jfr den anförda uppsatsen, sid. 361!

reaktionen bortgår salpetersyrlighet, men bromatomen utdrifves icke (bevisadt genom ett kvalitativt prof). Den erhållna bruna lösningen försattes med vatten; den affärgades då, under det kväfoxider bortgingo. Vid afkylning utföllo ytterst fina, hopfiltade nålar, hvilka sannolikt utgjordes af surt sulfat. De löstes åter genom lindrig uppvärmning, hvarpå lösningen försattes med dubbla volymen alkohol, då en kristallinisk fällning uppstod. Denna affiltrerades, tvättades med alkohol och omkristalliserades. Sålunda erhölls sulfatet i form af gula, glänsande taflor.

Analys: saltet förlorar intet i vigt i exsiccator, men vid 100° bortgår 1 mol. vatten. Svafvelsyran bestämdes genom att fälla saltets lösning med klorbarium.

	Funnet:	Beräknadt:
H_2O	3,84	3,96
SO_4	21,02	21,15.

Till den sid. 368 i anförda uppsatsen meddelade öfversigten öfver pentaminföreningarnas förhållande till vissa reagens, kan jag tillägga, att en lösning af pentamintriklorid ger med

platinaklorid och svafvelsyra fällning af orangegula, nästan rätvinkliga, små taflor

och med *guldklorid* riklig fällning af granatröda, glänsande, väl utbildade, snedt afskurna eller tvåytigt tillspetsade prismer.

Sid. 369 i den anförda uppsatsen omnämnes, att jag gjort misslyckade försök att erhålla s. k. roseoföreningar af iridium. Detta har emellertid nu lyckats mig, ehuru de äro svårare att framställa än motsvarande af rhodium.

Hvad namnet »*roseoföreningar*» beträffar, anser jag det mindre lämpligt, enär både rhodiums och iridiums föreningar af denna typ äro i det närmaste färglösa. På samma grund har jag användt namnet »*pentaminföreningar*» i st. f. det förut vanliga »*purpureoföreningar*». Då nu »roseoföreningar» skilja sig från »purpureoserien» genom att de innehålla en molekyl vatten, så benämner jag tillsvidare »roseosalterna» »*aquopentamin*»-föreningar. Genom detta namn antydes, att vatten ingår i radi-

kalen och således bör ha inflytande på salternas kemiska karaktär; på samma gång uteslutes tanken på att vattnet skulle vara bundet såsom i hydrat — om så vore förhållandet, borde föreningarne ju kallas »hydrat». Likaså uttryckes att vattnet ej är kristallvatten, då ju sådant ej brukar särskildt benämnas. För att förklara den roll, vattenmolekylen spelar i dessa föreningar, har JÖRGENSEN[1]), som bekant, uppstält den teorien, att i dessa salter ingår fyrvärdigt syre och föreslagit att kalla sådana föreningar *oxiner*. Ehuru denna teori utmärkt förklarar föreliggande fakta, och synes vara den enda tolkning af dessa salters konstitution, som på valenslärans grund kan uppställas, torde det dock måhända vara skäl att afvakta mera direkta bevis för existensen af föreningar med fyrvärdigt syre, innan man genom upptagandet af namnet »oxin» uttalar såsom sin åsigt, att syret verkligen kan vara tetravalent. JÖRGENSEN är kanske äfven af den åsigten, då han icke sjelf använder namnet.

Genom blott användande af silfveroxid synes man icke kunna borttaga all klor uti pentamintriklorid. Vid ett försök, utfördt noga efter JÖRGENSENS föreskrift[2]), sammanrefs 1 gr. pentamintriklorid i 10 minuter med dubbla beräknade mängden silfveroxid; filtratet värmdes en timme på vattenbad och skakades efter fullständig afsvalning i 10 minuter med nästan lika mycket silfveroxid som först användts. Filtratet surgjordes med bromväte och uppvärmdes, hvarvid kristaller utföllo. Dessa utgjordes emellertid af *pentaminklorobromid*, *icke*, såsom väntadt, af *tribromid*. Kristallerna förlorade intet i vigt vid 100° och innehöllo 40,49 % Ir; beräknadt för $Ir(NH_3)_5ClBr_2$ 40,76 % och för $Ir(NH_3)_5Br_3$ 37,26 %. Vid den andra behandlingen med silfveroxid skedde således ingen inverkan. Jag vill dock nämna, att jag en gång, då filtratet från första behandlingen med silfveroxid *kokades* en längre tid, sedan vid öfvermättning med syra i köld lyckades erhålla åtminstone något aquopentaminsalt.

---

[1]) Journ. f. prakt. Ch. Neue Folge 29, 419.

[2]) Journ. f. prakt. Ch., Neue Folge, 27, sidd. 452, 453.

Om man åter upphettar den lösning, som erhållits genom den första behandlingen med silfveroxid, med *alkali*, så borttages äfven den tredje kloratomen; jfr mitt första meddelande sid. 370. Då emellertid silfveroxid ensamt knappast kan borttaga mer än $^2/_3$ af kloren, är det naturligtvis opraktiskt att alls använda den samt vida beqvämare att borttaga *all* klor på en gång genom upphettning med alkali. Men detta går äfven efter denna metod ej så lätt som vid rhodiumföreningarna, d. v. s. genom en tids uppvärmning på vattenbad. Äfven efter flera timmars digerering på vattenbad sönderdelas t. ex. pentamintriklorid endast mycket litet af kalilut. Deremot lyckas det vid ihärdig kokning.

Jag öfvergår nu till att beskrifva af mig framstälda

Aquopentaminföreningar.

Iridiumaquopentaminklorid — $Ir(NH_3)_5OH_2Cl_3$. 5 gr. pentamintriklorid öfvergöts med en lösning af 3,2 gr. kaliumhydrat (vanligt 80 %-igt; beräknadt 2,2 gr.) i 50 kbcm. vatten. Först värmdes 3 timmar på vattenbad: vid afsvalning utföll mycket salt, så att ingen nämnvärd inverkan tycktes ha egt rum. Alltsammans kokades i en kolf med upprätt kylrör i 3 timmar; i värme var allt löst, men vid afsvalning utföll en del. Kokningen fortsattes då 2 timmar till, hvarefter inga kristaller utföllo vid afsvalning. Lösningen hade blifvit något brun och en mycket ringa, brun fällning hade bildats. Ett i kylröret insatt, fuktadt rödt lakmuspapper blef svagt blått, men någon ammoniaklukt kunde ej iakttagas.

Efter den lilla fällningens affiltrering afkyles filtratet medelst is och koksalt tills en del fryser. Då tillsättes småningom och under omröring 30 kbcm. rykande 40 %-ig saltsyra, hvarvid en hvit, mikrokristallinisk fällning bildas. Vidare tillsats af saltsyra ökar ej fällningen, snarare tvärtom. Temperaturen bör vara ungefär —5°. Fällningen affiltreras och tvättas först kaliumfri medelst iskall, 22 %-ig saltsyra och derpå syrefri me-

delst iskall alkohol. Sålunda erhålles ungefär 3,7 gr. aquopentaminklorid eller 70 % af den beräknade mängden.

Fällning och tvättning med svagare saltsyra försämrar utbytet betydligt. Kali är bättre än natron i detta fall, enär klorkalium är lättare lösligt i saltsyra än klornatrium. Filtratet från aquopentaminkloriden afsätter vid uppvärmning kristaller af pentamintriklorid.

Emellertid är föreningen ännu icke fullt ren, ty den ger med vatten en ljusbrun lösning. Man löser derför fällningen i litet vatten och försätter under afkylning till 0° med lika volym rykande saltsyra, då kloriden ånyo utfaller, nu i rent tillstånd.

Analys: det mellan papper utpressade saltet förlorar icke i vigt under 1 dygn i luften ej heller under 2 dygn i exsiccator, men afger vid 100° 1 molekyl vatten.

	Funnet:	Beräknadt:
H_2O	4,47	4,47
Ir	50,18	50,17.

Saltet är mycket lättlösligt i vatten: 0,37 gr. löstes ej i 0,45 kbcm. vatten af rumstemperatur, men lätt i 0,55 kbcm. Det fordrar således mellan 1,2 och 1,5 delar vatten för att lösas.

Specifika vigtbestämningar: i medeltal fans 2,494 vid + 15°.

Molekylarvolym = 161,4.

Att erhålla mätbara kristaller har icke lyckats mig; en konc. lösning afsätter vid afkylning kloriden i form af hvita, salmiakliknande aggregat.

Reaktionsförhållanden. En 10 %-ig lösning af aquopentaminklorid försattes med följande reagens.

1. *Jodkalium:* koncentrerad lösning fäller ej; tillsättes deremot saltet i fast form, uppstår genast hvit, mikrokristallinisk fällning.

2. *Platinaklorid:* genast ymnig fällning af guldglänsande, platta, tvåytigt tillspetsade prismer.

3. *Platinaklorid och svafvelsyra:* genast riklig fällning af glänsande, tunna, sexsidiga, ljusgula fjäll (äfven nålar).

4 *Iridiumklorid*: ger smutsgrå, amorf fällning.

5. *Kaliumiridiumklorid:* genast brungul, amorf fällning.

6. *Guldklorid*: genast fällning af orangegula, mycket små, rhombiska taflor.

7. *Ferrocyankalium:* vätskan fyldes af hvita, glänsande kristallnålar.

8. *Ferricyankalium*: riklig fällning af rödbruna, mikroskopiska, långsträckt sexsidiga eller rhomboidala taflor, ofta korsformigt hopväxta.

9. *Cyankvicksilfver:* efter en kort stund riklig fällning af platta, färglösa, vanligen nästan rätvinkligt afskurna, stjärnformigt grupperade prismer.

10. *Kiselfluorvätesyra:* fäller icke; vid tillsats af sprit uppstår hvit fällning.

11. *Ammoniumoxalat:* efter någon tid afsatte sig hvita, greniga aggregat, som under mikroskopet syntes sammansatta af kuber.

12. *Kaliumbikromat:* genast tjock, svart fällning, som först var amorf och volyminös, men sedan öfvergick till ett mikrokristalliniskt pulver. Vätskan blef brun.

13. *Natriumpyrofosfat* i ringa mängd orsakar hvit, amorf fällning, som genom vidare tillsats först löses, hvarefter glänsande, sargade kristallfjäll i stor mängd utfalla.

14. *Bariumhyposulfat* fäller ej.

15. *Saltsyra* utfäller kloriden.

16. *Salpetersyra* ger ymnig fällning af hvita kristallnålar, som bestå af nitrat (se sid. 424).

17. *Klor:* en afkyld lösning försattes med klorvatten; den blef först intensivt violett och sedan mörkblå, ljusblå, blågrön, grön samt vid tillsats af ammoniak brun.

För jämförelse med pentaminklorosalternas reaktioner får jag hänvisa till min första uppsats, sid. 368, och för jämförelse med »roseorhodium»-föreningarnas förhållanden till JÖRGENSENS afhandling, Journ. f. prakt. Ch. Neue Folge sidd. 396 och 400.

Vid *upphettning* till 100° förlorar kloriden, som nämdt, vatten; dervid öfvergår den till pentamintriklorid. Detta bevisas däraf att den nu

1. svårt löses i vatten;
2. med *platinaklorid* ger gul, *mikro*kristallinisk fällning;
3. med *kiselfluorvätesyra* ger fällning af tunna, rhomboidala fjäll;
4. med *kaliumbikromat* ger en volyminös fällning, som sedan öfvergår till ett *orangegult*, kristalliniskt pulver;
5. *icke* fälles af *ferricyankalium* eller *natriumpyrofosfat*;
6. med *bariumhyposulfat* ger fällning af fina, hvita nålar.

Äfven vid uppvärmning af aquopentaminkloriden i lösning förlorar den vatten och öfvergår i pentamintriklorid, som utfaller.

Fullständig analogi råder således med de s. k. roseoföreningarna af Co, Cr och Rh; den i saltet ingående vattenmolekylen har ett väsentligt inflytande på den kemiska karaktären.

Iridiumaquopentaminbromid — $Ir(NH_3)_5OH_2Br_3$ — framställes genom kokning af pentamintriklorid (äfven klorobromid och tribromid hafva användts) med 1 $^1/_2$ gång den beräknade mängden kaliumhydrat och 10 delar vatten, tills att inga kristaller utskiljas vid afsvalning. Den med is och salt afkylda lösningen försättes med $^2/_3$ volym 50 %-ig bromvätesyra och den utskilda, mikrokristalliniska aquopentaminbromiden affiltreras, tvättas med 10 %-ig, iskall bromvätesyra och sedan med alkohol. Utbyte bättre än vid kloriden. För att renas, löses bromiden i minsta mängd vatten och utfälles igen vid — 5° med lika volym 50 %-ig bromvätesyra. Härvid återvinnas ungefär 90 %.

Analys: mellan papper pressadt salt förlorar ej i vigt i exsiccator, men vid 100° bortgår 1 mol. vatten.

	Funnet:	Beräknadt:
H_2O	3,37	3,36
Ir	37,42	37,26
Br	46,36	46,33.

Saltet löses i ungefär 4 delar vatten.

Specifika vigtsbestämningar:

3,027 vid + 20°,2

3,018 » + 20°,0.

Medeltal = 3,022 vid + 20°,1; molekylarvolym = 177,7.

Mätbara kristaller har jag icke lyckats erhålla.

Till de tre reagens, som bäst lämpa sig att skilja pentamin- och aquopentaminföreningar åt, förhåller sig bromidens lösning på följande sätt.

1. *Ferricyankalium:* genast riklig fällning af rödbruna kristaller, som bildade greniga, trappformiga aggregat.

2. *Natriumpyrofosfat:* alldeles som hydropentaminklorid (se sid. 422).

3. *Bariumhyposulfat:* fäller ej.

Vid *upphettning* af lösningen öfvergår saltet, åtminstone till stor del, i pentamintribromid, som utfaller och identifierades på samma sätt som vid kloriden (sid. 423).

Genom inverkan af konc. ammoniak i tillsmält rör på aquopentaminbromid har jag erhållit ett väl kristalliserande, lätt lösligt salt, som torde vara hexaminbromid, men hvilket ännu ej är tillräckligt undersökt.

Iridiumaquopentaminnitrat -- $Ir(NH_3)_5OH_2(NO_3)_3$. En lösning af aquopentaminhydrat, erhållen genom kokning af t. ex. pentamintriklorid med kali, försättes under afkylning till —5° med lika volym 32 %-ig salpetersyra. Fällningen affiltreras och tvättas med 5 %-ig salpetersyra samt alkohol.

Man kan äfven framställa saltet genom att fälla en lösning af aquopentaminklorid i 3 delar vatten med lika volym salpetersyra vid 0° o. s. v. Så erhålles 95 % af kloridens vigt eller 80 % af den beräknade mängden. Denna reaktion har sitt särskilda intresse, emedan den bevisar att i aquopentaminklorid alla tre kloratomerna lika lätt utbytas mot andra radikaler, i analogi med öfriga dylika föreningar.

Den på det ena eller andra sättet erhållna fällningen af aquopentaminnitrat visar sig under mikroskopet bestå af nästan rätvinkliga, rhombiska kristaller. Ett kvalitativt prof (glödgning

med soda o. s. v.) bevisade frånvaron af klor. På nitrat erhölls utslag medelst det vanliga ferrosulfat-profvet.

Analys: mellan papper pressadt salt förlorar något i vigt öfver svafvelsyra och vid 100° en molekyl vatten.

	Funnet:	Beräknadt:
H_2O	3,88	3,73
N (efter torkning vid 100°)	24,41	24,14.

1 del salt löses i ungefär 10 delar vatten vid + 17°.

Specifika vigtsbestämningar:

2,460 vid + 16°,9

2,460 » + 18°

Molekylarvolym = 195,9 vid + 17°,5.

En 5 %-ig lösning af nitratet försattes med följande reagens:

1. *Salpetersyra:* utfäller nitratet.

2. *Ferricyankalium:* riklig fällning af rödbruna, till greniga aggregat förenade, långa prismer; dock förekomma äfven enstaka kristaller af samma form som vid aquopentaminklorid.

3. *Natriumpyrofosfat:* likadan reaktion som vid aquopentaminklorid; fälda ur mera utspädd lösning, äro kristallfjällen tydligt sexsidiga.

4. *Bariumhyposulfat:* fäller ej.

Vid glödgning förpuffar saltet häftigt under starkt eldfenomen.

Vid lösningens kokning öfverföres det åtminstone delvis och vid det torra saltets upphettning till 100° fullständigt i

Iridiumpentaminnitrat.

Formel $Ir(NH_3)_5(NO_3)_3$. Saltets sammansättning bevisas af kväfvebestämningen å till 100° hettadt aquopentaminnitrat (sid. 425) och framgår äfven af dess reaktioner (se nedan). Beredt genom lösningens fällning med salpetersyra, bildar det mikroskopiska, kvadratiska kristaller.

En mättad lösning bereddes genom att lemna saltet i beröring med vatten under 3 dagar under då och då skeende om-

skakning. Jag fann, att 1 liter lösning innehåller 2,86 gr. salt och att 1 gr. salt löses i 349,4 gr. vatten vid + 16°.

Specifika vigtsbestämningar:

2,515 vid + 17°,8
2,506 » + 18°,7.

Medeltal = 2,510 vid + 18°,3; molekylarvolym = 184,9.

En mättad lösning af saltet försattes med följande reagens:

1. *Salpetersyra:* utfäller nitratet.

2. *Klorvätesyra* (rykande): genast hvit fällning af små, kvadratiska kristaller (nitratoklorid?).

3. *Platinaklorid:* ljusgula, utdraget sexsidiga taflor utföllo.

4. *Guldklorid:* långa, rhomboidala, gula kristaller utföllo.

5. *Kvicksilfverklorid:* fäller ej.

6. *Cyankvicksilfver:* fäller ej.

7. *Ferrocyankalium:* fäller ej.

8. *Ferricyankalium:* fäller ej.

9. *Ammoniumoxalat:* ringa, mikrokristallinisk, hvit fällning.

10. *Natriumpyrofosfat:* fäller ej.

11. *Bariumhyposulfat:* nästan genast riklig fällning af korta kristallnålar, som ofta bildade X-formiga aggregat.

12. *Klor* färgar lösningen violett.

Det är redan (sid. 425) nämdt att pentaminnitrat bildas vid kokning af en lösning af aquopentaminnitrat. Omvändt eger det egendomliga förhållandet rum, såsom JÖRGENSEN påpekar vid rhodiumföreningarna[1]), att pentaminnitrat vid lösningens kokning till större delen öfvergår i aquopentaminnitrat. 0,05 gr. kokades med 10 kbcm. vatten 1 timme, hvarpå lösningen afdunstades till halfva volymen, utan att något salt utföll vid afsvalning. 17,5 kbcm. vatten åtgå dock att lösa 5 cgr. pentaminnitrat. Lösningen gaf nu riklig fällning med ferricyankalium och natriumpyrofosfat, men ganska obetydlig med bariumhyposulfat, hvadan alltså det mesta öfverförts i aquopentaminnitrat.

[1]) Journ. f. prakt. Ch. Neue Folge 34, 407.

För vinnande af bättre öfversigt, lemnas här nedan en sammanställning af löslighetsförhållanden och molekylarvolymer hos de undersökta kloriderna, bromiderna och nitraten af aquopentamin- och pentaminserien. Som emellertid dessa bestämningar utförts vid något olika temperaturer, kan man icke vänta att möjligen befintliga lagbundenheter skola framträda särdeles skarpt.

Löslighet. Talen angifva huru många gram vatten, som erfordras att lösa 1 gram af saltet vid rumstemperatur.

	Klorid	Bromid	Nitrat
Aquopentamin	1,3	4	10
Pentamin	153	352	349.

Molekylarvolymer.

	Klorid	Bromid	Nitrat
Aquopentamin	161,4	177,4	195,9
Pentamin	143,3	159,6	184,9
Differens (en mol. vatten)	18,1	17,8	11,0

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1891. N:o 6.
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska laboratorium.

193. Triazolföreningar, framstälda af aldehyder och dicyanfenylhydrazin. I.

Af P. J. Holmquist.

[Meddeladt den 10 Juni 1891 genom P. T. Cleve.]

Såsom Bladin visat[1], bildas, om aldehyder i alkohollösning få inverka på dicyanfenylhydrazin, produkter af sammansättningen

$$\begin{array}{l} N{\equiv}C-C=NH \\ \qquad\quad | \qquad\quad\; H \\ \qquad\quad | \qquad\quad\; | \\ C_6H_5-N-N=C-R, \end{array}$$

hvilka sedan lätt genom oxidation öfverföras i de af honom först framstälda triazolföreningarne

$$\begin{array}{c} N-C-R \\ \| \quad\; \| \\ NC-C \quad N \\ \diagdown\;\diagup \\ N \\ | \\ C_6H_5 \end{array}.$$

Under docenten Bladins ledning har jag undersökt några aldehyders inverkan på dicyanfenylhydrazin och på denna väg framstält nya triazolderivat.

Under gången af undersökningen har det visat sig, att ej alla aldehyder lika lätt åstadkomma nämnda reaktion. Några syntes till en början ej på något sätt kunna förmås att reagera, under det att deremot andra blott genom svag och kortvarig

[1]) Öfversigt af K. Vet.-Akad. Förh. 1889 N:o 3, sid. 139.

uppvärmning i alkohollösning tillsamman med dicyanfenylhydrazin lätt och fullständigt gåfvo reaktionen.

Vid ett försök, som jag anstälde delvis till följd af ett råd af docent Bladin, upptäcktes det intressanta förhållandet, *att närvaron af blott en mycket liten qvantitet HCl i hög grad påskyndar reaktionen och föranleder erhållandet af ett qvantitativt utbyte af den önskade sammanslutningsprodukten.* Efter denna upptäckt blef det lätt att erhålla föreningar mellan dicyanfenylhydrazin och äfven sådana aldehyder (t. ex. furfurol, orto- och paraoxibenzaldehyd), som förut i rent tillstånd endast med stor svårighet kunnat förmås att inverka.

1.

Inverkan af kanelaldehyd på dicyanfenylhydrazin.

Denna aldehyd visade sig med lätthet reagera på dicyanfenylhydrazin äfven utan medverkan af klorvätesyra. Vid försöken förfors sålunda: Beräknade och noga afvägda mängder af de båda substanserna löstes i alkohol. Lösningarne förenades i en kolf, och blandningen uppvärmdes till kokning på vatten- eller sandbad. Småningom antager lösningen allt klarare röd färg, och inom en half timma ger ett på urglas uttaget prof med alkoholiskt kali ej någon rödviolett färgning, hvilket tyder på frånvaron af oangripen dicyanfenylhydrazin i reaktionsmassan. (Om spår af HCl tillsättes försiggår reaktionen på mindre än 5 minuter). Lösningen slås nu ut i en skål, och snart utkristalliserar den nya föreningen i fina, högröda nålar, som äro ganska svårlösliga i kall alkohol, lättlösligare i benzol, isättika och eter.

Efter några omkristalliseringar ur benzol erhölls föreningen ren. Den smälter vid 164° utan att sönderdelas.

Analyserna gåfvo i procent:

	Ber. för formeln $C_{17}H_{14}N_4$:
C = 74,5 %	74,4 %
H = 5,7 »	5,2 »
N = 20,4 »	20,4 »
100,6 %	100,0 %

Föreningen har sålunda sammansättningen $C_{17}H_{14}N_4$ och har bildats af dicyanfenylhydrazin och kanelaldehyd genom utträde af en molekyl H_2O.

I öfverensstämmelse med de af BLADIN framstälda analoga föreningarne måste denna förening uppfattas såsom *cinnamylendicyanfenylhydrazin* och ega konstitutionen

$$\begin{array}{l} N \equiv C - C = NH \\ \quad\;\; | \qquad\qquad\quad\;\; H \\ C_6H_5N - N = C \langle - CH : CH - C_6H_5 \,, \end{array}$$

hvarför ock dess förhållande till oxidationsmedel talar.

Fenylcinnamenylcyantriazol,

$$\begin{array}{l} \qquad\quad N - C - CH : CH - C_6H_5 \\ \qquad\quad \| \quad\; \| \\ N \equiv C - C \quad N \qquad\qquad\qquad = C_{17}H_{12}N_4 \,. \\ \qquad\quad \diagdown \diagup \\ \qquad\quad\; N - C_6H_5 \end{array}$$

Cinnamylendicyanfenylhydrazin löstes i mycket alkohol under uppvärmning, och till denna lösning sattes försigtigt i små portioner en alkohollösning af $FeCl_3$. Härvid förmärktes genast en liflig reaktion. Lösningen råkade i häftig kokning, och sedan den beräknade qvantiteten $FeCl_3$ tillsatts, försvann dess intensiva röda färg och efterträddes af en smutsigt brun färgning.

I stället för $FeCl_3$ kan såsom oxidationsmedel med fördel äfven användas salpetersyrlighet, beredd af klorvätesyra och en koncentrerad vattenlösning af KONO.

Efter fulländad reaktion koncentrerades lösningen något och slogs derefter ut i en skål, då den bildade produkten, som är mycket svårlöslig äfven i varm alkohol, hastigt utkristalliserade i fina hopfiltade nålar, som först voro svagt bruna, men efter några omkristalliseringar ur alkohol eller benzol erhöllos fullständigt färglösa.

Föreningens smältpunkt är 167,5° C.

Analyserna gåfvo i procent:

	Ber. för formeln $C_{17}H_{12}N_4$:
C = 75,3 %	75,0 %
H = 4,8 »	4,4 »
N = 20,4 »	20,6 »
100,5 %	100,0 %.

Analyserna motsvara sålunda sammansättningen på det väntade triazolderivatet, fenylcinnamenylcyantriazol

$$\begin{array}{l} \quad\quad\quad N\!-\!C = CH : CH\!-\!C_6H_5 \\ \quad\quad\quad \| \quad\;\; \| \\ N \equiv C\!-\!C \quad N \\ \quad\quad\quad \diagdown \; \diagup \\ \quad\quad\quad\; N\!-\!C_6H_5 \end{array}$$

Liksom BLADINS analoga triazoler innehåller äfven denna förening en nitrilgrupp och kan derföre genom lämplig behandling undergå de reaktioner, som karakterisera denna radikal. På grund häraf har jag framstält motsvarande karbonsyra, amid, tiamid, amidoxim. De beskrifvas i det följande.

Fenylcinnamenyltriazolkarbonsyra,

$$\begin{array}{l} \quad\quad\quad\quad N\!-\!C\!-\!CH : CH\!-\!C_6H_5 \\ \quad\quad\quad\quad \| \quad\;\; \| \\ HOOC\!-\!C \quad N \\ \quad\quad\quad\quad \diagdown \; \diagup \\ \quad\quad\quad\quad\; N\!-\!C_6H_5 \end{array}$$

Denna syra, som liknar förut af BLADIN framstälda triazolmonokarbonsyror, erhålles, om dess ofvan beskrifna nitril kokas med alkoholiskt kali. Ammoniak bortgår då i mängd, och efter tillsats af vatten och klorvätesyra utfaller karbonsyran (som är nästan alldeles olöslig i vatten) såsom ett segt harts, som dock snart stelnar. Detta harts löses lätt i varm etylalkohol, och ur denna lösning kristalliserar vid afsvalning syran i väl utbildade tafvelformiga kristaller, som hålla en molekyl $C_2H_5—OH$. Ur metylalkohol kristalliserar föreningen äfvenledes med en molekyl CH_3OH i fina nålar.

I rent tillstånd är karbonsyran färglös och smälter då vid 178° under gasutveckling.

Analyserna gåfvo i procent:

	Ber. för formeln $C_{17}H_{13}N_3O_2$:
C = 70,4 %	70,1 %
H = 4,6 »	4,5 »
N = 14,9 »	14,4 »

Syran är lättlöslig i alkalier men olöslig i mineralsyror. Hon är dock en svag syra. En vattenlösning af ammoniumsaltet sönderdelas så småningom, så att syran utfaller som ett amorft pulver, som vid tillsats af ammoniak ånyo löses. Kaliumsaltet är mycket lättlösligt i vatten och utskiljes derur vid koncentration i amorft tillstånd.

Kopparsaltet är en amorf, i vatten olöslig, blåhvit fällning, som erhålles, om neutrala lösningar af kopparsulfat och fenylcinnamenyltriazolkarbonsyrans ammoniumsalt blandas tillsamman.

Kopparbestämningen gaf i procent:

Cu 9,6 %. Ber. 9,8 för formeln $(C_{17}H_{12}N_3O_2)_2Cu$.

Oaktadt detta salt äfven under mikroskopet har fullkomligt amorft utseende, håller det dock i lufttorkadt tillstånd $2^1/_2$ molekyl vatten, som bortgå vid 130°.

Silfversaltet framställes ur ammoniumsaltet och silfvernitrat och är liksom kopparsaltet en amorf, i vatten olöslig fällning. Det håller, lufttorkadt, $^1/_2$ molekyl vatten, som bortgår vid 130°.

Analys af vattenfri substans gaf:

Ag = 27,1 %. Ber. 27,1 för formeln $C_{17}H_{12}N_3O_2Ag$.

Etyl- och metyleterarterna fås med lätthet, om torr klorvätegas inledes till mättning i en lösning af syran i motsvarande alkohol. Sedan lösningarne mättats med klorväte, fingo de stå några timmar i tillslutet kärl, hvarefter de koncentrerades på vattenbad, då klorvätet till största delen afdunstade. De derefter utkristalliserade produkterna togos på filtrum och tvättades med litet utspädd ammoniak för att aflägsna resten klorväte och spår

af oangripen karbonsyra. Efter några omkristalliseringar ur alkohol erhöllos eterarterna rena.

Metyletern kristalliserar ur alkohol i små nålar, hopade till vårtlika bildningar. Smältpunkt 149°.

En qväfvebestämning gaf i procent:

N = 14,0 %. Ber. 13,8 % för formeln $C_{18}H_{15}N_3O_2$.

Etyletern är lättlöslig i alkohol och kristalliserar derur i nålar, hopade till bollar. Smälter vid 148°.

Analyserna gåfvo i procent:

		Ber. för formeln $C_{19}H_{17}N_3O_2$:
C	= 71,7 %	71,5 %
H	= 5,9 »	5,3 »
N	= 13,7 »	13,0 »
O	—	10,2 »
		100,0 %.

Fenylcinnamenyltriazolkarbonsyrans amid,

```
          N—C . CH : CH—C6H5
          ‖   ‖
H2NOC—C   N                    = C17H14N4O.
        \/
        N—C6H5
```

För framställning af denna förening hafva två olika metoder följts.

Fenylcinnamenylcyantriazol behandlades under uppvärmning i alkohollösning med en treprocentig vattenlösning af vätesuperoxid vid närvaro af en ringa mängd kali. Vätesuperoxiden tillsattes i små portioner, så länge syrgas bortgick. Derefter neutraliserades kalit *genast* med klorvätesyra, och lösningen koncentrerades. Amiden kristalliserar ur denna lösning i små hvita nålar, hopade till bollar.

Det visade sig dock snart vid smältpunktbestämningen, att den på detta sätt erhållna produkten ej var ren. Smältpunkten förändrades nemligen betydligt efter hvarje omkristallisering, och

föreningen kunde ej fås att smälta skarpt. En qväfvebestämning gaf ock för låg qväfvehalt.

Sedan det efter flera försök visat sig fruktlöst att på detta sätt erhålla ren amid utan stor förlust af material, utgick jag från ofvan beskrifna etyleter af cinnamenyltriazolkarbonsyra, som i alkohollösning behandlades med koncentrerad ammoniak. På denna väg erhålles nära qvantitativt utbyte af den önskade föreningen. Framstäld på detta sätt, kristalliserar amiden i långa fina nålar, som smälta skarpt vid 198°.

En qväfvebestämning gaf i procent:

N = 19,4 %. Ber. 19,3 % för formeln $C_{17}H_{14}N_4O$.

Fenylcinnamenyltriazolkarbonsyrans tiamid,

$$\begin{array}{l} \quad\; N—C—CH:CH—C_6H_5 \\ \quad\;\; \| \quad \| \\ H_2NSCC \;\; N \\ \quad\;\; \diagdown \diagup \\ \quad\;\; N—C_6H_5 \end{array} \qquad = C_{17}H_{14}N_4S\,.$$

Af H_2S öfverföres fenylcinnamenylcyantriazol vid närvaro af H_3N i motsvarande tiamid. Denna förening har vackert svafvelgul färg, är lättlöslig i alkohol, mycket lättlöslig i benzol och smälter (renad efter framställningen genom några omkristalliseringar) vid 182°—183°. Utkristalliserad ur alkohol, håller föreningen 1 molekyl kristallalkohol, som bortgår under torkning vid 100°.

En svafvelbestämning gaf i procent:

S = 10,5 %. Ber. 10,5 % för formeln $C_{17}H_{14}N_4S$.

I samband med denna förening må omnämnas, att genom cinnamylendicyanfenylhydrazins behandling med svafvelväte i ammoniakalisk alkohollösning erhållits en förening, som säkerligen är en tiamid med sammansättningen

$$\begin{array}{l} H_2NSC—C=NH \\ \qquad\quad | \qquad\qquad\quad\; \diagup H \\ C_6H_5—N—N=C—CH:CH—C_6H_5 \end{array} \qquad = C_{17}H_{16}N_4S\,.$$

Denna förening, som i rent tillstånd smälter under sönderdelning vid 151°, öfvergår så lätt i ofvan beskrifna triazol-tiamid,

att dess framställande ej lyckas, så vida ej ren cinnamylendicyanfenylhydrazin användes. Eljest erhålles blott triazolföreningens svafvelgula tiamid. Den andra tiamiden är brandgul till färgen och kristalliserar ur alkohol i till bollar hopade nålar.

Fenylcinnamenyltriazenylamidoxim,

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad N{-}C{-}CH:CH{-}C_6H_5 \\ \begin{matrix}HON\\H_2N\end{matrix}\!\!>C{-}C\qquad N \\ \qquad\qquad\qquad N{-}C_6H_5 \end{array} = C_{17}H_{15}N_5O\,.$$

Fenylcinnamenylcyantriazol löstes i kokande alkohol och till denna lösning sattes en vattenlösning, innehållande en beräknad mängd H_2NOH (beredd af $H_2NOHHCl$ och Na_2CO_3). Efter en stunds fortsatt lindrig uppvärmning tillsattes vatten. Föreningen utfaller då såsom en något seg, hartsig fällning, som strax stelnar. Omkristalliserad ur alkohol, bildar denna substans små färglösa kristaller, som under gasutveckling smälta vid 203°—204°.

En qväfvebestämning gaf i procent:

$N = 23{,}2$ %. Ber. 22,9 för formeln $C_{17}H_{15}N_5O$.

Amidoximen är olöslig i alkalier. Löses, ehuru svårt, i klorvätesyra.

Vid behandling med acetanhydrid under lindrig uppvärmning öfvergår amidoximen glatt i sitt acetylderivat

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\qquad N{-}C{-}CH:CH{-}C_6H_5 \\ \begin{matrix}H_3C{-}COON\\H_2N\end{matrix}\!\!>C{-}C\qquad N \\ \qquad\qquad\qquad\qquad N{-}C_6H_5 \end{array} = C_{19}H_{17}N_5O_2\,.$$

Efter tillsats af vatten utfaller denna förening som en olja, som efter en stund stelnar. Smälter, renad genom några omkristalliseringar ur alkohol, vid 158° under gasutveckling.

Qväfvebestämningen gaf i procent:

$N = 20{,}5$ %. Ber. 20,2 för formeln $C_{19}H_{17}N_5O_2$.

Om lösningen af amidoximen i acetanhydrid uppvärmes till kokning, och derefter vatten tillsättes, utfaller ock en olja, som äfvenledes snart stelnar. Men denna produkt är temligen svårlöslig i kokande alkohol, hvarur den vid afsvalning kristalliserar i fina, nästan färglösa nålar, som smälta vid 201°—202°.

Denna förening är *fenylcinnamenyltriazenylazoximetenyl*

```
                                  N—C—CH : CH—C6H5
                                  ‖   ‖
H3C—C<O—N>C—C   N                         = C19H15N5O ,
      \N/      \ /
                N—C6H5
```

$$= C_{19}H_{15}N_5O ,$$

som har bildats genom vattenafspjelkning af föregående förening.

En analys gaf i procent:

		Ber. för formeln $C_{19}H_{15}N_5O$:
C	= 69,7 %	69,3 %
H	= 4,8 »	4,6 »

Fenylcinnamenyltriazol,

```
        N—C—CH : CH—C6H5
        ‖   |
    H—C    N
       \  /
        N—C6H5
```

$$= C_{16}H_{13}N_3 .$$

Det har ej lyckats mig att framställa denna förening i rent tillstånd. Den erhålles dock säkerligen såsom återstod efter kolsyrans bortgång, när fenylcinnamenyltriazolkarbonsyra upphettas till smältning. Den produkt, som på detta sätt erhölls, bestod af ett segt gulaktigt harts, som var lättlösligt i alkohol och benzol men ej ur något af dessa lösningsmedel kunde fås att kristallisera. Fäld ur benzol med gasolja, företer föreningen utseendet af gula flockar, som snart klibba tillhopa. Den liknar sålunda den af BLADIN framstälda difenyltriazol[1]).

Till följd af dessa förhållanden och den stora förlusten af material vid föreningens framställning har den ej kunnat blifva föremål för vidare undersökning.

---

[1]) Öfversigt af K. Vet.-Akad. Förh. 1889, N:o 3, sid. 152.

Oxidation af fenylcinnamenyltriazolkarbonsyra med kamäleon.

BLADIN har ådagalagt[1]) triazolkärnans beständighet mot oxidationsmedel och visat, att vid behandling af triazolföreningar med kamäleon sidokedjorna angripas och ersättas af karboxylradikaler. På detta sätt hafva framstälts fenyltriazoldi- och mono-karbonsyror af fenylmetyltriazolkarbonsyra.

Då det kunde vara af intresse att se, huru fenylcinnamenyltriazolkarbonsyra förhölle sig gent emot oxidationsmedel, har jag med denna syra anstält följande försök:

1 gram från kristallalkohol genom torkning befriad syra löstes i kalilut, och i denna lösning göts en vattenlösning af 1,1 gram kaliumpermanganat. Härvid inträdde genast (blandningens temperatur var ungefär 30°—40°) reaktion. Lösningen affärgades hastigt, och brunsten utföll. Samtidigt förmärktes en tydlig lukt af benzaldehyd. Något mera kamäleon tillsattes, hvarefter brunstenen affiltrerades och tvättades med varmt vatten. Filtratet uppvärmdes och surgjordes med klorvätesyra. Dervid bortgick mycket kolsyra, och ett hvitt harts afskildes. Genom upprepade omkristalliseringar ur vatten och alkohol aflägsnades förorenande benzoësyra, och erhölls en produkt, som under sönderdelning smälte vid 184° och äfven i öfrigt liknade BLADINS fenyltriazolkarbonsyra

$$\begin{array}{c} \mathrm{N-CH} \\ \| \quad \| \\ \mathrm{HOOC-C} \quad \mathrm{N} \\ \diagdown \diagup \\ \mathrm{N-C_6H_5} \end{array} \quad ^{2)}.$$

För ytterligare identifiering har jag af min oxidationsprodukt framstält ett silfversalt och af detta med jodmetyl en metyleter, hvarvid silfversaltets vattenhalt och metyleterns smältpunkt till

[1]) Öfversigt af K. Vet.-Akad. Förh. 1890, N:o 6, sid. 295.

[2]) Öfversigt af K. Vet.-Akad. Förh. 1890, N:o 6, sid. 298, N:o 9, sid. 470.

fullo bekräftade produktens identitet med BLADINS fenyltriazolkarbonsyra.

Häraf framgår, att vid inverkan af kamäleon på fenylcinnamenyltriazolkarbonsyra cinnamenylradikalen spränges vid sin dubbelbindning, hvarvid benzaldehyd och i första hand fenyltriazoldikarbonsyra bildas, hvilken sistnämnda, såsom af BLADINS undersökningar framgått, i fritt tillstånd i värme förlorar CO_2 och öfvergår i fenyltriazolmonokarbonsyra.

$$\begin{array}{l} \quad\quad\quad N-C-CH : \vdots CH-C_6H_5 \\ \quad\quad\quad \| \quad\; \| \\ HOOC-C \quad N \;\; + O_2 \vdots O \qquad = C_6H_5CHO + CO_2 + \\ \quad\quad\quad \diagdown\diagup \\ \quad\quad\quad N-C_6H_5 \qquad\qquad\qquad + C_6H_5N_3C_2H-COOH \end{array}$$

I betraktande af den lätthet, med hvilken cinnamenylgruppen i dessa triazolföreningar af kamäleon spränges vid sin dubbelbindning, har jag i syfte att möjligen erhålla

$$\begin{array}{l} \quad\quad N-C-COOH \qquad\qquad\qquad\qquad N-C-CH : CH-C_6H_5 \\ \quad\quad \| \quad\; \| \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \| \quad\; \| \\ NC-C \quad N \qquad \text{underkastat} \quad NC-C \quad N \\ \quad\quad \diagdown\diagup \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \diagdown\diagup \\ \quad\quad N-C_6H_5 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad N-C_6H_5 \end{array}$$

i isättiklösning oxidation med CrO_3. Detta har emellertid ej lyckats, ty i reaktionsåterstoden efter försöket återvans största delen af det använda fenylcinnamenylcyantriazol oangripen.

Fenyldibromcinnamenylcyantriazol,

$$\begin{array}{l} \quad\quad N-C-CHBrCHBrC_6H_5 \\ \quad\quad \| \quad\; \| \\ NC-C \quad N \\ \quad\quad \diagdown\diagup \\ \quad\quad N-C_6H_5 \end{array}.$$

Denna bromförening erhålles, om fenylcinnamenylcyantriazol behandlas med brom i eterlösning. Den kristalliserar ur alkohol i sidenglänsande hvita nålar, som smälta vid 147° och sönder-

delas vid 170°—175°. Föreningen förlorar lätt bromväte i luften, hvilket torde vara orsaken till, att analyserna ständigt gåfvo för låga bromvärden.

	Funnet:	Ber. för formeln $C_{17}H_{12}N_4Br_2$:
I.	Br = 36,2 %	37,0 %
II.	» = 36,5 »	

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1891. N:o 6.
Stockholm.

Om de befolkningsstatistiska formlerna för beräkning af dödligheten under första lefnadsåret.

Af G. ENESTRÖM.

[Meddeladt den 10 Juni 1891 genom D. G. LINDHAGEN.]

I.

Om man med $F^{(x)}$ betecknar antalet under året x lefvande födda barn och med $F^{(x)}f(t)$ den del af detta antal, som blifvit född under tidsintervallet $0/t$ ($t < 1$) räknadt från x-te årets början, kan antalet barn, som födas under tidsintervallet $t/t+dt$ representeras genom uttrycket

$$F^{(x)}f'(t)dt .$$

Betecknar man vidare med w_0 sannolikheten för ett nyfödt barn att dö under första lefnadsåret och med $w_0\varphi(t)$ sannolikheten för detta barn att dö under tidsintervallet $0/t$ ($t < 1$) räknadt från födelsen, blir

$$F^{(x)}f'(t)w_0\varphi(1-t)dt$$

uttrycket för antalet barn, som äro födda under tidsintervallet $t/t+dt$ af kalenderåret x och aflida före slutet af samma kalenderår. Utmärker man nu med $A^{(x)}$ hela antalet barn, som både födas och dö under kalenderåret x, blir således

$$A^{(x)} = \int_0^1 F^{(x)}f'(t)w_0\varphi(1-t)dt ,$$

eller, om man för korthetens skull sätter

$$\alpha = \int_0^1 f'(t)\varphi(1-t)dt,$$

$$A^{(x)} = \alpha w_0 F^{(x)}.$$

Men $w_0 F^{(x)}$ utmärker antalet under kalenderåret x födda barn, hvilka dö under första lefnadsåret, och således är α förhållandet mellan antalet barn, som både födas och dö under året x, och antalet barn, som födas under året x och dö innan de fyllt ett år.

Inom befolkningsstatistiken är storheten α af en viss betydelse vid beräkningen af dödligheten under första lefnadsåret. Låter man $\varDelta^{(x)}$ utmärka antalet under året x födda barn, hvilka dö innan de fyllt ett år, så är sannolikheten för ett nyfödt barn att dö under första lefnadsåret tydligen $\frac{\varDelta^{(x)}}{F^{(x)}}$. Emellertid äro de statistiska primäruppgifterna i allmänhet icke sådana, att $\varDelta^{(x)}$ kan direkt erhållas. Däremot kan man lätt i sammanhang med en allmän folkräkning vid slutet af året x bestämma antalet $L_0^{(x)}$ då kvarlefvande barn, hvilka äro födda under detta år. Subtraherar man nu $L_0^{(x)}$ från $F^{(x)}$, bör man, om emigration och immigration ej tagas i betraktande, erhålla antalet under året x aflidna barn, hvilka blifvit födda under året, d. v. s. $A^{(x)}$. Då nu enligt hvad nyss blifvit visadt

$$A^{(x)} = \alpha \varDelta^{(x)},$$

blir således

$$\varDelta^{(x)} = \frac{1}{\alpha}\left(F^{(x)} - L_0^{(x)}\right)$$

och

$$w_0 = \frac{1}{\alpha}\frac{F^{(x)} - L_0^{(x)}}{F^{(x)}}.$$

Finge man antaga, att barnsbörderna vore jämt fördelade öfver hela kalenderåret x, och att dödsfallen bland de nyfödda också vore jämt fördelade öfver hela första åldersåret, blefve

$$f(t) = t, \quad \varphi(t) = t,$$

och således

$$\alpha = \int_0^1 f'(t)\varphi(1-t)dt = \int_0^1 (1-t)dt = \tfrac{1}{2},$$

ett resultat, som också kan utan några matematiska formler härledas. Nu äro emellertid barnsbörderna ej jämt fördelade på de olika månaderna af ett kalenderår, och dödsfallen under de tre första lefnadsmånaderna äro relativt taget mycket talrikare än under den återstående delen af första åldersåret. Dock blir det fel, som uppkommer genom att antaga barnsbörderna vara jämt fördelade på de olika kalendermånaderna mycket obetydligt, så att man utan betänkligheter kan sätta $f(t) = t$. Däremot är det icke möjligt att sätta $\varphi(t) = t$, utan för $\varphi(t)$ måste en annan funktionsform väljas, som åtminstone approximativt representerar dödlighetens verkliga variation under första åldersåret. En sådan funktionsform är enligt MOSERS noggranna undersökningar[1] $\sqrt[4]{t}$, dock under förutsättning att de dödfödda räknas som lefvande födda, hvilka kort efter födelsen aflidit. Betecknar man med a antalet dödfödda under året x, blir således

$$A^{(x)} + a = (w_0F^{(x)} + a)\int_0^1 \sqrt[4]{t}\,dt = \frac{4}{5}(w_0F^{(x)} + a)$$

eller, om man substituerar $\alpha w_0F^{(x)}$ i stället för $A^{(x)}$,

$$\alpha w_0F^{(x)} + a = \frac{4}{5}(w_0F^{(x)} + a),$$

hvarur erhålles

$$\alpha = \frac{4}{5} - \frac{a}{5w_0F^{(x)}}.$$

Då nu, enligt Statistiska centralbyråns bearbetning af folkmängdsuppgifterna för decenniet 1871—1880, medeltalen för $F^{(x)}$, a och w_0 varit[2])

---

[1]) MOSER, *Die Gesetze der Lebensdauer* (Berlin 1839). Jag har ej haft tillgång till detta arbete, utan blott till det referat, som finnes i WITTSTEINS uppsats: *Die Mortalität in Gesellschaften mit successiv eintretenden und austretenden Mitgliedern* (Arch. der Mathem. und Phys. **39**, 1862, sid. 83).

[2]) *Bidrag till Sveriges officiela statistik. Befolkningsstatistik. Ny följd.* **XXII: 1** (Stockholm 1882), sid. XXII; **XXII: 3** (Stockholm 1885), sid. LV.

$$F^{(x)} = 133{,}730{\cdot}1, \quad a = 4{,}246{\cdot}9, \quad w_0 = 0{\cdot}13021,$$

blir för i fråga varande decennium

$$\alpha = 0{\cdot}80 - \frac{4{,}246{\cdot}9}{5 \cdot 0{\cdot}13021 \cdot 133{,}730{\cdot}1} = 0.7512\,.$$

Då man emellertid icke utan vidare får taga för afgjordt, att den af MOSER för mer än 50 år sedan med afseende på befolkningsförhållandena i Tyskland angifna formeln för dödlighetens variation under första lefnadsåret är användbar för nutida svenska förhållanden, kan en bestämning af värdet på α naturligtvis icke uteslutande grundas på denna formel. Och då vi ega en noggrann *Undersökning om dödligheten i första lefnadsåret*[1]) af F. TH. BERG, grundad på svenskt statistiskt material för åren 1860—1866, ligger det närmast till hands att söka draga nytta af de genom denna undersökning erhållna resultaten. Lättast skulle man ernå det åsyftade ändamålet, om man finge argumentera så, som om alla under året x födda barn vore födda vid årets midt; i detta fall skulle nämligen deras första åldersår komma att med sitt första halfår falla inom kalenderåret x, och då af BERGS undersökning framgår, att 75·93 % af alla under första lefnadsåret inträffade dödsfall falla på förra hälften af detsamma, skulle däraf omedelbart följa, att $\alpha = 0{\cdot}7593$, hvilket värde mycket nära öfverensstämmer med det, som erhållits genom användning af MOSERS formel. På grund af den ojämna fördelningen af dödsfallen på de olika månaderna af första lefnadsåret är det emellertid icke rådligt att stanna vid denna ungefärliga beräkning af α. Jag har därför utfört en noggrannare sådan, med hänsyn tagen både till fördelningen af dödsfallen på de 12 första lefnadsmånaderna och till fördelningen af barnsbörderna på de olika kalendermånaderna. Af Statistiska centralbyråns bearbetning af folkmängdsuppgifterna för åren 1871—1880 framgår[2]), att bland 1380 under ett år inträffade barnsbörder följande antal kommer på hvar och en af de 12 kalendermånaderna:

---

[1]) Statistisk tidskrift **3**, 1869, sid. 435—492.

[2]) *Befolkningsstatistik. Ny följd.* **XXII: 1**, sid. XXIX.

Kalendermånad	Antal barnsbörder	Kalendermånad	Antal barnsbörder
januari	119	juli	107
februari	121	augusti	105
mars	122	september	122
april	120	oktober	113
maj	115	november	110
juni	110	december	116

Å andra sidan har BERG genom den ofvan citerade undersökningen funnit, att af 1000 lefvande födda barn följande antal kvarlefver vid hvar och en af de 12 första lefnadsmånadernas slut:

	Antal kvarlefvande		Antal kvarlefvande
vid första lefnadsmånadens slut	953	vid sjunde lefnadsmånadens slut	893
» andra » »	937	» åttonde » »	888
» tredje » »	924	» nionde » »	882
» fjärde » »	914	» tionde » »	877
» femte » »	906	» elfte » »	872
» sjätte » »	899	» tolfte » »	867

För att erhålla antalet barn, som aflida inom en, två, tre, o. s. v. månader efter födelsen, behöfva vi tydligen blott subtrahera de ofvan angifna talen från 1000 och för att erhålla sannolikheten för ett nyfödt barn att dö inom en, två, tre, o. s. v. månader böra de sålunda funna talen divideras med 1000. Sannolikheten att dö inom 12 månader blir således 0·133, sannolikheten att dö inom 11 månader 0·128, o. s. v.

Antaga vi nu först, att alla barn, som födas under loppet af en månad, äro födda vid månadens början, så är det klart, att af de 119 i januari födda barnen 119 · 0·133 barn dö före kalenderårets slut, att af de 121 i februari födda barnen 121 · 0.128 barn dö före kalenderårets slut, o. s. v., så att hela antalet före kalenderårets slut aflidna barn blir

$$119 \cdot 0{\cdot}133 + 121 \cdot 0{\cdot}128 + 122 \cdot 0{\cdot}123 + 120 \cdot 0{\cdot}118 + 115 \cdot 0{\cdot}112 + 110 \cdot 0{\cdot}107 + 107 \cdot 0{\cdot}101 + 105 \cdot 0{\cdot}094 + 122 \cdot 0{\cdot}086 + 113 \cdot 0{\cdot}076 + 110 \cdot 0{\cdot}063 + 116 \cdot 0{\cdot}047 = 137{\cdot}27 \text{ barn.}$$

Men före första åldersårets slut dö tydligen

$$1380 \cdot 0{\cdot}133 = 183{\cdot}54 \text{ barn,}$$

och således blir värdet af α under det gjorda antagandet

$$\frac{137{\cdot}27}{183{\cdot}54} = 0{\cdot}7479.$$

Antaga vi åter, att alla barn, som födas under loppet af en månad, äro födda vid månadens slut, blir hela antalet före kalenderårets slut aflidna barn i stället:

$$119 \cdot 0{\cdot}128 + 121 \cdot 0{\cdot}123 + 122 \cdot 0{\cdot}118 + 120 \cdot 0{\cdot}112 + 115 \cdot 0{\cdot}107 + 110 \cdot 0{\cdot}101 + 107 \cdot 0{\cdot}094 + 105 \cdot 0{\cdot}086 + 122 \cdot 0{\cdot}076 + 113 \cdot 0{\cdot}063 + 110 \cdot 0{\cdot}047 + 116 \cdot 0{\cdot}000 = 122{\cdot}055 \text{ barn,}$$

och värdet af α blir således under detta antagande

$$\frac{122{\cdot}055}{183{\cdot}54} = 0{\cdot}6647.$$

Det rätta värdet på α måste tydligen ligga emellan de två sålunda erhållna talen, men något närmare till det större af dem, och då det aritmetiska mediet är 0·7063, kan det rätta värdet ej gärna vara större än 0·72, hvilket tal med omkring 0·03 skiljer sig från det ur MOSERS formel härledda. Denna ej obetydliga differens gör det önskvärdt att söka utfinna någon annan metod för beräkning af α.

För detta ändamål skola vi begagna oss af den å sid. 442 påpekade relationen mellan $F^{(x)}$, $L_0^{(x)}$ och $A^{(x)}$, hvilken är giltig, om man bortser från emigration och immigration[1]). Man erhåller på grund häraf ekvationen

$$A^{(x)} = F^{(x)} - L_0^{(x)} .$$

---

[1]) Under decenniet 1871—1880 uppgick årliga emigrantöfverskottet för åldern 0/1 år i medeltal till blott 72. Se *Befolkningsstatistik. Ny följd.* **XXII: 1,** sid. XLVII.

och på samma sätt

$$A^{(x+1)} = F^{(x+1)} - L_0^{(x+1)}.$$

Betecknar man nu med $D_0^{(x+1)}$ antalet lefvande födda barn, hvilka under året $x+1$ dö i första lefnadsåret, blir, eftersom bland dessa $A^{(x+1)}$ tillhöra samma års kull, antalet af dem, som äro inräknade i $D_0^{(x+1)}$ och tillhöra föregående, d. v. s. x-te årets kull,

$$D_0^{(x+1)} - A^{(x+1)} = D_0^{(x+1)} - F^{(x+1)} + L_0^{(x+1)}.$$

Hela antalet under året x födda barn, hvilka aflidit i första lefnadsåret blir således

$$\Delta^{(x)} = F^{(x)} - L_0^{(x)} + D_0^{(x+1)} - F^{(x+1)} + L_0^{(x+1)},$$

hvaraf

$$\alpha = \frac{A^{(x)}}{\Delta^{(x)}} = \frac{F^{(x)} - L_0^{(x)}}{F^{(x)} - L_0^{(x)} + D_0^{(x+1)} - F^{(x+1)} + L_0^{(x+1)}}.$$

Kände man nu för en följd af år $F^{(x)}$, $D_0^{(x)}$ och $L_0^{(x)}$, skulle man kunna erhålla en serie af värden på α och härur beräkna både sannolika värdet af α och sannolika felet i detta värde. Och eftersom i Statistiska centralbyråns årsberättelser de tre nämda storheterna äro för hvarje år angifna, synes det, som om man skulle kunna på detta sätt erhålla värdet af α med stor noggrannhet. Olyckligtvis äro dock blott de årliga värdena af $F^{(x)}$ och $D_0^{(x)}$ funna genom direkt observation, under det att af 10 sukcessiva värden af $L_0^{(x)}$ endast *ett* är på detta sätt funnet, men de öfriga nio *beräknade*. Beräkningen har skett så, att först formeln $L_0^{(x)} = F^{(x)} - \frac{3}{4} D_0^{(x)}$ användts, och, sedan en beräkning af öfriga åldersklassers styrka på liknande sätt verkställts, skilnaden mellan hela den faktiska befolkningen och den beräknade befolkningen vid slutet af året x fördelats på de olika åldersklasserna i proportion till deras styrka[1]). Men eftersom den exakta formeln är $L_0^{(x)} = F^{(x)} - \alpha\Delta^{(x)}$, så är det klart, att beräkningen är riktig blott under förutsättning, att $\alpha = \frac{3}{4}$ och

[1]) Jämför *Befolkningsstatistik. Ny följd.* **XI** (Stockholm 1870), sid. XVIII.

$D_0^{(x)} = A^{(x)}$, af hvilka den sista förutsättningen är giltig blott för en stationär befolkning, den första åter just skulle med tillhjälp af $L_0^{(x)}$ kontrolleras. Häraf följer, att de beräknade värdena af $L_0^{(x)}$ äro för ett definitivt bestämmande af α oanvändbara. Emellertid hindrar detta icke, att man med tillhjelp af dem kan erhålla åtminstone ett ungefärligt värde på α, som det kan vara af intresse att jämföra med de förut härledda, och jag har därför medels den ofvan angifna formeln beräknat α för hvart och ett af åren 1871—1880. Resultaten af beräkningarna angifvas i följande tabell:

År	Värdet af α	År	Värdet af α
1871	0·7312	1876	0·7631
1872	0·7453	1877	0·7425
1873	0·7254	1878	0·7830
1874	0·7449	1879	0·8134
1875	0·7593	1880	0·7966

Medelvärdet är 0·7599, således mycket nära öfverensstämmande med det, som erhölls enligt MOSERS formel, men då de olika värdena variera mellan 0·7254 och 0·8134, alltså inom ganska vida gränser, förlorar denna öfverensstämmelse en stor del af sin betydelse.

Af det föregående framgår, att värdet af α är omkring $^3/_4$, men att detta värde är behäftadt med en ganska stor osäkerhet, som ej genom det tillgängliga statistiska materialet kan aflägsnas. För att erhålla ett fullt tillförlitligt värde behöfves alltså en ny undersökning, grundad på noggranna och färska uppgifter om antalet barn, som aflidit under de olika månaderna af första lefnadsåret. Möjligen skulle man genom bearbetning af dessa uppgifter äfven kunna utröna, om någon väsentlig ändring i värdet af α är att vänta i sammanhang med den från årtionde till årtionde sjunkande dödligheten i första lefnadsåret.

Till dess ett sådant tillförlitligt värde af α erhållits, kan man provisoriskt begagna värdet $^3/_4$, men med villkor att vid

beräkningen af w_0 endast sådana formler komma till användning, där α är multipliceradt med ett relativt litet tal. Formeln

$$w_0 = \frac{1}{\alpha} \frac{F^{(x)} - L_0^{(x)}}{F^{(x)}}$$

är därför tills vidare obrukbar.

II.

Af de formler, som blifvit föreslagna att användas för beräkning af mortaliteten under det första lefnadsåret, är den enklaste utan tvifvel den, som begagnats vid Statistiska centralbyråns bearbetning af folkmängdsuppgifterna för år 1870, och hvilken har följande utseende:

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad w_0 = \frac{D_0^{(x)}}{F^{(x)}}.$$

För att pröfva noggrannheten af denna formel, erinra vi oss, att $D_0^{(x)}$ utgöres dels af de barn, hvilka födas under året x och dö under samma år, dels af de barn, som födas under året $x - 1$ och dö under året x, innan de fyllt ett år, och att antalet af de förra är $\alpha\Delta^{(x)}$, antalet af de senare åter $(1 - \alpha)\Delta^{(x-1)}$, hvadan

$$D_0^{(x)} = \alpha\Delta^{(x)} + (1 - \alpha)\Delta^{(x-1)} = \Delta^{(x)} - (1 - \alpha)\left(\Delta^{(x)} - \Delta^{(x-1)}\right).$$

Då nu enligt själfva definitionen den exakta formeln för w_0 är

$$w_0 = \frac{\Delta^{(x)}}{F^{(x)}},$$

blir

$$w_0 = \frac{D_0^{(x)}}{F^{(x)}} + (1 - \alpha)\frac{\Delta^{(x)} - \Delta^{(x-1)}}{F^{(x)}}.$$

Häraf följer, att ekv. (1) är exakt blott om $\Delta^{(x)} = \Delta^{(x-1)}$, hvilket villkor, ifall mortaliteten antages förblifva oförändrad, innebär, att antalet barnsbörder under de två åren $x - 1$ och x bör vara lika stort. Är detta åter ej förhållandet, blir for-

meln (1) ej fullt exakt, och det fel, man begår genom att använda denna formel, belöper sig till

$$(1-\alpha)\frac{\varDelta^{(x)}-\varDelta^{(x-1)}}{F^{(x)}}.$$

Teoretiskt taget kan ingen öfre gräns för detta fel fastställas, enär det numeriska värdet däraf oafbrutet tilltager, då storheten $\frac{F^{(x-1)}}{F^{(x)}}$ växer, och blir oändligt stort på samma gång som denna. I praktiken däremot kan $\frac{F^{(x-1)}}{F^{(x)}}$ icke betydligt skilja sig från 1. För att få en ungefärlig föreställning om felets storlek i vanliga fall, skola vi bestämma dess värde med hänsyn till Sveriges befolkning dels för år 1879, dels för hela decenniet 1871—1880. Då, enligt hvad ofvan angifvits, mortaliteten under det första lefnadsåret under decenniet 1871—1880 uppgick till 0·13021, och då under åren 1878 och 1879 föddes respektive 134,464 och 139,043 barn, blir, om man använder värdet $\alpha = \frac{3}{4}$, felets storlek för år 1879 approximativt

$$\frac{1}{4}\,\frac{0{\cdot}13021(139{,}043-134{,}464)}{139{,}043} = 0{\cdot}00107.$$

Då vidare årliga antalet lefvande födda barn under decenniet 1871—1880 i medeltal uppgick till 133,730 och under decenniet 1870—1879 i medeltal till 132,288, blir felets storlek för decenniet 1871—1880 approximativt

$$\frac{1}{4}\,\frac{0{\cdot}13021(133{,}730-132{,}288)}{133{,}730} = 0{\cdot}00035.$$

Beräknar man mortaliteten för hela decenniet, är felet således mycket ringa, men kan, om man afser blott ett enskildt år, uppgå till mer än en enhet af tredje decimalen.

I afsikt att erhålla ett ännu noggrannare värde för mortaliteten under första lefnadsåret, har Statistiska centralbyrån vid bearbetningen af folkmängdsuppgifterna för år 1880 utbytt formeln (1) mot följande[1])

---

[1]) Se *Befolkningsstatistik. Ny följd.* **XXII: 3,** sid. LIII.

(2) . . . . $$w_0 = \frac{\frac{3}{4}D_0^{(x)} + \frac{1}{4}D_0^{(x+1)}}{F^{(x)}}.$$

För att pröfva noggrannheten äfven af denna formel eliminera vi $D_0^{(x)}$ och $D_0^{(x+1)}$ medels ekvationerna

$$D_0^{(x)} = \alpha\varDelta^{(x)} + (1 - \alpha)\varDelta^{(x-1)}$$
$$D_0^{(x+1)} = \alpha\varDelta^{(x+1)} + (1 - \alpha)\varDelta^{(x)}$$

och erhålla på detta sätt

$$w_0 = \frac{\frac{3}{4}\alpha\varDelta^{(x)} + \frac{3}{4}(1 - \alpha)\varDelta^{(x-1)} + \frac{1}{4}\alpha\varDelta^{(x+1)} + \frac{1}{4}(1 - \alpha)\varDelta^{(x)}}{F^{(x)}}$$
$$= \frac{\varDelta^{(x)}}{F^{(x)}} + \frac{1}{4}\,\frac{\alpha\varDelta^{(x+1)} - (3 - 2\alpha)\varDelta^{(x)} + 3(1 - \alpha)\varDelta^{(x-1)}}{F^{(x)}}.$$

Införa vi äfven här värdet $\alpha = \frac{3}{4}$, blir

$$w_0 = \frac{\varDelta^{(x)}}{F^{(x)}} + \frac{3}{16}\,\frac{\varDelta^{(x+1)} - 2\varDelta^{(x)} + \varDelta^{(x-1)}}{F^{(x)}}.$$

Häraf framgår, att formeln (2) är riktig, om antalet under de tre åren $x - 1$, x, $x + 1$ födda barn bilda en aritmetisk progression; eljes är formeln blott approximativ, och felet uppgår till

$$\frac{3}{16}\,\frac{\varDelta^{(x+1)} - 2\varDelta^{(x)} + \varDelta^{(x-1)}}{F^{(x)}}.$$

Visste man nu, att talen $F^{(x)}$ enligt sin natur måste kontinuerligt tillväxa eller kontinuerligt aftaga, så kunde man visserligen hafva skäl att antaga, att formeln (2) vore mera noggrann än formeln (1). Att emellertid talen $F^{(x)}$ icke äro så beskaffade, framgår af följande sammanställning af antalet i Sverige lefvande födda barn under åren 1871—1880.

År	Antal lefvande födda barn	År	Antal lefvande födda barn
1871	127,333	1876	135,890
1872	126,983	1877	138,476
1873	131,643	1878	134,464
1874	133,249	1879	139,043
1875	135,958	1880	134,262

Det är således klart, att man icke *a priori* kan veta, om formeln (2) är mera noggrann än formeln (1). Och då man icke häller kan angifva någon öfre gräns för det fel, som genom användande af formeln (2) kan uppstå, enär felets numeriska värde oafbrutet ökas, då antingen $\frac{F(x+1)}{F(x)}$ eller $\frac{F(x-1)}{F(x)}$ tillväxer, så synes vinsten af utbytet vara ganska problematisk. För att äfven här få en föreställning om, huru stort felet i vanliga fall kan blifva, skola vi tillämpa formeln (2) på samma fall som nyss. Då under år 1880 föddes 134,262 barn, blir för år 1879 felets storlek approximativt

$$\frac{3}{16} \frac{0{\cdot}13021(134{,}262 - 2 \cdot 139{,}043 + 134{,}464)}{139{,}043} \doteq -0{\cdot}00164\,,$$

d. v. s. numeriskt större, än om formeln (1) användts. Då vidare årliga antalet lefvande födda barn under decenniet 1872—1881 i medeltal utgjorde 134,277, blir felets storlek för hela decenniet 1871—1880 approximativt

$$\frac{3}{16} \frac{0{\cdot}13021(134{,}277 - 2 \cdot 133{,}730 + 132{,}288)}{133{,}730} = -0{\cdot}00016\,,$$

hvilket fel är numeriskt blott hälften så stort som enligt formeln (1). Denna omständighet får dock ej tolkas som ett säkert bevis för att i detta fall formeln (2) är noggrannare än formeln (1); de vid felets beräknande använda konstanterna $^3/_4$ och $0{\cdot}13021$ äro nämligen blott approximativa samt variera något från ett decennium till ett annat, och om mera noggranna värden af dessa konstanter begagnats, hade felet enligt formeln (2) möjligen blifvit större än enligt formeln (1).

Af det föregående framgår, att om man använder medelvärden för en följd af år, båda formlerna (1) och (2) i vanliga fall kunna utan olägenhet användas för beräkning af mortaliteten under första lefnadsåret. Då emellertid deras giltighet teoretiskt taget är inskränkt till mycket speciella fall, vore det önskvärdt att erhålla en tredje formel, hvilken gäller utan någon inskränk-

ning af denna art. Och en sådan formel kan lätt härledas genom att utgå från den ofvan funna relationen

$$D_0^{(x)} = \alpha \Delta^{(x)} + (1 - \alpha)\Delta^{(x-1)}.$$

Då nämligen

$$\Delta^{(x)} = w_0 F^{(x)}, \quad \Delta^{(x-1)} = w_0 F^{(x-1)},$$

blir

$$D_0^{(x)} = \alpha w_0 F^{(x)} + (1 - \alpha) w_0 F^{(x-1)}$$

och således

$$(3) \qquad w_0 = \frac{D_0^{(x)}}{\alpha F^{(x)} + (1-\alpha) F^{(x-1)}} = \frac{D_0^{(x)}}{F^{(x)} + (1 - \alpha)(F^{(x-1)} - F^{(x)})}.$$

Denna formel äger framför formlerna (1) och (2) det företrädet, att den icke grundar sig på något speciellt antagande om det sätt, hvarpå $F^{(x)}$ varierar. Den äger dessutom framför formeln (2) det företrädet, att den icke förutsätter kännedom om antalet aflidna under året $x+1$, och således är fullkomligt analog med den formel, som af Statistiska centralbyrån blifvit använd för de högre lefnadsåldrarna vid bearbetningen af 1880 års folkmängdsuppgifter.

Vid härledningen af formlerna (1), (2) och (3) har ingen hänsyn blifvit tagen till emigrationen och immigrationen. Då formlerna (1) och (2) äfven utan afseende härpå äro behäftade med fel, hvilkas storlek icke kan teoretiskt bestämmas, lönar det ej mödan att söka korrigera dem genom att taga hänsyn till emigrationen och immigrationen, hälst af lätt insedda skäl antalet emigranter och immigranter under första lefnadsåret måste vara mycket litet. I formeln (3) kan det däremot vara skäl att anbringa en sådan korrektion, och man kan därvid förfara på följande sätt.

Beteckna vi med $\varepsilon^{(x)}$ antalet under året x födda barn, hvilka emigrerat före slutet af samma år, kunna vi antaga, att dessa barn i genomsnitt äro födda vid årets midt och emigrera vid början af sista kvartalet d. v. s. i en ålder af $\frac{1}{4}$ år. Då nu enligt den å sid. 445 anförda tabellen $\frac{25}{133}$ d. v. s. 19 % af alla under första lefnadsåret inträffade dödsfall komma på andra kvar-

talet af detta år, blir hela antalet dödsfall bland de emigrerade $\varepsilon^{(x)}$ barnen före slutet af året x approximativt $0{\cdot}19 w_0 \varepsilon^{(x)}$. På samma sätt finner man, att, om $\varepsilon^{(x-1)}$ utmärker antalet under året $x-1$ födda barn, som emigrera före detta års slut, och $\varepsilon_1^{(x)}$ antalet under året $x-1$ födda barn, som under året x emigrera innan de fyllt ett år, antalet dödsfall, som inträffa bland de $\varepsilon^{(x-1)}+\varepsilon_1^{(x)}$ barnen under året x men förr än de fyllt ett år, kan approximativt uttryckas genom $0{\cdot}24\, w_0 \varepsilon^{(x-1)} + 0{\cdot}11\, w_0 \varepsilon_1^{(x)}$. Hela antalet under året x inträffade dödsfall i första lefnadsåret bland dem, som emigrerat, uppgår således till $0{\cdot}19\, w_0 \varepsilon^{(x)} + 0{\cdot}24\, w_0 \varepsilon^{(x-1)} + 0{\cdot}11\, w_0 \varepsilon_1^{(x)}$. Då nu storheterna $\varepsilon^{(x)}$, $\varepsilon^{(x-1)}$ och $\varepsilon_1^{(x)}$ böra vara ungefär lika stora, kan man sätta $\varepsilon^{(x-1)} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon^{(x)} + \varepsilon_1^{(x)}\right)$ och det nyssnämda antalet dödsfall kan således uttryckas genom $0{\cdot}31\, w_0 \varepsilon^{(x)} + 0{\cdot}23\, w_0 \varepsilon_1^{(x)}$, hvilket uttryck åter kan ersättas af $0{\cdot}27\, w_0\left(\varepsilon^{(x)} + \varepsilon_1^{(x)}\right)$. Men $\varepsilon^{(x)} + \varepsilon_1^{(x)}$ utmärker hela antalet barn, som under året x emigrerat i första lefnadsåret, och om detta antal betecknas med $E_0^{(x)}$, blir antalet dödsfall, som under året x inträffat bland de emigrerade, innan de fyllt ett år, approximativt

$$0{\cdot}27\, w_0 E_0^{(x)}.$$

På samma sätt finner man, att om antalet barn, som under året x immigrerat i första lefnadsåret, kallas $I_0^{(x)}$, dödsfallen bland dessa, innan de fyllt ett år, blifva approximativt

$$0{\cdot}27\, w_0 I_0^{(x)}.$$

De observerade $D_0^{(x)}$ dödsfallen böra därför ökas med $0{\cdot}27\, w_0 E_0^{(x)}$ och minskas med $0{\cdot}27\, w_0 I_0^{(x)}$, för att man skall kunna erhålla ett uttryck för antalet dödsfall, som under året x inträffat i första lefnadsåret bland de $F^{(x-1)} + F^{(x)}$ barn, hvilka blifvit födda under de två åren $x-1$ och x. Man erhåller således ekvationen

$$D_0^{(x)} + 0{\cdot}27\, w_0\left(E_0^{(x)} - I_0^{(x)}\right) = \alpha w_0 F^{(x)} + (1-\alpha) w_0 F^{(x-1)},$$

hvaraf

$$(3') \qquad w_0 = \frac{D_0^{(x)}}{F^{(x)} + (1-\alpha)\left(F^{(x-1)} - F^{(x)}\right) - 0{\cdot}27\left(E_0^{(x)} - I_0^{(x)}\right)}.$$

För att kunna afgöra, huru nära de tre formlerna (1), (2) och (3′) öfverensstämma, har jag med tillhjälp af dem beräknat dödligheten under första lefnadsåret i Sverige 1871—1880. För $F^{(x-1)}$ och $F^{(x)}$ har jag därvid tagit medeltalet födda under åren 1870—1879 och 1871—1880, för $D_0^{(x)}$ och $D_0^{(x+1)}$ medeltalet döda under åren 1871—1880 och 1872—1881, och för $E_0^{(x)} - I_0^{(x)}$ medelemigrantöfverskottet under åren 1871—1880. Då nu på detta sätt följande värden erhållas:

$$F^{(x-1)} = 132{,}288\,, \quad F^{(x)} = 133{,}730$$
$$D_0^{(x)} = 17{,}365\,, \quad D_0^{(x+1)} = 17{,}415$$
$$E_0^{(x)} - I_0^{(x)} = 72\,,$$

blir, under förutsättning att i formeln (3′) värdet $\alpha = \frac{3}{4}$ användes,

$$\frac{D_0^{(x)}}{F^{(x)}} = \frac{17{,}365}{133{,}730} = 0{\cdot}12985\,;$$

$$\frac{\frac{3}{4}D_0^{(x)} + \frac{1}{4}D^{(x+1)}}{F^{(x)}} = \frac{17{,}377{\cdot}5}{133{,}730} = 0{\cdot}12994\,;$$ [1]

$$\frac{D_0^{(x)}}{F^{(x)} + \frac{1}{4}(F^{(x-1)} - F^{(x)}) - 0{\cdot}27(E_0^{(x)} - I_0^{(x)})} = \frac{17{,}365}{133{,}350} = 0{\cdot}13022\,.$$

Alla tre formlerna gifva således, om man medtager blott tre decimaler, $w_0 = 0{\cdot}130$, och öfverensstämmelsen mellan dem är följaktligen ganska stor.

Vid härledningen af formeln (3) hafva vi förutsatt, att α och w_0 bibehålla samma värde under de två åren $x - 1$ och x. I verkligheten variera emellertid båda dessa storheter i någon mån från ett år till ett annat (jämför särskildt för α tabellen å sid. 448). Att ändra formeln (3) så, att den passar äfven för variabelt α, medför tydligen inga svårigheter, men denna ändring är i praktiken utan betydelse, så länge man icke har några användbara statistiska data för direkt beräkning af α, utan måste

[1]) I *Befolkningsstatistik. Ny följd.* **XXII: 3,** sid. LV angifves det enligt formeln (2) beräknade värdet vara 0·13021. Det är mig obekant, på hvilket sätt man gått till väga för att erhålla detta resultat, hvilket märkvärdigt nog i det allra närmaste öfverensstämmer med det enligt formeln (3′) erhållna värdet.

nöja sig med det ungefärliga värdet $^3/_4$ för de båda åren $x-1$ och x. Hvad åter angår den omständigheten, att w_0 ej har alldeles samma värde under de två åren $x-1$ och x, så är det tydligen omöjligt att taga hänsyn härtill, enär man eljes icke på den inslagna vägen skulle kunna komma till något som hälst direkt resultat, och samma förhållande gäller äfven med afseende på formlerna (1) och (2).

Önskar man erhålla en formel, som icke är grundad på förutsättningen, att värdet af w_0 är lika stort för två sukcessiva år, kan detta visserligen mycket lätt ske genom att utgå från den å sid. 447 bevisade formeln

$$\Delta^{(x)} = F^{(x)} - L_0^{(x)} + D_0^{(x+1)} - F^{(x+1)} + L_0^{(x+1)};$$

ur denna följer nämligen omedelbart

$$(4) \quad . \; . \; w_0 = \frac{\Delta^{(x)}}{F^{(x)}} = \frac{F^{(x)} - L_0^{(x)} + D_0^{(x+1)} - F^{(x+1)} + L_0^{(x+1)}}{F^{(x)}}.$$

Vilja vi äfven här anbringa en korrektion med hänsyn till emigrationen och immigrationen, och låta vi $\iota^{(x)}$ hafva samma betydelse för immigranterna, som $\varepsilon^{(x)}$ enligt den å sid. 453 gifna definitionen äger för emigranterna, böra vi utbyta

$$F^{(x)} - L_0^{(x)} \quad \text{mot} \quad F^{(x)} - \left[L_0^{(x)} + \varepsilon^{(x)} - \iota^{(x)} - 0{\cdot}19\, w_0(\varepsilon^{(x)} - \iota^{(x)})\right],$$

$$D_0^{(x+1)} \quad \text{mot} \quad D_0^{(x+1)} + 0{\cdot}27\left(E_0^{(x+1)} - I_0^{(x+1)}\right),$$

$$F^{(x+1)} - L_0^{(x+1)} \quad \text{mot}$$

$$F^{(x+1)} - \left[L_0^{(x+1)} + \varepsilon^{(x+1)} - \iota^{(x+1)} - 0{\cdot}19\, w_0\left(\varepsilon^{(x+1)} - \iota^{(x+1)}\right)\right].$$

Eftersom man nu utan nämnvärdt fel kan antaga, att $\varepsilon^{(x+1)} = \varepsilon^{(x)}$ och $\iota^{(x+1)} = \iota^{(x)}$, blir den korrigerade formeln efter vederbörlig reduktion och lösning i afseende på w_0

$$(4') \quad . \; . \; . \; . \; w_0 = \frac{F^{(x)} - L_0^{(x)} + D_0^{(x+1)} - F^{(x+1)} + L_0^{(x+1)}}{F^{(x)} - 0{\cdot}27\,(E_0^{(x+1)} - I_0^{(x+1)})}.$$

Emellertid är denna formel för svenska förhållanden af föga värde, enär, såsom redan förut påpekats, $L^{(x)}$ endast för hvart tionde år är gifvet genom direkt observation, hvadan af de båda

storheterna $L_0^{(x)}$ och $L_0^{(x+1)}$ åtminstone *en* alltid är beräknad enligt formeln $L_0^{(x)} = F^{(x)} - \frac{3}{4} D_0^{(x)}$; och om vi använda sådana beräknade värden för $L_0^{(x)}$, återföras vi i självfva verket till formeln (2). Dock kunna vi medels formeln (4′) erhålla ett medelvärde för mortaliteten under åren 1870—1879, enär i detta medelvärde alla de genom beräkning erhållna storheterna $L_0^{(x)}$ försvinna. Man finner nämligen lätt, att medelvärdet af uttrycket

$$F^{(x)} - L_0^{(x)} + D_0^{(x+1)} - F^{(x+1)} + L_0^{(x+1)}$$

under de tio åren x, $x+1$, ... $x+9$ är

$$\tfrac{1}{10}\left(F^{(x)} - L_0^{(x)} - F^{(x+10)} + L_0^{(x+10)} + D_0^{(x+1)} + \ldots + D_0^{(x+10)}\right),$$

i hvilket uttryck inga andra L_0 än $L_0^{(x)}$ och $L_0^{(x+10)}$ förekomma. Beteckna vi nu med $M^{(x)}$ medelvärdet af $E_0^{(x)} - I_0^{(x)}$ under samma tio år, blir hela medelvärdet af nämnaren i formeln (4′)

$$\tfrac{1}{10}(F^{(x)} + \ldots + F^{(x+9)}) - 0{\cdot}27\, M^{(x+1)}$$

och således medelvärdet för w_0

$$\frac{F^{(x)} - L_0^{(x)} - F^{(x+10)} + L_0^{(x+10)} + D_0^{(x+1)} + \ldots + D_0^{(x+10)}}{F^{(x)} + \ldots + F^{(x+9)} - 2{\cdot}7\, M^{(x+1)}}.$$

Sätta vi nu $x = 1870$, blir

$$F^{(x)} = 119{,}838\,,\quad L_0^{(x)} = 106{,}633\,,\quad F^{(x+10)} = 134{,}262\,,$$
$$L_0^{(x+10)} = 120{,}749\,,$$

$$D_0^{(x+1)} + \ldots + D_0^{(x+10)} = 173{,}649\,,\quad F^{(x)} + \ldots + F^{(x+9)} = 1{,}322{,}877\,,$$
$$M^{(x+1)} = 72$$

och således för decenniet 1870—1879

$$w_0 = \frac{173{,}341}{1{,}322{,}682{\cdot}6} = 0{\cdot}13105\,.$$

Stockholm 1891. Kongl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 48. 1891. № 7.

Onsdagen den 9 September.

INNEHÅLL:

Tillkännagafs, att Akademiens utländske ledamot, f. d. Professorn vid universitetet i Göttingen, Geheimerådet WILHELM ERNST WEBER med döden afgått.

Med anledning af Kongl. Maj:ts remiss å ingifna besvär öfver stadgar, som af Konungens Befallningshafvande i Upsala län blifvit fastställda för fiskets bedrifvande vid samma läns Östersjökuster, afgåfvo Hrr S. LOVÉN och F. A. SMITT infordradt utlåtande, som af Akademien för dess del godkändes.

Från Assistenten vid kemiska stationen i Kalmar O. L. HULANDER hade inkommit berättelse om den resa, som han i egenskap af Byzantinsk stipendiat utfört, och hvarunder han företrädesvis uppehållit sig vid landtbruksinstitutet i Göttingen, men äfven besökt några andra agrikulturkemiska laboratorier och

försöksstationer i Tyskland, nämligen Wiesbaden, Darmstadt, Halle och Möckern.

H:r NILSON dels redogjorde för innehållet af nyssnämnda reseberättelse af Assistenten HULANDER, och dels meddelade och refererade en uppsats af Professor O. WIDMAN: »Om cymols konstitution»*.

H:r HILDEBRAND redogjorde för den berättelse, som Docenten vid Lunds universitet S. SÖDERBERG afgifvit öfver den resa, hvilken han såsom Letterstedts stipendiat utfört för arkeologiska forskningar och studier i Holland, Belgien, Frankrike, Schweiz, norra Italien och Österrike-Ungarn samt på de Britiska öarne.

H:r SMITT dels anmälde en värdefull gåfva till Riksmuseum af etnografiska föremål från aflidne Svensk-Norske Konsuln i Yeddo P. VAN DER CHIJS, och dels meddelade en fortsättning af »Mittheilungen des ornithologischen Komitees der Königl. Schwedischen Academie der Wissenschaften. Bearbeitung von C. R. SUNDSTRÖM». (Se Bihang till K. Vet.-Akad. Handl.), äfvensom en afhandling af Med. Kandidaten E. HOLMGREN: »Bidrag till kännedomen om foglarnes osteologi». (Se Bihang etc.).

H:r MITTAG-LEFFLER meddelade en uppsats af Docenten A. BERGER: »Om en användning af de Bernoulliska funktionerna vid några serieutvecklingar»*.

Sekreteraren öfverlemnade för intagande i Akademiens skrifter följande uppsatser: 1:o) »Om formeln för beräkning af kapitalvärdet vid ensidig öfverlefvelse-kapitalförsäkring», af Prof. R. RUBENSON*; 2:o) »Om två isomera dioximido-bernstensyror», af Docenten H. G. SÖDERBAUM*; 3:o) »Geodätische Azimuthbestimmung auf der Sternwarte in Lund, und trigonometrische Verbindung der Sternwarte mit dem Hauptdreiecksnetz des Königl. Generalstabes», af honom sjelf. (Se Bihang etc.).

Med anledning deraf, att innevarande år 100 år förflutit sedan Bergianska stiftelsen grundades, beslöt Akademien, på hemställan af Professor Bergianus H:r WITTROCK, att till minne

deraf och af stiftarne, bröderne BERGIUS, låta anordna en enkel fest i sin hörsal.

Följande skänker anmäldes.

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

Kristiania. *Videnskabsselskabet.*
Forhandlinger. Aar 1890: 1—8. 8:o.
Oversigt. Aar 1890. 8:o.
Amsterdam. *K. Akademie van Wetenschappen.*
Verhandelingen. Afd. Natuurkunde. D. 28. 1890. 4:o.
» » Letterkunde. D. 19. 1890. 4:o.
Verslagen en Mededelingen. » » (3) D. 7. 1891. 8:o.
Jaarboek. Jaar 1890. 8:o.
Småskrift. 1. 8:o.
Baltimore. *Peabody institute.*
Annual report. 24. 1891 $^{4}/_{6}$. 8:o.
Batavia. *K. Natuurkundig Vereeniging in Nederlandsch Indië.*
Natuurkundig Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië. D. 50. 1891. 8:o.
Berlin. *K. Akademie der Wissenschaften.*
Abhandlungen. Jahr 1890. 4:o.
Sitzungsberichte. Jahr 1890: 41—53; 1891: 1—40. 8:o.
— *K. Preussiska regeringen.*
Die K. Observatorien für Astrophysik, Meteorologie und Geodäsie bei Potsdam. Berlin 1890. 4:o.
— *Deutsche Entomologische Gesellschaft.*
Deutsche entomologische Zeitschrift. Jahrg. 1891: H. 1. 8:o.
— *Entomologischer Verein.*
Berliner entomologische Zeitschrift. Bd. 36 (1891): H. 1. 8:o.
— *Deutsche Geologische Gesellschaft.*
Zeitschrift. Bd. 42 (1890): H. 1-4. 8:o.
Bern. *Allgemeine Schweizerische Gesellschaft für die gesammten Naturwissenschaften.*
Neue Denkschriften. Bd. 30: Abth. 2; 31. Zürich 1890. 4:o.
Jahresversammlung 73 (1890) in Davos. Verhandlungen. 8:o.
Session » » à » Compte rendu. 8:o.
— *Naturforschende Gesellschaft.*
Mittheilungen. Jahr 1890: N:o 1244—1264. 8:o.
Bonn. *Naturhistorischer Verein der Preussischen Rheinlande . . .*
Verhandlungen. Jahrg. 48 (1891): H. 1. 8:o.
Boston. *American academy of arts and sciences.*
Proceedings. Vol. 25 (1889/90). 8:o.
— *Society of natural history.*
Proceedings. Vol. 25: P. 1. 1890. 8:o.
Bruxelles. *Société Belge de microscopie.*
Annales. T. 13: F. 3; 14—15. 1890—91. 8:o.
Bulletin. Année 16 (1889/90): N:o 1—11. 8:o.

Buenos Aires. *Museo nacional.*
Anales. Entr. 17. 1891. Fol.
— *Sociedad cientifica Argentina.*
Anales. T. 30 (1890): Entr. 1–4; 31 (1891): 1–6. 8:o.
Calcutta. *Indian museum.*
SCLATER, W. L., Catalogue of Mammalia. P. 2. 1891. 8:o.
Cambridge, U. S. *Museum of comparative zoology.*
Bulletin. Vol. 20: N:o 6–8; 21: 1–5. 1890—91. 8:o.
Canada. *Geological and natural history survey of Canada.*
Rapport annuel. Vol. 3 (1887/88): P. 1–2 & Atlas. Ottawa. 8:o.
Summary report of the operations to $^{31}/_{12}$ 1887. Ottawa. 8:o.
Contributions to Canadian palæontology. 8:o Series. Vol. 1: P. 3. WHITEAVES, J. F., Fossils from the Devonian rocks of the Mackenzie river basin. 1891.
» » » » 4:o Series. Vol. 3: 1. COPE, E. D., Vertebrata from the tertiary and cretaceous rocks of the NW. territory. 1891.
Catalogue of Canadian plants. P. 5. Acrogens by J. MACOUN. 1890. 8:o.
PEARSON, W. H., List of Canadian Hepaticæ. 1890. 8:o.
Cincinnati. *Observatory of the university.*
Publications. 11. 1891. 4:o.
Danzig. *Naturforschende Gesellschaft.*
Schriften. N. Folge. Bd. 7: H. 4. 1891. 8:o.
Delft. *École polytechnique.*
Annales. T. 6: L. 1–4. 1890—91. 4:o.
Dorpat. *Naturforscher-Gesellschaft bei der Universität.*
Schriften. 6. HEERWAGEN, F., Studien über die Schwingungsgesetze der Stimmgabel und über die elektromagnetische Anregung. 1890. 4:o.
Sitzungsberichte. Bd. 9: H. 2 (1890). 8:o.
Dublin. *R. Irish academy.*
Transactions. Vol. 29: P. 15–16. 1891. 4:o.
»Cunningham memoirs». N:o 6. 1890. 4:o.
Proceedings. (3) Vol. 1: N:o 5. 1891. 8:o.
Emden. *Naturforschende Gesellschaft.*
Jahresbericht. 75 (1889/90). 8:o.
Erlangen. *Physikalisch-Medicinische Societät.*
Sitzungsberichte. H. 23. 1891. 8:o.
Genève. *Société de physique et d'histoire naturelle.*
Mémoires. T. 31: P. 1. 1890—91. 4:o.
Güstrow. *Verein der Freunde der Naturgeschichte in Mecklenburg.*
Archiv. Jahr 44 (1890). 8:o.
BACHMANN, F., Die landeskundliche Literatur über die Grossherzogthümer Mecklenburg. 1888. 8:o.
Haarlem. *Teylers tweede Genootschap.*
Archives du musée Teyler. (2) Vol. 3: P. 6. 1891. 4:o.
Halifax. *Nova Scotian institute of natural science.*
Proceedings and transactions. Vol. 7: P. 4 (1889/90). 8:o.

(Forts. å sid. 474.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1891. N:o 7.
Stockholm.

Om formeln för beräkning af kapitalvärdet vid ensidig öfverlefvelse-kapitalförsäkring.

Af R. Rubenson.

[Meddeladt den 9 September 1891.]

Den här åsyftade formeln innebär det matematiska uttrycket för följande

Problem. En m-årig person A (den s. k. försörjaren) försäkrar sig till förmån för en viss n-årig person B på det vilkor, att denna vid slutet af A:s dödsår erhåller ett kapital $= 1$, så framt han öfverlefver A. Hvad är denna summas kapitalvärde, eller, m. a. o. huru stor premie skall A erlägga en gång för alla för en sådan försäkring?

Detta problem, som för närvarande, af skäl som längre ned skall angifvas, icke kan fullt exakt lösas, har emellertid af en mängd försäkringsteoretiker erhållit en approximativ lösning, tillräckligt noggrann för alla praktiska användningar. De teoretiska undersökningarna hafva nemligen alla ledt till följande genom sin relativa enkelhet och symmetri anmärkningsvärda approximativa formel

$$P_{(m),n} = \tfrac{1}{2}\left\{1 - \left(1 - \frac{1}{q}\right) R_{m,n} - \frac{D_{m+1}}{D_m} R_{m+1,n} + \frac{D_{n+1}}{D_n} R_{m,n+1}\right\}, \quad (1)$$

i hvilken

$P_{(m),n}$ betecknar det sökta kapitalvärdet;

$R_{m,n}$ » det närvarande värdet af en genast började kombinerad lifränta, utgående vid hvarje års början, så länge A och B båda lefva;

$q = 1 + \frac{p}{100}$ = räntefoten, deri p = procenten;

$D_m = \frac{a_m}{q^m}$ = det diskonterade antalet qvarlefvande m-åriga personer tillhörande A:s kategori, då a_m betecknar deras antal i mortalitetstabellen för denna kategori af personer;

$D_n = \frac{b_n}{q^n}$ = det diskonterade antalet qvarlefvande n-åriga personer tillhörande B:s kategori, då b_n betecknar deras antal i mortalitetstabellen för denna kategori af personer.

Med parentesen omkring m i uttrycket $P_{(m),n}$ utmärkes att den m-åriga personen är försörjaren. Vore den n-åriga personen försörjare, blefve naturligtvis formeln

$$P_{m,(n)} = \tfrac{1}{2}\left\{1 - \left(1 - \frac{1}{q}\right) R_{m,n} - \frac{D_{n+1}}{D_n} R_{m,n+1} + \frac{D_{m+1}}{D_m} R_{m+1,n}\right\} \qquad (2)$$

Sammanläggas eqvationerna (1) och (2), erhålles, om deras summa tecknas med $P_{m,n}$

$$P_{m,n} = 1 - \left(1 - \frac{1}{q}\right) R_{m,n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

hvilket är den kända formeln för kapitalvärdet af en *ömsesidig* öfverlefvelse-kapitalförsäkring, d. v. s. en sådan, der försäkringssumman, när en af de begge försäkrade personerna aflider, tillfaller den andra.

Emedan formeln (1) endast eger approximativ giltighet, måste man för dess bevisande göra något antagande, som ehuru ej allmängiltigt, dock kan anses tillnärmelsevis vara rigtigt. Vanligen utgår man härvid från det antagande, att vid början af A:s dödsår är sannolikheten för att B skall öfverlefva honom lika stor med sannolikheten för motsatsen, hvarvid man dock plägar fästa uppmärksamheten derpå, att detta antagande endast då eger exakt giltighet, när de båda personerna hafva samma ålder och borde hafva tillagt, »när de tillhöra samma kategori», d. v. s. när deras dödlighet bestämmes ur en och samma mortalitetstabell.

Svårigheten att lösa problemet om ensidig öfverlefvelseförsäkring ligger väsentligen deruti, att man stipulerar som vilkor för kapitalets utbetalande att B öfverlefver A, men kapitalet först utfaller vid slutet af A:s dödsår. Det kan nemligen inträffa, att B visserligen lefver vid A:s dödstillfälle, men sjelf dör innan årets slut, i hvilket fall naturligtvis kapitalet utfaller efter B:s död och tillfaller dennas arfvingar. Mycket lättare och fullt exakt kan deremot problemet lösas, om kapitalet blott skall utbetalas i den händelse, att B fortfarande lefver vid slutet af A:s dödsår. Under denna förutsättning finner man genom de vanliga metoderna för beräkning af kapitalvärdet följande formel:

$$P_{(m),n} = 1 - R_{m,n} + \frac{D_{n+1}}{D_n} R_{m,n+1} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Det vanliga beviset för den approximativa giltigheten af formeln (1) kan nu sägas bestå deruti, att man söker de tilläggstermer till (4) hvarigenom vilkoret att B fortfarande lefver en tid efter A:s död, åtminstone till slutet af hans dödsår, upphäfves. För att få dessa tilläggstermer betjenar man sig af det ofvan angifna antagandet, att sannolikheten är lika stor för att B öfverlefver A, som att A öfverlefver B inom A:s dödsår[1]).

Detta antagande, på hvilket alla af mig kända bevis för formeln (1) grunda sig, synes mig vara af den beskaffenhet, att det icke annat än i nödfall, d. v. s. om intet annat och bättre stode att finna, hade bort göras, i synnerhet som man alls icke à priori kan bedöma huru nära detsamma öfverensstämmer med verkligheten. Endast så framt man på förhand kände formelns rigtighet, vore man i stånd att à posteriori öfvertyga sig om att det gjorda antagandet vore tillräckligt noggrant, hvilken omständighet visar dess olämplighet att tjena som premiss för beviset.

---

[1]) Se KARUP: Handbuch der Lebensversicherung, 2:te Aufl. p. 350—353; HABERL: Lehrbuch der politischen Arithmetik p. 331—333; G. ELOWSON: Mathematisk Theorie för Lifräntor och Lifförsäkringar p. 69—70.

Ännu olämpligare synes mig den metod vara, som ZILLMER använder[1]) för att bevisa formeln (1). Sedan han på vanligt sätt deducerat formeln (4), gällande med det vilkor att B ännu lefver vid *slutet* af A:s dödsår, härleder han en analog formel, hvari antages att kapitalet utbetalas, så framt blott B upplefvat *början* af A:s dödsår. Aritmetiska mediet mellan de sålunda för dessa båda fall funna värdena på $P_{(m),n}$ anser nu ZILLMER vara det rätta kapitalvärdet motsvarande det i problemet uppställda vilkoret, hvilket han stödjer på den satsen, att, när A och B dö inom samma år, lika många fall böra inträffa då A dör före B, som då B dör före A, således samma antagande som vid den vanliga metoden att bevisa formelns giltighet.

Jag skall nu söka bevisa formeln (1) genom ett antagande som förefaller mig så mycket naturligare, som detsamma mångenstädes inom andra områden af försäkringsteorien användes och derjemte nödvändiggöres af obekantskapen med den funktion, som representerar serien af de vid olika åldrar qvarlefvande personernas antal i en mortalitetstabell.

Låt a_m, såsom förut, beteckna antalet m-åriga qvarlefvande, tillhörande kategorien A, och b_n antalet n-åriga qvarlefvande af kategorien B, så är sannolikheten för A att lefva om p år, d. v. s. vid fylda $m+p$ års ålder, $\frac{a_{m+p}}{a_m}$, och sannolikheten för honom att dö under sitt $(m+p+1)$:sta år är $\frac{a_{m+p} - a_{m+p+1}}{a_m}$. Dela vi detta hans dödsår i s lika stora delar och söka sannolikheten för att A upplefver r sådana s:te delar af året, men dör inom den $(r+1)$:sta s:te delen, så är denna sannolikhet naturligtvis

$$\frac{a_{m+p+\frac{r}{s}} - a_{m+p+\frac{r+1}{s}}}{a_m}.$$

Söka vi vidare sannolikheten för att B lefver vid slutet af den årsdel, under hvilken A antages aflida, så få vi såsom uttryck för denna sannolikhet

[1]) Se D:r A. ZILLMER: Die mathematischen Rechnungen bei Lebens- und Rentenversicherungen. 2:te Aufl., Berlin 1887, p. 101.

$$\frac{b_{n+p+\frac{r+1}{s}}}{b_n}.$$

Sannolikheten för att båda dessa händelser inträffa är följaktligen

$$\frac{\left(a_{m+p+\frac{r}{s}} - a_{m+p+\frac{r+1}{s}}\right) \cdot b_{n+p+\frac{r+1}{s}}}{a_m \cdot b_n}.$$

Nu finnas i mortalitetstabellerna inga värden på de qvarlefvandes antal för bråkdelar af år, d. v. s. för a och b med brutna indices. Vi måste derföre på vanligt sätt antaga, att talen i tabellen för delar af året fås genom enkel proportionering.

Således är

$$a_{m+p+\frac{r}{s}} = a_{m+p} - \frac{r}{s}(a_{m+p} - a_{m+p+1})$$

och

$$a_{m+p+\frac{r+1}{s}} = a_{m+p} - \frac{r+1}{s}(a_{m+p} - a_{m+p+1}),$$

och sammalunda

$$b_{n+p+\frac{r+1}{s}} = b_{n+p} - \frac{r+1}{s}(b_{n+p} - b_{n+p+1})$$

Insättas dessa värden i ofvanstående uttryck, erhålles

$$\frac{\frac{1}{s} \cdot (a_{m+p} - a_{m+p+1})\left[b_{n+p} - \frac{r+1}{s}(b_{n+p} - b_{n+p+1})\right]}{a_m b_n}$$

eller

$$\frac{\frac{1}{s}(a_{m+p} - a_{m+p+1})b_{n+p}\left(1 - \frac{r+1}{s}\right) + \frac{r+1}{s^2}(a_{m+p} - a_{m+p+1})b_{n+p+1}}{a_m b_n}$$

eller

$$\frac{s-r-1}{s^2}\left[\frac{a_{m+p}\, b_{n+p}}{a_m b_n} - \frac{a_{m+p+1} b_{n+p}}{a_m b_n}\right] +$$
$$+ \frac{r+1}{s^2}\left[\frac{a_{m+p}\, b_{n+p+1}}{a_m b_n} - \frac{a_{m+p+1} b_{n+p+1}}{a_m b_n}\right].$$

Detta är sannolikheten för att A upplefver $\frac{r}{s}$ år utöfver p år, men dör före utgången af följande s:te dels år, hvaremot B då ännu är vid lif. Göres $r = 0$ fås sannolikheten för att A dör

i åldern mellan $m+p$ och $m+p+\frac{1}{s}$ år, medan B upplefver åldern $n+p+\frac{1}{s}$. Göres $r=1$ fås sannolikheten att A lefver vid åldern $m+p+\frac{1}{s}$ men dör innan han uppnått åldern $m+p+\frac{2}{s}$ år, medan B ännu lefver vid $n+p+\frac{2}{s}$ års ålder, o. s. v. Göres slutligen $r=s-1$ (det högsta värde r kan antaga) har man sannolikheten för att A upplefver åldern $m+p+\frac{s-1}{s}$, men dör innan han uppnått $m+p+1$ år, medan B deremot uppnår motsvarande ålder $n+p+1$. Således är sannolikheten att A uppnår *någon* s:te del af det år, i hvars början han blef $m+p$ år gammal, men ej upplefver slutet af denna s:te del, medan deremot B ännu lefver vid denna senare tidpunkt, summan af alla de värden som fås, om uti föregående uttryck successivt insättes $r=0, 1, 2, \ldots, s-1$. Denna sannolikhet blir följaktligen:

$$\left(\frac{a_{m+p}\,b_{n+p}}{a_m b_n}-\frac{a_{m+p+1}\cdot b_{n+p}}{a_m b_n}\right)\sum_{r=0}^{r=s-1}\frac{s-r-1}{s^2}+$$

$$+\left(\frac{a_{m+p}\,b_{n+p+1}}{a_m b_n}-\frac{a_{m+p+1}\cdot b_{n+p+1}}{a_m b_n}\right)\cdot\sum_{r=0}^{r=s-1}\frac{r+1}{s^2}.$$

Men nu är

$$\sum_{r=0}^{r=s-1}\frac{r+1}{s^2}=\frac{s+1}{2s}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2s}$$

och således

$$\sum_{r=0}^{r=s-1}\frac{s-r-1}{s^2}=1-\sum_{r=0}^{r=s-1}\frac{r+1}{s^2}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2s}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2s}.$$

I ju flera delar året delas eller ju mindre delarne blifva, dess närmare nalkas vi vår egentliga uppgift, som är att söka sannolikheten för att A dör vid någon tidpunkt under sitt $(m+p+1)$:sta år och B lefver vid hans frånfälle. Denna fråga be-

svaras exakt i limes, d. v. s. när vi göra $s = \infty$; men då blifva de båda summorna sins emellan lika och antaga värdet $^1/_2$.

Vi få således följande matematiska uttryck på sannolikheten att A dör inom det $(p+1)$:sta året räknadt från innevarande tid och att B lefver vid hans dödsfall:

$$\frac{1}{2}\frac{a_{m+p}b_{n+p} - a_{m+p+1}b_{n+p} + a_{m+p}b_{n+p+1} - a_{m+p+1}b_{n+p+1}}{a_m b_n} \qquad \text{(a)}$$

eller om för korthetens skull täljaren i detta bråk betecknas med T_p

$$\frac{1}{2}\frac{T_p}{a_m b_n}.$$

Emedan nu $a_m b_n$ är det ursprungliga antalet par, som tänkes taga ifrågavarande försäkring, så är $\frac{1}{2}T_p$ antalet af dem, till hvilka vid $(p+1)$:sta årets slut försäkringssumman 1 skall utbetalas. Den summa, som vid sagda tid skall utgå, är således äfven $\frac{1}{2}T_p$ och dess närvarande eller kapitalvärde följaktligen $\frac{1}{2}\frac{T_p}{q^{p+1}}$. För att få kapitalvärdet af allt, som i en framtid skall utbetalas, har man derföre att summera detta uttryck från $p = 0$ till $p = \infty$, hvaraf erhålles

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{T_0}{q} + \frac{T_1}{q^2} + \frac{T_2}{q^3} + \ldots + \text{ in inf.}\right\}$$

eller, emedan det ursprungliga parantalet var $a_m b_n$, blifver kapitalvärdet af hvarje särskild sådan försäkring, hvilket är $P_{(m).n}$

$$P_{(m),n} = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{T_p}{a_m b_n q^{p+1}}.$$

Vi uppdela nu enligt (a) T_p i sina fyra termer och erhålla på detta sätt fyra summor, hvar och en fortgående från $p = 0$ till $p = \infty$, hvilket gifver:

$$P_{(m),n} = \frac{1}{2}\left\{\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{a_{m+p}b_{n+p}}{a_m b_n q^{p+1}} - \sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{a_{m+p+1}b_{n+p}}{a_m b_n q^{p+1}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{a_{m+p}b_{n+p+1}}{a_m b_n q^{p+1}} - \sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{a_{m+p+1}b_{n+p+1}}{a_m b_n q^{p+1}}\right\}$$

eller

$$P_{(m),n} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{q}\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{a_{m+p}D_{n+p}}{a_mD_n} - \frac{1}{q}\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{a_{m+p+1}D_{n+p}}{a_mD_n} + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{a_{m+p}D_{n+p+1}}{a_mD_n} - \sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{a_{m+p+1}D_{n+p+1}}{a_mD_n}\right\} \quad . . (5)$$

Emedan nu

$$\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{a_{m+p}D_{n+p}}{a_mD_n} = \frac{Sa_mD_n}{a_mD_n} = R_{m,n}$$

kan man, om till qvantiteten inom klammern adderas $+1 - \frac{a_mD_n}{a_mD_n}$ och den senare af dessa termer införes i sista summan, hvarigenom denna summa öfvergår till $\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{a_{m+p}D_{n+p}}{a_mD_n} = R_{m,n}$, gifva eqvationen (5) följande form:

$$P_{(m),n} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{q}R_{m,n} - \frac{1}{q}\cdot\frac{a_{m+1}}{a_m}R_{m+1,n} + \frac{D_{n+1}}{D_n}R_{m,n+1} - R_{m,n} + 1\right\} \quad (6)$$

Emedan vidare $a_m = D_mq^m$ och $a_{m+1} = D_{m+1}q^{m+1}$, har man $\frac{1}{q}\cdot\frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{D_{m+1}}{D_m}$, och om detta insättes i (6) samt termerna något omordnas:

$$P_{(m),n} = \frac{1}{2}\left\{1 - \left(1 - \frac{1}{q}\right)R_{m,n} - \frac{D_{m+1}}{D_m}R_{m+1,n} + \frac{D_{n+1}}{D_n}R_{m,n+1}\right\}$$

eller eqvationen (1).

Det här gifna beviset för formeln (1) hvilar således uteslutande på det antagande, att talen i hvar och en af de använda mortalitetstabellerna under loppet af ett år kunna anses proportionella med tiden, eller m. a. o. att kurvan för de qvarlefvande kan betraktas såsom rätlinig mellan början och slutet af ett och samma år. Det förutsätter således ingen relation mellan talen i de båda tabellerna, och det gjorda antagandet innebär egentligen ingenting annat än att året är en så liten del af den högsta

i tabellen förekommande lefnadsåldern, att förändringen i de qvarlefvandes antal derunder kan anses proportionel med tiden. Endast vid den tidigaste barnaåldern är som bekant detta antagande icke tillåtet.

Att detta antagande är tillräckligt för att $P_{(m), n}$ skall kunna uttryckas förmedelst formeln (1) kan äfven ådagaläggas sålunda: Beteckna vi med $f(0)$ antalet af qvarlefvande $m+p$-åriga och sålunda sätta $f(0) = a_{m+p}$ och i analogi dermed $\varphi(0) = b_{n+p}$, vidare $f(1) = a_{m+p+1}$ och $\varphi(1) = b_{n+p+1}$, hvarvid vi således taga till origo eller nedre gräns början af det $(p+1)$:sta året och till öfre gräns dess slut och vi derjemte låta x beteckna en del hvilken som helst af detta år, så hafva vi, om dx är ett oändligt litet tillskott af tiden utöfver x inom året, sannolikheten för att A upplefver tiden x inom det $(p+1)$:sta året, men dör inom tiden $x+dx$, medan B lefver vid sistnämde tidpunkt, om vi kalla denna sannolikhet dW

$$dW = \frac{f(x) - f(x+dx)}{a_m} \cdot \frac{\varphi(x+dx)}{b_u},$$

hvilket, om andra och högre digniteter af dx negligeras, kan skrifvas sålunda:

$$dW = -\frac{f'(x)\varphi(x)dx}{a_m b_n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Sannolikheten för att A dör under året jemte det att B lefver vid hans frånfälle blir derföre

$$W = -\frac{\int_0^1 f'(x)\varphi(x)dx}{a_m b_n} = \frac{\int_1^0 f'(x)\varphi(x)dx}{a_m b_n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

hvarest $f(x)$ och $\varphi(x)$ äro de kurvor, som representera det kontinuerliga aftagandet af de qvarlefvandes antal under loppet af det $(p+1)$:sta året. Detta värde på W är således generelt och erfordrar i allmänhet för sin lösning kännedomen af funktionsformerna f och φ.

Göra vi nu det antagandet att inom årets lopp dessa kurvor kunna betraktas såsom räta linier, eller sätta

$$f(x) = a + bx \quad \text{och} \quad \varphi(x) = c + ex \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

så blir $f'(x) = b$ och expressionen under integraltecknet öfvergår till

$$b(c + ex)$$

hvaraf följer

$$\int_1^0 f'(x)\varphi(x)dx = b\int_1^0 (c + ex)dx = - b(c + \tfrac{1}{2}e) \quad . \; . \; . \; (10)$$

Nu är till följd af eqvationerna (9)

$$f(0) = a \qquad \text{och} \qquad \varphi(0) = c$$
$$f(1) = a + b \qquad \text{»} \qquad \varphi(1) = c + e$$

hvaraf
$$b = f(1) - f(0) \qquad \text{»} \qquad e = \varphi(1) - \varphi(0).$$

Insättas dessa värden i högra membrum af eqvationen (10) fås:

$$\int_1 f'(x)\varphi(x)dx = [f(0) - f(1)]\,[\varphi(0) + \tfrac{1}{2}(\varphi(1) - \varphi(0))] \quad (11)$$

eller, efter reduktion af andra faktorn i högra membrum och division med $a_m b_n$, fås slutligen följande uttryck på W:

$$W = \frac{[f(0) - f(1)]\,[\varphi(0) + \varphi(1)]}{2a_m b_n} =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{f(0)\varphi(0) - f(1)\varphi(0) + f(0)\varphi(1) - f(1)\varphi(1)}{a_m b_n},$$

hvilket uttryck är identiskt med (a). Härefter fullföljes beviset som förut.

Emedan talen i mortalitetstabellerna fortlöpa i en bestämd rigtning, i det de oupphörligen minskas, måste detta äfven vara förhållandet inom loppet af året. På grund af en känd sats i integralkalkylen kan man derföre, hvilka funktioner än $f(x)$ och $\varphi(x)$ må vara, skrifva

$$\int_1^0 f'(x)\varphi(x)dx = [f(0) - f(1)]\,[\varphi(1) + \vartheta(\varphi(0) - \varphi(1))]$$

der ϑ är ett bråk. För $\vartheta = \frac{1}{2}$ blir högra membrum i denna eqvation lika med högra membrum i eqvationen (11). Som nu ϑ:s värde beror af naturen och beskaffenheten hos funktionerna f och φ, inses att det funna uttrycket på den sökta

sannolikheten icke är exakt, utan väsentligen beror af det antagande vi gjort rörande dessa funktioners förlopp under året.

Att man kommer till samma resultat, i fall man antager, att de båda personerna hafva samma ålder och tillhöra en och samma kategori, utan att man då behöfver antaga att mortalitetskurvan kan betraktas råsom rätlinig under året, är lätt att finna. Man har nemligen i detta fall $\varphi(x) = f(x)$ och följaktligen

$$\int_1^0 f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_1^0 f(x)f'(x)dx =$$

$$= \Big/_1^0 \frac{[f(x)]^2}{2} = \frac{[f(0)]^2 - [f(1)]^2}{2} = \frac{(f(0) - f(1))(f(0) + f(1))}{2}.$$

Sådana i strid med verkligheten stående antaganden behöfver man dock icke göra för att bevisa formelns rigtighet, ty vi hafva sett att den enda förutsättning, som erfordras, är att talen i båda tabellerna inom året kunna grafiskt åskådliggöras medelst räta linier.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. fr. sid. 462.)

Halle. *K. Deutsche Akademie der Naturforscher.*
Leopoldina. H. 26 (1890). 4:o.
ZINCKEN, C. F., Das Vorkommen der natürlichen Kohlenwasserstoff und der anderen Erdgase. 1890. 4:o.
ULE, W., Geschichte der Kais. Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher während der Jahre 1852—1887 . . . Halle 1889. 4:o.

Kasan. *K. Universitetet.*
Utschenia sapiski. — Vetenskapliga skrifter. Årg. 58: H. 3. 1891. 8:o.

Kassel. *Verein für Naturkunde.*
Bericht. 36 (1889)—37 (1890). 8:o.

Kharkow. *Société der naturalistes à l'université Imp.*
Trudi. — Travaux. T. 24—25. 1890—91. 8:o.

Kjöbenhavn. *K. Danske Videnskabernes Selskab.*
Skrifter. (6) Naturvidensk. og mathem. Afd. Bd. 6: 2. 1890. 4:o.
» » Histor. » philos. » Bd. 3: 2. 1891. 4:o.
Oversigt. Aar 1890: H. 3; 1891: 1. 8:o.

— *Carlsberg Laboratoriet.*
Meddelelser. Bd. 3: H. 1. 1891. 8:o.

Königsberg. *Physikalisch-Ökonomische Gesellschaft.*
Schriften. Jahrg. 31 (1890). 4:o.

Lansing, U. S. *State board of agriculture of the state of Michigan.*
Annual report. 29 (1889/90). 8:o.
» » General index, 1849—1888. 1889. 8:o.

Lausanne. *Société Vaudoise des sciences naturelles.*
Bulletin. (3) Vol. 27: N:o 103—104. 1891. 8:o.

Leeds. *Philosophical and literary society.*
Annual report. Year 1890/91. 8:o.
Småskrift. 1. 8:o.

Leipzig. *Fürstl. Jablonowskische Gesellschaft.*
Preisschriften. N:o 28. 1891. st. 8:o.
Jahresbericht. 1891 März. 8:o.

London. *British association for the advancement of science.*
Report of Meeting 60 (1890), Leeds. London 1891. 8:o.

— *Geologist's association.*
Proceedings. Vol. 11: N:o 9; 12: 1—4. 1890—91. 8:o.
HARRIS, G. F., BURROWS, H. W., The eocene & oligocene beds of the Paris basin. London 1891. 8:o.

— *Linnean society.*
Transactions. (2) Botany. Vol. 3: P. 2—3. 1891. 4:o.
» » Zoology. Vol. 5: P. 5—7. 1890—91. 4:o.
Journal. Botany. Vol. 26: N:o 175; 27: 183—188; 28: 189—193. 1890—91. 8:o.

(Forts. å sid. 541).

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1891. N:o 7.
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska laboratorium.

196. Om cymols konstitution.

Af OSKAR WIDMAN.

[Meddeladt den 9 September 1891 genom L. F. NILSON.]

Som bekant framställdes cymol redan år 1839 af DUMAS & PELIGOT[1]) genom destillation af kamfer med fosforsyreanhydrid — en metod, som ännu i dag användes och är en af de bästa för beredning af cymol. Kolvätet kallades af DUMAS »champhogène». Två år senare upptäckte GERHARDT & CAVOUR[2]) i eterisk olja ur Cuminum cyminum ett kolväte »cymen», som egde samma sammansättning och som de kort därpå kunde identifiera med »camphogène».

Cymol iakttogs nu i rask följd i en hel mängd naturligt förekommande ämnen, i synnerhet i de eteriska oljorna. Men ännu talrikare voro de produkter, ur hvilka man med konst kunde framställa cymol genom kemiska ingrepp, såsom t. ex. kamferarter, terpener, karvol, karvakrol, tymol o. s. v.

I början trodde man, att de ur olika material och enligt olika metoder framstälda cymolerna hade olika konstitution. Särskildt ville icke FITTIG[3]) anse kamfercymol identisk med den cymol, som KRAUT trodde sig hafva framställt genom upphettning af kuminol med alkoholisk kalilut.

Af stor betydelse för frågan om cymols konstitution var den syntes af p-propyltoluol, som FITTIG tillsammans med

[1]) BERZELIUS, Jahresber. för 1839, 341.
[2]) Ann. Chem. Pharm. Bd. 38, 10.
[3]) Zeitschr. f. Chemie 1865, 289.

SCHAEFFER och KÖNIG[1]) utförde 1868. Det lyckades dessa forskare att framställa kolvätet ur p-bromtoluol, normal propylbromid och natrium enligt FITTIGS metod. Den så erhållna p-propyltoluolen kokade vid 178—179°, gaf en sulfonsyra, hvars i vackra blad kristalliserande bariumsalt innehöll 3 molekyler vatten, öfvergick vid oxidation i p-toluylsyra och tereftalsyra och visade i allo samma förhållande, som redan förut var bekant hos den naturliga cymolen. Trots detta trodde de nämde forskarne »sich nicht berechtigt, die Frage, ob der synthetische Kohlenwasserstoff mit dem Cymol identisch sei, zu bejahen» på den grund att enligt deras åsigt denna fråga väsentligen berodde på, huru svaret angående propylgruppens natur i kumol utföll. »Wäre betzteres, wie sie vermutheten, Isopropylbenzol, so dürfte der nahe genetische Zusammenhang desselben mit dem Cymol kaum Zweifel lassen, dass dieser Kohlenwasserstoff Isopropylmethylbenzol und demnach verschieden von dem Propylmethylbenzol ist.»

Några år senare omgjorde emellertid FITTICA i sammanhang med en jämförande undersökning öfver några ur i naturen förekommande ämnen framstälda cymoler FITTIGS syntes af normal propyltoluol, hvarvid han som utgångsmaterial kunde använda den under tiden upptäckta, kristalliserade, alldeles rena p-bromtoluolen. Han fann kokpunkten ligga alldeles såsom vid cymol vid 175--176° och kunde för öfrigt bekräfta FITTIGS, SCHAEFFERS & KÖNIGS uppgifter och tillade några andra iakttagelser, hvilka han ansåg bevisa, att båda dessa kolväten vore identiska och att den naturliga cymolen således innehölle normal propyl.

FITTIG[2]) medgaf nu, att dessa FITTICA's försök med säkerhet hade bevisat, att cymol af olika ursprung innehöll normal propyltoluol, men trodde, att något isopropyltoluol dock kunde finnas inblandadt däri.

Emellertid hade det så småningom uppvisats genom undersökningar af BEILSTEIN & KUPFER, FITTICA, PATERNÒ, PISATI,

[1]) Ann. Chem. Pharm. Bd. 149, p. 334.

[2]) R. FITTIG & BERTRAM MIELCK, Ber. d. Deutsch. chem. Gesellsch. VII, p. 651.

WRIGHT o. a., att cymoler af de mest olika ursprung voro identiska, hvarvid man hufvudsakligen stödde sig på det karaktäristiska, i blad uppträdande, med 3 mol. vatten kristalliserande bariumsulfonatet. Därigenom kom man mer och mer till den öfvertygelsen, att alla dittills framstälda cymoler voro en och samma p-propyltoluol.

Denna öfvertygelse stadgades ännu mer, då O. JACOBSEN[1]) »zum Ueberfluss»[2]) ännu en gång upprepade syntesen af normal propyltoluol enligt FITTIGS metod och anstälde en utförlig jämförande undersökning mellan denna och s. k. naturlig cymol. Det genom syntes framstälda kolvätet kokade konstant vid 175—176° alldeles såsom kamfercymol, det väl kristalliserande bariumsaltet af sulfonsyran innehöll 3 mol. vatten, öfverensstämde till utseende fullständigt med cymols bariumsulfonat och visade icke häller med afseende på löslighet i vatten vid 12—14° någon differens. »Das Natriumsalz bildete durchans wie das der Cymolschwefelsäure, grosse, rhombische Blätter» och amiden smälte konstant vid 111—112°, under det att JACOBSEN tidigare funnit smältpunkten hos kamfercymols rena sulfamid ligga vid 112°.

Det var dock möjligt, om också icke sannolikt, att p-isopropyltoluols egenskaper så obetydligt skiljde sig från normal propyltoluol, att man kunde hafva förbisett differensen. Så länge det förra kolvätets egenskaper ännu voro okända, förefans således en lucka i bevisföringen. Denna lucka utfylde O. JACOBSEN,[3]) i det han framstälde p-isopropyltoluol ur p-bromkumol, jodmetyl och natrium och fann, att denna hade helt andra egenskaper än den vanliga cymolen och därmed »machte er endgiltig allen Unsicherheiten betreffs der Constitution des gewöhnlichen Cymols ein Ende» (KELBE) och »wiederlegte jeden noch möglichen Zweifel hinsichtlich der Constitution des Cymols» (R. MEIJER.[4])

[1]) Ber. d. Deutsch. chem. Gesellsch. XI, p. 2049.

[2]) Se KELBES afhandling: Ueber das Metaisocymol, Ann. Chem. Pharm. Bd. 210, p. 1.

[3]) Ber. d. Deutsch. chem. Gesellsch. XII, 429.

[4]) Ann. Chem. Pharm. Bd. 220, p. 5.

Enligt JACOBSENS uppgift kokar p-isopropyltoluol i fullkomligt rent tillstånd (afskild ur kristalliserad sulfamid) vid 171—172°, bariumsulfonatet kristalliserar med 1 molekyl vatten i vårtiga massor, bestående af mikroskopiska, fina nålar; natriumsaltet bildar lättlösliga, bladiga kristaller och sulfamiden kristalliserar i stora, iriserande blad, som smälta vid 97—98°. Dessa uppgifter blefvo sedan af R. MEIJER & BONER,[1]) hvilka för ett annat ändamål upprepade JACOBSENS försök, bekräftade särskildt i den vigtigaste punkten angående bariumsaltets vattenhalt.

Slutligen må det anmärkas, att KEKULÈ & DITTMAR funno ett stöd för antagandet, att cymols propylgrupp egde normal struktur, i den af dem såsom redan förut af BUGILINSKY & ERLENMEYER gjorda iakttagelsen, att *ättiksyra* jämte toluylsyra bildas vid cymols oxidation med salpetersyra.

Om propylgruppens normala struktur i cymol således icke var underkastad något tvifvel, så erbjöd dock tydandet af flere under tiden gjorda iakttagelser inom cymolserien stora svårigheter. Såsom ofvan nämndt, hade redan FITTIG framhållit det genetiska sammanhanget mellan cymol och kumol (p-isopropylbenzol), hvilket KRAUT 1853 för första gången iakttog. Visserligen grundade sig KRAUTS uppgifter på ett misstag, såsom R. MEYER mycket senare visade, men snart därpå framstälde KRAUT cymol ur kuminalkohol genom kokning med zinkgrått, hvilket försök JACOBSEN upprepade och bekräftade. Vidare funno NENCKI & ZIEGLER och senare äfven JACOBSEN och V. GERICHTEN, att cymol vid genomgång genom den djuriska organismen öfvergår i vanlig kuminsyra. Därpå gjorde NENCKI den iakttagelsen, att cymol redan vid blott skakning med luft och natronlut ger kuminsyra och slutligen erhöllo PATERNÒ & SPICA vid reduktion af kumylklorur, framstäld genom mättning af kuminalkohol med klorväte, vanlig cymol.

Dessa iakttagelser visade tillräckligt tydligt, att ett genetiskt sammanhang verkligen existerade mellan cymol och kuminsyra, resp. kuminol och kuminalkohol.

---

[1]) Ber. d. Deutsch. chem. Gesellsch. XIV, 1137 och Ann. Chem. Pharm. Bd. 220, p. 25.

Dessa kuminderivat hade åter visat sig innehålla isopropyl. Jag erinrar blott därom, att det genom undersökningar af JACOBSEN,[1]) GUSTAVSON[2]) och LIEBMANN[3]) blifvit bevisadt, att kumol, som uppstår vid destillation af kuminsyra med kalk, är ett isopropylderivat, vidare, att R. MEYER lyckats öfverföra kuminsyra i oxiisopropylbenzoësyra genom oxidation med kaliumpermanganat i alkalisk lösning och slutligen att närvaron af isopropyl i kuminsyra blifvit till evidens bevisad, därigenom att R. MEYER[4]) syntetiserat såväl kuminsyra som p-propylbenzoësyra genom inverkan af fuktig kolsyra på p-bromkumol, resp. p-brompropylbenzol vid närvaro af natrium.

Under sådana förhållanden måste man med R. MEYER och många andra anse till fullo bevisadt, att omlagringar ega rum inom propylgruppen, då ett cymolderivat öfvergår i ett kumolderivat och vice versa.

På denna punkt befann sig frågan, då jag för flere år sedan kom att egna mig åt den, därtill föranledd af min syntes af tymol ur kuminol.[5]) Utredandet af sättet för och orsaken till dessa omlagringar, var af så mycket större vigt och lofvade så mycket intressantare resultat, som dessa omlagringar tydligen försiggingo under lösslitande af bindningar mellan kolatomer och sammanslutning af nya sådana och understundom föranleddes af inverkan af mycket svaga kemiska agens. Vid ett närmare betraktande af alla dittills bekanta fall af dylika omlagringar kom jag till den slutsatsen, att dessa omlagringar inom propylgruppen berodde på den i paraställning befintliga gruppen på det sätt, att en metylgrupp predisponerade till bildning af normal propyl, en karboxylgrupp åter till bildning af isopropyl. Denna sats har sedan i ganska många fall vunnit bekräftelse såväl af

[1]) Ber. d. Deutsch. chem. Gesellsch. VIII, p. 1260.
[2]) » » » XI, p. 1251.
[3]) » » » XIII, p. 46.
[4]) » » » XV, p. 496, 698 och 1903.
[5]) Öfversigt af K. Vet.-Akad. Förh. 1881, N:o 7, p. 27.

andra forskare som af mig sjelf och har blifvit accepterad af alla, som yttrat sig i frågan, med undantag af FILETI,[1]) som ville något ändra formuleringen.

Emellertid har jag sjelf under loppet af mina omfattande undersökningar på detta område slutligen stött på svårigheter. Det visade sig nämligen, att satsen egde fullständig giltighet, så snart metyl öfvergick i karboxyl eller andra grupper i metyl — men slog fel, då andra grupper än metyl oxiderades till karboxyl. Så kunde jag påvisa, att omlagring inom en normal propylgrupp icke eger rum, när *etyl*, *acetyl*, *propyl* eller *isopropyl* men däremot alltid, då *metyl* öfverföres i karboxyl.[2])

Detta resultat är i teoretiskt hänseende alldeles oförklarligt. Det har därför tvungit mig till en revision af de till grund liggande undersökningarne öfver propylgruppens konstitution i cymol och kuminsyra. För den i detta syfte utförda undersökningen anhåller jag att i det följande få redogöra. Jag började med undersökningen på cymol och erhöll därvid sådana resultat, att ett fullföljande af undersökningen på kuminsyra visade sig obehöfligt.

---

p-Metylpropylbenzol

$$C_6H_4\begin{cases}CH_2 . CH_2 . CH_3 & 4 \\ CH_3 & 1\end{cases}.$$

100 gr. fullt ren, omkristalliserad p-bromtoluol blandades med 89,4 gr. (ber. 71,9 gr.) propylbromid och inhäldes i en kolf, som innehöll absolut eter och 40,3 gr. (ber. 26,9 gr.) natrium. Reaktionen utfördes för öfrigt alldeles efter FITTIG's och KÖNIGS[3]) föreskrift. Den förlöpte med stor häftighet och var afslutad inom en half timme. Reaktionsprodukten underkastades 3 gånger fraktionerad destillation öfver natrium och fraktionerades därpå ännu en gång (utan natrium), hvarvid jag erhöll följande fraktioner:

---

[1]) Ber. d. Deutsch. chem. Gesellsch. XIX, p. 2781. Gazz. chim. XVI, 1.

[2]) Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1890, N:o 9, p. 481.

[3]) Ann. Chem. Pharm. Bd. 144, p. 277.

Kokpunkt	100—170°	vigt	6,6 gr.
»	170—182°	»	2,0 »
»	182—184°	»	35,0 »
Återstod	(184—185°)	»	0,9 »

Af fraktionen 182—184° gick det mesta öfver vid 183—184°. Temperaturen mättes med kort normaltermometer. Barometern visade 774 mm.

Spec. vigten på den renaste fraktionen var 0,8682 vid 15°. Analysen gaf följande tal:

I procent:

	Beräknadt:	Funnet:
C_{10}	89,55	89,07
H_{14}	10,45	10,61
	100,00	99,68.

Omedelbart efter den sista destillationen fraktionerades från KAHLBAUM rekvirerad kamfercymol vid samma lufttryck och under användande af samma fraktionerkolf och samma termometer. Af denna öfvergick en liten del mellan 172—175°, men det allra mesta mellan 175 och 177°. Blott ytterst litet stannade i fraktionerkolfven. Fraktionen 175—177° visade en spec. vigt af 0,8602 vid 15°, under det att KRAUT angifvit cymols spec. vigt till 0,85965.

Såväl specifika vigter som kokpunkter äro således helt och hållet olika. *Differensen i kokpunkt* vid de båda kolvätena *uppgår till icke mindre än sju grader.* Lukten är också olika. Det genom syntes framstälda eger en sötaktig, angenämare lukt än cymol, hvars lukt har en frän anstrykning.

Sulfonsyror af p-propyltoluol.

Det konstgjorda kolvätet löser sig lätt i 5 del. koncentrerad svafvelsyra vid uppvärmning på vattenbad. Efter mättning med bariumkarbonat erhåller man en blandning af 2 olika bariumsalter, af hvilka det ena (α) är svårlösligt i kallt vatten och därför mycket lätt låter rena sig. I moderlutarne befinner sig

ett annat mycket lättlösligt salt, som man blott med stor svårighet och efter mångfaldiga omkristallisationer erhåller i rent tillstånd. β-Saltet uppträder i mycket underordnad mängd

Bariumpropyltoluol-α-sulfonat.

$$\left[C_6H_3 \begin{cases} \overset{4}{C}H_2 . CH_2 . CH_3 \\ \overset{2}{S}O_2O— \\ \overset{1}{C}H_3 \end{cases} \right]_2 Ba + H_2O.$$

Detta salt kristalliserar ur en afsvalnande lösning i vackra, glänsande, sexsidiga taflor, som äro lagrade inpå hvarandra. Det är svårlösligt i kallt vatten, mycket lättlösligare i varmt. 100 delar vatten lösa vid 18° omkring 2,77 gr. vattenfritt salt. I alkohol är det mycket svårare lösligt; för att lösas fordrar det omkring 30 delar kokande alkohol. Vid afsvalning utkristalliserar det dock trögt och dåligt.

Kristallerna innehålla blott 1 molekyl vatten, som ännu icke bortgår vid 100°, utan först vid 140—160° och t. o. m. vid 160° blott ganska långsamt. Den torkade substansen är mycket hygroskopisk.

Analysen gaf följande resultat:

I procent:

	Beräknadt för $[C_{10}H_{13}SO_2O]_2Ba + H_2O$:	Funnet: I.	II.	III.	IV.
Ba	23,58	23,59	23,60	—	—
H_2O	3,09	2,99	2,95	2,96	2,87.

Bestämningarne I och II äro utförda på salt från olika beredningar af sulfonsyra, alla på salt från olika kristallisationer.

Saltet liknar visserligen till det yttre bariumcymolsulfonat, men skiljer sig därifrån skarpt genom vattenhalten, som i det senare uppgår till 8,75 (!) procent och bortgår redan vid 100° fullständigt.

Såväl FITTIG's, KÖNIG's och SCHÆFFERS som äfven O. JACOBSEN's uppgifter äro således oriktiga och det är i sjelfva verket oförklarligt, huru vid analys af bariumsaltet ur syntetiskt

kolväte de förra kunnat finna 22 % barium och 8,95 % vatten JACOBSEN 8,80 % vatten.

Kaliumpropyltoluol-α-sulfonat,

$C_{10}H_{13} . SO_2OK + H_2O$,

är temligen svårlösligt i kallt, lättlösligt i varmt vatten och kristalliserar lät i vackra, glänsande, mycket stora, svagt sneda, fyrsidiga taflor. Saltet förlorar intet vatten i exsiccator, men allt vid 100°.

Analys:

I procent:

	Ber. för $C_{10}H_{13}SO_3K + H_2O$:	Funnet:
K	14,44	14,38
H_2O	6,67	6,37—6,57.

Natriumpropyltoluol-α-sulfonat,

$4\,C_{10}H_{13} . SO_2ONa + 5H_2O$.

Saltet är lättlösligt i vatten, isynnerhet i varmt, och kristalliserar därur i vackra, stora, sexsidiga, aflånga taflor af ungefär samma form som bariumsaltet, blott större och tjockare. Sammansättningen är något egendomlig, i det saltet innehåller 5 mol. vatten på 4 mol. salt. Af vattenmolekylerna bortgå 2 redan i exsiccator, de öfriga 3 vid 100°. Följande analytiska bestämningar äro utförda på salt från 2 olika beredningar af sulfonsyra.

I procent:

	Funnet: I.	II.	III.	IV.
Na	8,88	—	—	—
H_2O i exs.	—	—	3,51	3,52
H_2O vid 100°	8,32	8,54	8,60	8,55.

Beräknadt

för $4C_{10}H_{13}SO_3Na + 5H_2O$:		för $C_{10}H_{13}SO_3Na + H_2O$:	
Na	8,90	Na	9,06
$2H_2O$	3,48	H_2O	7,09
$5H_2O$	8,70.		

Blysaltet kristalliserar i långa nålar och är svårlösligt i kallt vatten.

p-Propyltoluol-α-sulfamid.

$$C_6H_3 \begin{cases} CH_2 \,.\, CH_2 \,.\, CH_3 & 4 \\ SO_2NH_2 & 2 \\ CH_3 & 1. \end{cases}$$

Föreningen kristalliserar ur benzol eller utspädd alkohol i stora, klara, nära kvadratiska taflor, hvilka smälta konstant vid 101—102°. Den är mycket lättlöslig i alkohol eller varm benzol, ganska svårlöslig i kall benzol.

På kristallerna hafva mätningar blifvit gjorda af Doktor A. G. HÖGBOM, som därom godhetsfullt meddelat mig följande:

»Kristallsystem monosymmetriskt:

$$a : b = 1{,}684 : 1$$
$$\beta = 45°{,}51'.$$

Iakttagna former blott prisma {110} och basis {001}. De mätta kristallerna voro opaka, tafvelformiga efter basis och hade en temligen tydlig, med basis parallel genomgång.

Mätningar:

	I.	II.	III.
$110 : 1\bar{1}0$	100°.46′	100°.46′	—
110 : 001	63°.38′	63°.36′	63°.39′.»

Analysen gaf följande tal:

I procent:

	Ber. för $C_{10}H_{15}NSO_2$:	Funnet:
C	56,34	56,25
H	7,04	7,42
N	6,57	6,57.

Oxidation af α-sulfamiden.

För att afgöra, kvilken ställning sulfonsyreresten intar i dessa föreningar, oxiderades amiden. För detta ändamål kokades en blandning af 1 gr. amid, 5 gr. kaliumbikromat och 8 gr.

koncentrerad svafvelsyra, utspädd med 3 volymer vatten, under $4^1/_2$ timmars tid. Efter omkristallisering ur kokande vatten erhölls 0,5 gr. af en i tumslånga nålar kristalliserande, vid 267° smältande syra. Sammansättningen motsvarade formeln: $C_8H_9NSO_4$ enligt analys, som gaf följande tal:

I procent:

	Ber. för $C_8H_9NSO_4$:	Funnet:
C	44,65	44,44
H	4,19	4,43
N	6,51	6,57.

På grund häraf är kroppen identisk med den af HALL & I. REMSEN[1]) undersökta *Sulfamin-p-toluylsyran:*

$$C_6H_3\begin{cases} COOH & 4 \\ SO_2NH_2 & 2 \\ CH_3 & 1. \end{cases}$$

och grupperna intaga de ofvan angifna platserna inom benzolmolekylen.

Bariumpropyltoluol-β-sulfonat.

$$\left[C_6H_3\begin{cases} \overset{4}{C}H_2 . CH_2 . CH_3 \\ \overset{3}{S}O_2O- \\ \overset{1}{C}H_3 \end{cases}\right]_2 Ba + 4H_2O.$$

Det ofvan beskrifna α-saltet erhålles ur råprodukten fullkomligt rent redan efter 2 kristalliseringar. Den första moderluten innehåller en substans, som är ytterst lättlöslig såväl i alkohol som i vatten. Först efter stark koncentration af lösningarne utkristalliserar ett salt i obetydliga kristaller. Detta underkastades en lång serie fraktionerade kristallisationer, hvilket förfarande till slut gaf rent β-salt. Vid en varm lösnings afsvalning kristalliserar detta temligen väl i prismatiska, korta nålar.

Från α-saltet skiljes β-saltet skarpt genom vattenhalten. Det senare innehåller icke mindre än 4 molekyler vatten, hvilka

---

[1]) Ber. d. Deutsch. chem. Gesellsch. XII, p. 1433.

alla bortgå redan vid 100°. I exsiccator förlorar icke häller β-saltet något kristallvatten. Analysen gaf följande tal:

I procent:

	Beräknadt för $[C_{10}H_{13}SO_3]_2Ba + 4H_2O$:	Funnet: I.	II.
Ba	21,57	21,69	—
H_2O	11,34	10,76	10,87.

Natriumsaltet kristalliserar också i nålar vid långsam kristallisation.

p-Propyltoluol-β-sulfamid.

$$C_6H_3\begin{cases} CH_2 . CH_2 . CH_3 & 4 \\ SO_2NH_2 & 3 \\ CH_3 & 1. \end{cases}$$

Erhållen ur det torkade natriumsaltet genom successiv behandling med fosforpentaklorid och starkaste amoniak, kristalliserar amiden redan vid den amoniakaliska lösningens afsvalning i vackra, glänsande blad. Vid omkristallisering ur benzol afskiljes den i glänsande fjäll, som smälta långsamt, men konstant vid 112—113°. Tyvärr låter substansen icke framställa sig i mätbara kristaller.

Analys:

I procent:

	Ber. för $C_{10}H_{15}NSO_2$:	Funnet:
N	6,57	6,62.

Den i moderlutarne befintliga blandningen af α- och β-bariumsalt, som icke vidare kunde direkt bearbetas, öfverfördes äfven successive i natriumsalt, klorid och amid. Amidblandningen var i början flytande, men stelnade småningom. Vid den första kristallisationen låg smältpunkten lågt, under 90°. Blott med stor svårighet kunde därur något litet ren β-sulfamid erhållas.

p-Propyltoluols behandling med salpetersyra af 1,4 sp. v.

FITTICA[1]) hade sett ett bevis för närvaron af normal propyl i cymol i den af honom gjorda iakttagelsen, att cymol och syntetiskt framställd p-propyltoluol vid behandling med till 50° uppvärmd salpetersyra af 1,4 spec. vigt gifva precis samma derivat, en flytande »α-nitrocymol» och en vid 125° smältande »β-nitrocymol». Senare uppvisade visserligen v. GERICHTEN[2]) och därefter HOLLEMANN,[3]) att den fasta kroppen har en helt annan sammansättning och vid försök att ur kamfercymol enligt FITTICA's metod framställa nitrocymol fann jag sjelf,[4]) att äfven FITTICA's flytande α-nitrocymol icke är någon nitroförening, utan till allra största delen består af p-tolylmetylketon.

Det var emellertid af intresse att undersöka, huruvida den syntetiskt erhållna p-propyltoluolen vid nyssnämnda behandling verkligen ger samma föreningar som naturlig cymol, isynnerhet p-tolylmetylketon; desto mer som denna kropps bildning ur ett normalt propylderivat är mycket svårbegriplig.

Jag behandlade därför det ofvan beskrifna kolvätet noga efter FITTICA's föreskrift med till 50° uppvärmd salpetersyra af 1,4 sp. v. Efter fraktionerad destillation med vattenångor erhölls ur reaktionsprodukten dels oangripen p-propyltoluol, dels en gul olja af ungefärligen samma utseende och lukt som p-tolylmetylketon. Då jag nu behandlade denna olja med hydroxylamin, bildades icke ett spår af den vid 88° smältande tolylmetylketoximen och oljan kan alltså icke vara tolylmetylketon. Jag har icke vidare undersökt den, men är böjd för att antaga, att den utgör en nitroförening och att således FITTICA's uppgift i denna punkt är riktig.

Emellertid förhålla sig således p-propyltoluol och cymol äfven i detsa hänseende alldeles olika.

---

[1]) Ann. Chem. Pharm., Bd. 172, p. 314.
[2]) Ber. d. Deutsch. chem. Gesellsch. XI, p. 1092.
[3]) Ber. d. Deutsch. chem. Gesellsch. XX, 373 och 3361.
[4]) O. WIDMAN & J. A. BLADIN, Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1886, N:o 4, p. 85.

Den ofvan meddelade undersökningen torde tillräckligt klart bevisa, att cymol icke är identisk med p-propyltoluol och att följaktligen *cymol icke innehåller normal propyl.*

Hvilken konstitution tillkommer då cymol? Enligt öfverensstämmande iakttagelselser af O. Jacobsen, R. Meyer och H. Boner är ju cymol icke häller identisk med den syntetiskt framstälda p-isopropyltoluolen och skulle således icke häller innehålla isopropyl. För att besvara denna fråga fann jag mig föranlåten att äfven kontrollera dessa undersökningar af de sistnämnda forskarne, isynnerhet med hänsyn till de högst öfverraskande resultat, till hvilka jag hade kommit vid min revision af de äldre undersökningarne öfver p-propyltoluol.

Jag öfvergick därför närmast till en syntes och ett närmare studium af p-isopropyltoluol och dess derivat, hvarvid jag erhöll följande resultat.

p-Metylisopropylbenzol.

$$C_6H_4 \begin{cases} CH \begin{cases} CH_3 \\ CH_2 \end{cases} & 4 \\ CH_3 & 1. \end{cases}$$

Vid framställning af »isocymol» utgick O. Jacobsen, liksom äfven R. Meyer & Boner, från kumol. Den bromerades och på den så erhållna p-bromkumolen fick natrium och jodmetyl inverka. Jag har följt samma väg. Blott med afseende på beredning af utgångsmaterialet, kumol, har jag med flit valt ett annat förfarande än de nämnda forskarne. De framstälde kumol ur kuminsyra, jag ur benzol och isopropylbromid vid närvaro af aluminiumklorid. Vid mina undersökningar öfver acetokumol har jag nämligen kommit till den öfvertygelsen, att kuminsyrekumol innehåller en förorening, som icke kan direkt bortskaffas.

Vid framställning af isopropylbenzol har jag följt den föreskrift, som Sempotowski[1]) gifvit för beredning af etylbenzol. Detta förfarande ger mycket goda resultat. Af 96 gr. isopropylbromid och 150 gr. benzol bekom jag en vid 150—153° ko-

[1]) Ber. d. Deutsch. chem. Gesellsch. XXII, p. 2662.

kande hufvudfraktion, som vägde 38,5 gr., under det att de öfriga fraktionerna utom benzol och öfver 180° kokande retortåterstod blott innehöllo några droppar. Vid bromering erhölls därur 46 gr. vid 215—217° (korr.) kokande p-bromisopropylbenzol.

Denna blandades nu med 41 gr. jodmetyl och infördes i absolut eter tillsammans med 17,2 gr. natrium. Reaktionen inträdde ytterst trögt. Blandningen fick först stå i snö mer än 48 timmar, därefter flere timmar vid vanlig rumstemperatur och slutligen uppvärmdes den längre tid på vattenbad, utan att dock någon reaktion kunde förmärkas. Slutligen hade reaktionen inträdt och afslutats under därpå följande natt. Filtratet från de afskiljda haloidsalterna hade en rödgul färg och fluorescerade starkt. Vid fraktionerad destillation visade det sig, att hufvudmassan bestod af en tjockflytande kropp, som kokade öfver 250°. Det lägre kokande upptogs i 3 fraktioner. Den första kokade vid 155—165°, den andra vid 165—170° och den tredje vid 170—175° (korr.). Alla tre vägde ungefär lika mycket, hvar och en ungefär 4 gr. Då kvantiteten var för ringa för fortsatt fraktionerande, måste jag afstå från vidare renande af kolvätet. Dock uppdelade jag den tredje fraktionen i tvenne delar, af hvilken den högre, vid 173—176° kokande blott utgjorde 1,5 gr. Lukten var alldeles lik cymols, men tydligt skiljd från propyltoluolens.

Såsom redan är nämdt, hade JACOBSEN stödt sin slutsats, att cymol och »isocymol» icke äro identiska, på egenskaperna hos bariumsalterna och sulfamiderna. På grund häraf öfverförde jag de båda delarne af den tredje fraktionen hvar för sig i sulfonsyror och framstälde därur de nämnda derivaten.

Bariumisopropyltoluolsulfonat.

$$\left[C_6H_3 \begin{matrix} \diagup CH_3(CH_3)_2 \\ -SO_2O- \\ \diagdown CH_3 \end{matrix}\right]_2 Ba + 3H_2O.$$

Till min förvåning kristalliserade icke blott bariumsaltet ur den vid 173—176° kokande fraktionen, som eger i det närmaste

samma kokpunkt som cymol, utan äfven saltet ur den lägre fraktionen redan från början i blad och vid andra kristallisationen erhöll jag i båda fallen centimeterbreda, spröda taflor i godt utbyte. Likheten med bariumsaltet af den vanliga cymolsulfonsyran, som jag hade framstält för jämförelses skull, var fullständig. Kristallerna förlorade ej vatten i exsiccator, men allt vid 100° och vattenhalten motsvarade noga 3 molekyler. Af de följande tre vattenbestämningarne äro I och II utförda på material från den ena, III från den andra fraktionen.

I procent:

	Beräknadt för $[C_{10}H_{13}SO_3]Ba + 3H_2O$:	Funnet: I.	II.	III.
Ba	22,20	22,54	—	—
H_2O	8,75	8,70	8,67	8,68.

p-Isopropyltoluolsulfamid.

$$C_6H_3\begin{cases} CH(CH_3)_2 & 4 \\ SO_2 . NH_2 & 2 \\ CH_3 & 1. \end{cases}$$

Amiden kristalliserade ur utspädd alkohol eller benzol i glänsande blad, som smälte långsamt vid 115—116°. Egenskaperna öfverensstämma i hvarje hänseende med cymol-α-sulfamidens. Visserligen har JACOBSEN angifvit, att cymolsulfamid smälter vid 112°. Detta är dock oriktigt. Smältpunkten ligger i sjelfva verket, såsom jag sjelf har funnit, vid 115—116°, hvilket för öfrigt stämmer med KELBE's[1]) uppgift.

Analysen på den ur det syntetiserade kolvätet erhållna sulfamiden gaf följande tal:

I procent:

	Ber. för $C_{10}H_{13}SO_2NH_2$:	Funnet:
N	6,57	6,71

I följande tabell ger jag en öfversigt af ofvan meddelade, sanna egenskaper hos de båda syntetiskt framstälda, isomera kolvätena, jämförda med cymols och sammanstälda med mina föregångares uppgifter beträffande samma föreningar:

[1]) Ber. d. Deutsch. chem. Gesellsch. XIX, p. 1969.

	p-Propyltoluol.	p-Isopropyltoluol.	Cymol.
	Verkliga egenskaper.		
Kokpunkt.	183—184°.	—	175—176°.
Sp. vigt	0,8682 (15°).	—	0,8602 (15°).
Lukt	Angenäm.	Något frän.	Något frän.
Beh. med HNO_3 (1,4 sp. v.)	Ger icke tolylmetylketon.	—	Ger tolylmetylketon.
Ba-α-sulfonat	$\bar{A}_2Ba + H_2O$. Blad. Förlorar ej vatten vid 100°.	$\bar{A}_2Ba + 3H_2O$. Blad. Förlorar allt vatten vid 100°.	$\bar{A}_2Ba + 3H_2O$. Blad. Förlorar allt vatten vid 100°.
Na-α-sulfonat	$4\bar{A}Na + 5H_2O$. Taflor.	—	$\bar{A}Na + 5H_2O$ (Sieveking) $\bar{A}Na + 3H_2O$ (Paternò).
α-Sulfamid	Stora taflor. Smp. 102—103°.	Blad. Smp. 115—116°.	Blad. Smp. 115—116°.
Ba-β-sulfonat	$\bar{A}_2Ba + 4H_2O$. Korta nålar.	—	—
β-Sulfamid	Fjäll. Smp. 112—113°.	—	Fjäll. Smp. 148° (Remsen & Day).
	Egenskaper enligt Fittig, Schaeffer & König (F., S. & K.), Fittica (F.), Jacobsen (J.) och R. Meyer & Boner (M. & B.)		
Kokpunkt	178—179° F., S. & K. 175—176° F., J.	171—172° J.	—
Beh. med HNO_3 (1,4 sp. v.)	Ger nitroderivat F.	—	Ger nitroderivat F.
Ba-α-sulfonat	$\bar{A}_2Ba + 3H_2O$. Blad. F., S. & K., J.	$\bar{A}_2Ba + H_2O$. Vårtor af fina nålar J., M. & B.	—
α-Sulfamid	Blad. Smp. 111—112° J.	Stora blad. Smp. 97—98° J.	Blad. Smp. 112° J.

Såsom man finner vid en blick på denna tabell, äro de äldre uppgifterna genomgående oriktiga och man råkar i sjelfva verket i förvåning öfver, att sådana misstag, som här förekomma, från början kunna göras, men kanske ännu mer öfver, att senare forskare blott haft bekräftelser att meddela. Och dock erbjuda dessa undersökningar inga särskilda svårigheter, till största delen måste de till och med räknas till de lättaste kemiska arbeten. Huru JACOBSEN vid sin jämförande undersökning öfver de båda serierna cymol- och propyltoluolderivat, hvilken han har beskrifvit i sin uppsats: »Ueber die Constitution der Propylgruppe im Cymol», kunnat förbise de alldeles icke obetydliga olikheterna, förmår jag icke för mig förklara. Så uppgår t. ex. differensen i sulfamidernas smältpunkter till icke mindre än 13°. Och beträffande bariumsalterna kan jag icke underlåta att framhålla, att JACOBSEN finner 3 molekyler (= 8,75 %) vatten i det normala propylderivatet och blott en molekyl (= 3,09 %) i isopropylderivatet, under det att sammansättningen i sjelfva verket är just det motsatta.

Emellertid hafva dessa oriktiga uppgifter förvirrat hela cymolkapitlet och vilsefört vår uppfattning om konstitutionen hos denna utomordentligt vigtiga kropp, som utgör modersubstansen till den kanske största gruppen i naturen förekommande ämnen. Just den omständigheten, att de till grund liggande undersökningarne erbjuda så ringa svårighet i utförande, har gjort dem a priori så trovärdiga, isynnerhet som de blifvit fullständigt bekräftade af följande forskare, att det behöfdes så långvariga och omfattande undersökningar på det ifrågavarande området som de af mig utförda för att framkalla en ny revision. Detta fall torde kunna tjena som den bästa illustration på, hvilken skada oriktiga faktiska uppgifter kunna förorsaka vetenskapen och huru sådana för lång tid kunna leda forskningen vilse. Det visar ock, huru vigtigt det är, att hvarje forskare låter sig angeläget vara att rätta i litteraturen förekommande oriktiga uppgifter, så snart sådana upptäckas.

Den nu meddelade undersökningen gifver emellertid ett afgörande svar på frågan om cymols koustitution. Svaret lyder:

Cymol är icke p-metylpropylbenzol, utan p-metylisopropylbenzol.

Härmed bortfaller i sjelfva verket allt gåtfullt, som hittills har omgifvit cymolserien.

Hvad först beträffar bildningen af p-tolylmetylketon[1]) ur cymol, så är densamma numera mycket lätt att förklara. Isopropylgruppen öfvergår vid af salpetersyra förorsakad oxidation helt enkelt i en acetylgrupp, i det att en metylgrupp bortoxideras. Denna förklaring är så mycket säkrare, som man vid en annan, med afseende på det experimentella, först nyligen klart utredd reaktion, som förlöper på samma sätt, kunnat isolera en mellanprodukt. Såsom v. RICHTER & SCHÜCHNER,[2]) ERRERA[3]) och v. MILLER & G. ROHDE[4]) visat, öfvergår cymol vid ETARDska reaktionen, d. v. s. vid behandling med kromylklorid i en aldehyd, som af v. MILLER och ROHDE bevisats vara parametylhydratropaaldehyd, och en keton, som af ERRERA[5]) helt nyligen befunnits vara p-tolylmetylketon. Här kan man således, sedan cymol befunnits vara ett isopropylderivat, följa reaktionen steg för steg:

$$CH_3 . C_6H_4 . CH\Big\langle{CH_3 \atop CH_3}$$

$$CH_3 . C_6H_4 . CH\Big\langle{CH_3 \atop CHO}$$

$$CH_3 . C_6H_4 . COCH_3.$$

Frågan om omlagringarne inom propylgruppen finner också sin definitiva, om också öfverraskande lösning.

De fall af omlagringar inom propylgruppen, hvilka man hittills ansett som bevisade, äro följande:

---

1) WIDMAN och J. A. BLADIN, Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1886, N:o 4, p. 85.

2) Ber. d. Deutsch. chem. Gesellsch. XVII, p. 1931.

3) Gazz. chim. ital. 1889, s. 528.

4) Ber. d. Deutsch. chem. Gesellsch. XXIII, p. 1075.

5) » » XXIV 211 c, Gazz. chim. ital. 1891.

Från isopropyl till propyl:

1. Kumylklorid ger vid kokning med zink och klorväte cymol.[1])

2. Kuminalkohol öfvergår i cymol vid kokning med zink.[2])

3. Nitrocymylenklorid ger vid kokning med zink och klorvätesyra cymidin, som korresponderar med cymol och tymol.[3])

4. Kumineter ger vid destillation kuminol och cymol.[4])

Från propyl till isopropyl:

1. Cymol öfvergår i organismen i kuminsyra.[5])

2. Cymol ger kuminsyra vid skakning med natronlut och luft.[6])

3. Cymolsulfonsyra ger vid oxidation med kameleon i alkalisk lösning oxiisopropylsulfobenzoësyra.[7])

4. Cymol öfvergår vid liknande behandling i oxiisopropylbenzoësyra.[8])

5. Tymol ger vid smältning med kaliumhydrat m-oxikuminsyra.[9])

6. Karvakrol ger vid smältning med kaliumhydrat o-oxikuminsyra.[10])

7. Cymol ger vid inverkan af klor kumylklorid, som korresponderar med kuminol och kuminsyra.[11])

---

[1]) Paternô & Spica, Jahresber. 1879, p. 369.

[2]) Kraut, Ann. Chem. Pharm., Bd. 192, p, 225. — Jacobsen, Ber. d. Deutsch. chem. Gesellsch. XII, p. 434.

[3]) Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1881, N:o 7, p. 27 och 1884, N:o 2, p. 13.

[4]) Fileli, Gazz. chim. ital. XIV, p. 503.

[5]) Nencki & Ziegler, Ber. d. Deutsch. chem. Gesellsch. V, 749. — v. Gerichten, XI, p. 369. — O. Jacobsen, XII, p. 512.

[6]) Nencki, XIV, p. 1144.

[7]) R. Meyer & H. Boner, Ann. Chem. Parm., Bd. 220, p. 6.

[8]) Widman & Bladin, Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1886, N:o 4, p. 85.

[9]) Barth, Ber. d. Deutsch. chem. Gesellsch. XI, p. 1571. — Widman, Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1884, N:o 2, p. 24.

[10]) O. Jacobsen, Ber. d. Deutsch. chem. Gesellsch. XI, p. 1061. Widman l. c.

[11]) Errera, Gazz. chim. ital. XIV, p. 278.

8. Klorcymol och bromcymol ur tymol ger vid oxidation klor- och bromkuminsyra.[1])

9. Kaliumtymylsulfat ger vid oxidation med kameleon m-oxikuminsyra.[2])

10. Kaliumkarvakrylsulfat ger vid samma behandling p-oxi-isopropylsalicylsyra.[2])

11. Nitrocymol öfvergår vid samma behandling i o-nitro-oxiisopropylbenzoësyra.[3])

12. β-Cymolsulfamid ger vid oxidation med kromsyra sulfaminkuminsyra.[4])

Såsom man af denna sammanställning kan se, ligger härvid till grund den förutsättningen, att cymol, tymol och karvakrol innehålla normal propyl. Tillvaron af omlagringar öfverhufvud beror således på dessa kroppars propylgrupp. Med afseende på cymol är det nu bevisadt, att den är ett isopropylderivat. Hvad åter beträffar *tymol* och *karvakrol*, så stöder sig beviset för att de innehålla normal propyl på cymols konstitution och äfven *dessa måste numera uppfattas såsom isopropylderivat.* Alla här ofvan i detta sammanhang omnämnda kroppar äro således isopropylderivat och någon omlagring förekommer icke i ett enda af alla dessa fall.

Emellertid vet man icke, huru den verkliga normala p-propyltoluolen förhåller sig vid oxidation. Då detta är af ett visst intresse för den föreliggande frågan, har jag underkastat ofvan beskrifna, syntetiskt framstälda *propyltoluol* oxidation med kameleon i starkt alkalisk lösning på alldeles samma sätt som jag förut har oxiderat cymol, i hvilket fall som bekant oxiisopropylbenzoësyra bildas jämte en mycket liten mängd tereftalsyra. Jag erhöll därvid *uteslutande tereftalsyra* och icke ett spår af den vid 155—156° smältande oxipropylbenzoësyran.

Man kan alltså anse som bevisadt icke blott, att hvad man hittills hållit för omlagringar inom propylgruppen i cymol- och

[1]) FILETI & CROSA, Gazz. chim. ital. XVI, p. 287.
[2]) HEYMANN & KÖNIGS, Ber. d. Deutsch. chem. Gesellsch. XIX, p. 3304.
[3]) WIDMAN & SÖDERBAUM, Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1888, N:o 3, p. 149.
[4]) WIDMAN, » » 1889, N:o 7, p. 463.

kuminserierna, icke varit det, utan ock att *sådana omlagringar öfver hufvud taget alls icke existera.*

Denna undersökning afslutades redan i slutet af förra året och resultaten meddelades kort därpå i Ber. der Deutsch. chem. Gesellschaft (XXIV, p. 439). Föranledda af det »öfverraskande» i mina iakttagelser hafva A. Töhl[1]) och M. Fileti[2]) hvar för sig repeterat mina försök och redan publicerat de därvid erhållna resultaten och dessutom har R. Meyer[3]) förklarat sig skola upprepa sina försök öfver syntetisk p-isopropyltoluol, fastän han ännu icke offentliggjort något därom. Töhl och Fileti hafva icke kunnat annat än i allo bekräfta mina uppgifter.

Slutligen vill jag påpeka, att den ofvan beskrifna undersökningen står i fullständig öfverensstämmelse med det resultat med afseende på propylgruppens struktur, som kan dragas ur Wallach's[4]) under förra året och Semmler's[5]) i år publicerade vackra undersökningar öfver cineol och geraniumaldehyd, hvilken senare vid destillation med vattenabsorberande medel ger cymol. Ingendera af dessa forskare har dock närmare inlåtit sig på den invecklade frågan om propylgruppens natur i hithörande föreningar och ännu mindre på lösande af den motsägelse, som förefans mellan deras iakttagelser och de äldre undersökningarne öfver cymols konstitution.

---

[1]) Ber. d. Deutsch. chem. Gesellsch. XXIV, p. 1649.
[2]) Journ. für pr. Chemie, N. F., Bd. 44, p. 150.
[3]) Ber. d. Deutsch. chem. Gesellsch. XXIV, p. 970.
[4]) Ann. Chem. Pharm., Bd. 258, p. 319.
[5]) Ber. d. Deutsch. chem. Gesellsch. XXIV, p. 204.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1891. N:o 7.
Stockholm.

Om tvänne isomera dioximidobernstensyror.

Af H. G. Söderbaum.

[Meddeladt den 9 September 1891 genom P. T. Cleve.]

Enligt den af Hantzsch och Werner[1]) uppstälda teorien öfver atomernas geometriska anordning i kväfvehaltiga molekyler äfvensom på grund af de experimentella undersökningar, hvilka dels ligga till grund för denna teori, dels hafva blifvit föranledda af densamma, var det a priori icke osannolikt, att fall af isomeri, analoga med dem, hvilka af V. Meyer och K. Auwers m. fl. blifvit påvisade för aromatiska dioximer och särskildt benzildioximerna, äfven skulle kunna anträffas inom den *alifatiska serien*, och att döma af den hittills vid studiet af isomera oximer vunna erfarenheten syntes särskildt en närmare undersökning af *dioximidobernstensyran* vara egnad att i detta afseende lemna gynsamma resultat.

En förening af dioximidobernstensyrans sammansättning, den s. k. diisonitrosobernstensyran (= dioxivinsyrans dioxim)

$$\begin{matrix} HOOC \diagdown & & \diagup COOH \\ & C—C & \\ HO . N \diagup\!\!\!\diagup & & \diagdown\!\!\!\diagdown N . OH \end{matrix}$$

har redan för flera år sedan blifvit framställd på V. Meyers laboratorium af Ad. Müller.[2]) Af denna syra äro, såväl som af de analogt sammansatta benzildioximerna, trenne stereoisomera »konfigurationer» möjliga, hvilka enligt det af Hantzsch[3]) ny-

[1]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. XXIII, 11, 1243.
[2]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. XVI, 2985.
[3]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. XXIV, 29.

ligen föreslagna beteckningssättet kunna särskiljas medels benämningarne *αα*-, *αβ*- och *ββ*-dioxim:

```
HOOC . C—C . COOH        HOOC . C————C . COOH
       ‖   ‖                    ‖        ‖
   HO . N   N . OH           HO . N   HO . N
     αα-dioxim.                  αβ-dioxim.

          HOOC . C——————C . COOH
                 ‖          ‖
               N. OH    HO . N
                   ββ-dioxim.
```

I sjelfva verket har det hittills lyckats att af dioxivinsyrans dioxim erhålla *tvänne* isomera modifikationer, af hvilka den ena alltid uppstår såsom primär produkt af hydroxylamins inverkan på dioxivinsyra och är identisk med den MÜLLER'ska diisonitrosobernstensyran, under det att den andra modifikationen erhålles såsom sekundär produkt genom omvandling af den förra. Denna omvandling kan åstadkommas på flera olika sätt; särdeles glatt försiggår densamma vid inverkan af rykande saltsyra. En motsatt omvandling af den sekundära oximen till den primära har däremot hittills aldrig iakttagits; lika litet som den tredje stereoisomera modifikationen ännu kunnat erhållas.

För att om möjligt bestämma de ifrågavarande oximernas konfiguration underkastades deras förhållande å ena sidan till ättiksyreanhydrid, å den andra till acetylklorid en närmare undersökning med tillämpning af den metod, som HANTZSCH nyligen med framgång användt för bestämmande af stereoisomera aldoximers och ketoximers konfiguration.[1])

Det har därvid visat sig, att den primära oximen med *ättiksyreanhydrid* lemnar en väl kristalliserande *diacetylförening*, som med vatten regenererar den ursprungliga oximen oförändrad. Den sekundära oximen *sönderfaller* däremot under samma betingelser redan i köld glatt i *kolsyra, cyan och vatten* enligt formeln:

$$\begin{matrix}HOOC\\HO.N\end{matrix}\!\!>\!C\!-\!C\!<\!\!\begin{matrix}COOH\\N.OH\end{matrix} = C_2N_2 + 2CO_2 + 2H_2O.$$

[1]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. XXIV, 13.

På fullkomligt analogt sätt sönderfaller nu äfven — enligt HANTZSCH's undersökningar[1]) — den ena af fenylglyoxylsyrans oximer, nämligen den, hvars konfiguration uttryckes genom formeln

$$\begin{array}{l} C_6H_5 . \underset{\Vert}{C} . COOH \\ \quad\quad\;\; N . OH , \end{array}$$

endast med den skilnaden, att reaktionen här vanligen försiggår i *tvänne* olika stadier, i det att först, jämte benzonitril, ett fast, isolerbart acetylderivat uppstår, hvilket sedermera vid behandling med sodalösning glatt sönderfaller i kolsyra, benzonitril och ättiksyra:

$$\begin{array}{l} C_6H_5 . \underset{\Vert}{C} . COOH \\ \quad\quad\;\; N . OCOCH_3 \end{array} = \begin{array}{l} C_6H_5 . \underset{|||}{C} \\ \quad\quad\;\; N \end{array} + CO_2 + \begin{array}{l} H \\ | \\ OCOCH_3 . \end{array}$$

Enligt den erfarenhet, som hittills vunnits, inträffar en dylik direkt, af nitrilbildning åtföljd spaltning blott i sådana oximer, som innehålla den vid kväfve bundna hydroxylgruppen i »korresponderande läge» antingen till en karboxylgrupp eller till en väteatom. Såsom lätt inses, kan häraf med största sannolikhet dragas den slutsatsen, att äfven i den sekundära oximen af dioxivinsyran de båda hydroxylgrupperna befinna sig i korresponderande ställning till hvar sin karboxylgrupp, eller med andra ord att ifrågavarande förening är att uppfatta såsom $\alpha\alpha$-dioxivinsyreoxim:

$$\begin{array}{c} HOOC—\underset{\Vert}{C}—\underset{\Vert}{C}—COOH \\ HO—N \quad N—OH. \end{array} \qquad (I)$$

I förbigående må äfven nämnas, att denna oxim och den därmed följaktligen analoga β-fenyloximidoättiksyran äfven i andra hänseenden förete en omisskännelig öfverensstämmelse sinsemellan. I fullkomlig likhet med den förra utgör äfven den senare den mera stabila modifikationen, men bildas det oaktadt likaledes aldrig såsom primär reaktionsprodukt vid inverkan af hydroxylamin på modersubstansen, utan först genom den isomera oximens behandling med saltsyra o. s. v.

---

[1]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. XXIV, 41.

Under förutsättning af den nyss anförda slutledningens riktighet återstår således för den *primära dioxivinsyredioximen* endera af de båda $\alpha\beta$- eller $\beta\beta$-konfigurationerna, alltså:

$$\begin{array}{ccc} \text{(II)} & & \text{(III)} \\ \begin{array}{l} \mathrm{HOOC{-\!-\!-}C{-}COOH} \\ \quad\;\; \| \qquad\quad \| \\ \quad \mathrm{N.OH}\;\; \mathrm{N.OH} \end{array} & \text{eller} & \begin{array}{l} \mathrm{HOOC{-}C{-\!-\!-}C{-}COOH} \\ \qquad\quad\;\; \| \qquad\quad \| \\ \qquad\;\; \mathrm{N.OH}\;\; \mathrm{HO.N} \end{array} \end{array}$$

och om man till en början endast tager dess förhållande till ättiksyreanhydrid i betraktande, låter det ådagalägga sig, att ett visst företräde måste tillmätas $\beta\beta$-konfigurationen. Ty enligt de erfarenhetsrön, som redan blifvit gjorda i fråga om $\alpha\alpha$-föreningen, skulle man vänta, att en dioxivinsyredioxim af $\alpha\beta$-typen vid inverkan af ättiksyreanhydrid borde undergå en *partiell* spaltning på ett sätt, som kan förtydligas genom ekvationen:

$$\begin{array}{l} \mathrm{HOOC{-}C{-\!-\!-}COOH} \\ \qquad\quad\; \| \qquad\quad \| \\ \qquad\;\; \mathrm{N{-}OH}\;\; \mathrm{N{-}OH} \end{array} = \begin{array}{l} \mathrm{HOOC.C{-\!-\!-}C} \\ \qquad\quad\;\; \| \qquad\;\; \||| \\ \qquad\;\; \mathrm{N{-}OH}\;\; \mathrm{N} \end{array} + \begin{array}{l} CO_2 \\ H_2O. \end{array}$$

Härvid borde alltså ett derivat af mesoxalsyra uppstå, hvilket emellertid ingalunda är fallet. Såsom redan ofvan blifvit omnämdt, ger nämligen den primära oximen med ättiksyreanhydrid en väl karaktäriserad och jämförelsevis beständig diacetylförening, under det att *båda* karboxylgrupperna förblifva fullständigt intakta. Gent emot den primära oximens uppfattning såsom ett $\beta\beta$-derivat skulle visserligen kunna anföras, att en förening af formel III i analogi med den s. k. γ-benzildioximen borde under förlust af 1 mol. vatten öfvergå till ett furazanderivat. Att det emellertid hittills icke lyckats aflägsna vatten ur molekylen, utan att samtidigt kolsyra bortgått, är lätt förklarligt, om man tar följande omständigheter i betraktande.[1]) Af CRAMERS undersökningar känner man, att β-monoximen af bernstensyra

$$\begin{array}{l} \mathrm{HOO\overset{\times}{C}{-}C{-}CH_2{-}COOH} \\ \qquad\quad\;\; \| \\ \qquad\;\; \mathrm{NOH} \end{array}$$

med största lätthet afspaltar den med × betecknade karboxylgruppen i form af kolsyra. Bernstensyrans $\beta\beta$-dioxim innehåller

[1]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. XXIV.

nu den för en i ofvannämda riktning gående sönderdelning gynsamma konfigurationen

$$\begin{array}{l} HOOC{-}C{-} \\ \| \\ N{-}OH \end{array}$$

två gånger och bör således ännu lättare än monoximen förlora kolsyra och ge upphof till en monokarbonsyra (se vidare nedan).

För att ställa spörsmålet om de ifrågavarande oximernas konfiguration i en möjligast allsidig belysning, måste emellertid äfven deras förhållande till acetylklorid tagas med i räkningen. Detta reagens öfverför båda dioxivinsyredioximerna i flytande produkter (acetylderivat), hvilka vid behandling med vatten sönderfalla i ättiksyra och den sekundära oximen, likgiltigt från hvilkendera oximen de leda sitt ursprung. Dels på grund häraf, dels emedan de äfven annars i hvarje afseende förhålla sig på samma sätt, äro dessa flytande acetylföreningar att betrakta såsom med hvarandra identiska.

Af dessa sakförhållanden följer i hvarje fall, att den primära, som $\beta\beta$-dioxim uppfattade produkten genom inverkan af acetylklorid och därpå följande behandling med vatten låter öfverföra sig i den sekundära $\alpha\alpha$-dioximen, en reaktion, hvilken, som bekant, äfven blifvit iakttagen i fråga om andra stereoisomera oximer. Af den omständigheten, att vatten saponifierar den nyssnämda flytande acetylföreningen till $\alpha\alpha$-dioxim, vore det för öfrigt enklast att draga den slutsatsen, att äfven denna acetylförening sjelf vore att hänföra till $\alpha\alpha$-serien. Det oaktadt tala flera tungt vägande skäl för att densamma snarare bör uppfattas som ett diacetat af den asymmetriska, i fritt tillstånd hittills icke kända $\alpha\beta$-dioximen:

$$\begin{array}{lcl} HOOC{-}C & \text{———————} & C{-}COOH \\ \quad\quad\quad\;\| & & \| \\ CH_3CO\,.\,O\,.\,N & & CH_3CO\,.\,O\,.\,N. \end{array}$$

De vigtigaste af dessa skäl äro följande:

1) Om den flytande acetylföreningen verkligen är ett $\alpha\alpha$-derivat, är det oförklarligt, hvarför icke den sekundära $\alpha\alpha$-oximen

genom behandling med ättiksyreanhydrid äfven låter öfverföra sig i samma, i och för sig tämligen beständiga acetat, utan alltid fullständigt sönderfaller i kolsyra, vatten och cyan, en omständighet, som just ådagalägger, med hvilken utomordentlig lätthet det *verkliga* $\alpha\alpha$-diacetatet spontant sönderdelas.

2) Vidare bör man erinra sig den inverkan acetylklorid utöfvar på stereoisomera aldoximer. Dessa öfverföras nämligen genom detta reagens — enligt HANTZSCH — alltid i första hand till en blandning α-acetat och β-klorhydrat i lika molekyler, och detta vare sig man utgår från α- eller β-oxim;[1]) d. v. s. acetylkloriden eller, rättare sagdt, den genom acetyleringen frigjorda saltsyran åstadkommer hos halfva antalet befintliga molekyler en vridning af dessas oximhydroxyl, så att den motsatta konfigurationen uppstår. På ett liknande sätt torde äfven denna syreklorids inverkan på ifrågavarande dioximer böra tolkas, med den skilnad blott, att hvad som hos monoximerna försiggår i 2:ne särskilda molekyler, hos dioximidobernstensyrorna däremot eger rum inom en och samma molekyl, hvars ena hydroxylgrupp således får antagas förblifva orubbad, under det att den andra genom vridning öfverföres i ett läge, motsatt det ursprungliga. Under denna förutsättning bör tydligen såväl ur $\alpha\alpha$- som ur $\beta\beta$-dioximen ett och samma asymmetriska $\alpha\beta$-diacetat uppstå.

Om den primära $\beta\beta$-dioximens fasta acetylderivat och det nyss omnämda, som $\alpha\beta$-förening uppfattade, flytande acetatet behandlas med sodalösning eller natronlut, erhållas resultat, som i vissa afseenden förete en icke obetydlig afvikelse från hvad man på grund af analogien med benzildioximerna och fenyloximidoättiksyrorna kunde vara böjd att vänta. Enligt V. MEYERS och K. AUWERS undersökningar inträder, som bekant, vid inverkan af alkalier på acetylderivaten af $\alpha\alpha$- eller $\alpha\beta$-benzildioxim[2]) helt enkelt en saponifikation, under det att $\beta\beta$-benzildioximens diacetat vid behandling med natronlut redan i köld ger en anhydrid, en omständighet, som just lemnar det kraftigaste

[1]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. XXIII, 39.

[2]) Beträffande nomenklaturen jfr HANTZSCH, Ber. d. deutsch. chem. Ges. XXIII, 29.

stödet för den sistnämda oximens uppfattning såsom ett $\beta\beta$-derivat. Å andra sidan saponifieras α-fenyloximidoättiksyra såväl af alkalier som af alkalikarbonat till oförändrad α-oxim, under det att motsvarande β-derivat med natron regenerar β-oximen, men däremot vid inverkan af alkalikarbonat sönderfaller i kolsyra, benzonitril och ättiksyra. I motsats härtill ge nu *båda* acetylföreningarne af dioxivinsyrans oximer såväl med alkalier som med alkalikarbonat *en och samma syra* af den empiriska sammansättningen $C_3H_2N_2O_3 + \frac{1}{2}H_2O$, hvilken således innehåller 1 molekyl kolsyra och $\frac{1}{2}$ molekyl vatten mindre än dioxivinsyredioximerna sjelfva. Den halfva vattenmolekylen utgöres bevisligen af kristallvatten, hvilket bland annat ådagalägges däraf, att den icke vidare förekommer i silfversalterna; följaktligen måste denna syra uppfattas såsom en under samtidig kolsyreafspaltning intramolekylärt bildad anhydrid. Ett närmare studium af denna förening har gifvit vid handen, att den i sjelfva verket är identisk med den af WOLFF genom inverkan af natronlut på furazankarbonsyra först framstälda,[1]) sedermera af WOLFF och GANS för kort tid sedan utförligare beskrifna[2]) »cyannitrosoättiksyran», sammansatt enligt formeln

```
C—C—COOH
‖   ‖
N   N—OH.
```

Det vigtigaste stödet för syrans uppfattning i enlighet med denna konstitutionsformel lemnar dess förhållande till kokande kalilut, hvaraf den under ammoniakutveckling öfverföres till isonitrosomalonsyra:

```
HOOC—C—COOH
     ‖
     N.OH.
```

Cyanisonitrosoättiksyran uppstår för öfrigt utom på nyss nämda sätt äfven såsom en konstant biprodukt vid framställningen af den primära oximen.

---

[1]) Ann. Chem. *260*, 79.

[2]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. XXIV, 1169.

Tolkningen af detta de båda acetylföreningarnes förhållande till alkalier och alkalikarbonat är icke utan sina svårigheter. Om man, såsom i det föregående skett, antager, att det flytande acetylderivatet rätteligen bör räknas till $\alpha\beta$-serien, är det visserligen lätt förklarligt, hvarför *detsamma* vid inverkan af alkalikarbonat sönderfaller i cyannitrosoättiksyra, ättiksyra och kolsyra:

$$\begin{array}{ccc} \text{HOOC—C} & \text{———————} & \text{COOH} \\ \| & & \| \\ CH_3CO\,.\,ON & & CH_3CO\,.\,ON \end{array} + H_2O =$$

$$\begin{array}{c} CO_2 \\ + \\ 2CH_3COOH \end{array} + \begin{array}{ccc} \text{C} & \text{———} & \text{C—COOH} \\ ||| & & \| \\ \text{N} & & \text{HO}\,.\,\text{N} \end{array},$$

ty denna reaktion vore helt enkelt analog dels med acetyl-β-fenyloximidoättiksyrans spaltning i benzonitril, ättiksyra och kolsyra, dels med den sönderdelning, hvilken, såsom ofvan blifvit visadt, $\alpha\alpha$-dioxivinsyreoximens [intermediärt bildade] diacetylderivat undergår. Skilnaden är blott den, att medan den sistnämda föreningen med sina 2:ne α-ställningar redan spontant sönderfaller och därvid afspaltar bägge karboxylgrupperna, så kräfves däremot i fråga om det flytande $\alpha\beta$-derivatet medverkan af ett saponifierande agens för att sönderdelningen skall komma till stånd, och endast den ena, nämligen den till hydroxyl närbelägna karboxylgruppen afspaltas här från molekylen. Ur denna synpunkt sedt vore den ifrågavarande reaktionen i och för sig endast ytterligare ett välkommet bevis för det flytande acetylderivatets $\alpha\beta$-konfiguration. Emellertid blir beviskraften af detta argument tydligen fullkomligt illusorisk, så snart man tar i betraktande den omständigheten, att äfven det fasta acetylderivatet, som ju i hvarje fall måste ega en annan konfiguration än det flytande, icke desto mindre vid inverkan af alkalier eller alkalikarbonat undergår fullkomligt samma sönderdelningsprocess som detta senare.

För detta sakförhållande synes för tillfället endast tvänne förklaringssätt vara möjliga: å ena sidan kan man föreställa sig, att alla stereoisomera acetylföreningar af dioximidobernstensyran, de

må nu motsvara hvilken konfiguration som hälst, genom alkalier och alkalikarbonat i första hand omvandlas till derivat af en och samma konfiguration, nämligen den som erbjuder de största möjliga förutsättningarne för en intramolekylär afspaltning af 1 mol. vatten och 1 mol. kolsyra, så att därvid cyannitrosoättiksyra uppstår. Att dessa vilkor företrädesvis och bäst uppfyllas af $\alpha\beta$-konfigurationen, framgår utan vidare argumentering vid en blick på de ofvan anförda formlerna I, II, III (sid. 499 och följ.).

Å den andra sidan kan man äfven antaga, att de af CH_3CO . O-gruppernas olika ställning till karboxyl betingade differenserna i kemiskt afseende hos ifrågavarande kroppar äro af en så subtil karakter, att de, i motsats till hvad fallet är hos vissa oximer af aromatiska serien, öfver hufvud *icke* förmå taga sig ett uttryck uti acetylföreningarnes olikartade förhållande gent emot alkalier och alkalikarbonat. Ett dylikt förhållande vore jämförligt med den omständigheten, att t. ex. alkalier och alkalikarbonat utöfva en fullkomligt olika inverkan på acetylderivatet af β-fenyloximidoättiksyra, i det att, som förut blifvit nämdt, de förra helt enkelt verka saponifierande, de senare däremot kolsyreafspaltande, under det att däremot i fråga om samma reagentiers inverkan på det flytande acetylderivatet af dioximidobernstensyran icke den ringaste skiljaktighet gör sig gällande.

Hvilken af de båda här anförda förklaringsgrunderna eger större sannolikhet, torde för närvarande icke kunna med visshet afgöras.

Efter denna inledande öfversigt må i det följande lemnas en närmare redogörelse för den experimentella undersökningens hufvudsakliga resultat.

Primär dioxivinsyredioxim

($\beta\beta$-dioximidobernstensyra).

$$
\begin{array}{ccc}
HOOC—C & ———— & C—COOH \\
\| & & \| \\
N—OH & & HO—N.
\end{array}
$$

Såsom i det föregående angifvits, har denna förening redan för åtta år sedan blifvit framstäld af AD. MÜLLER genom att

behandla natriumdioxitartrat med en vattenlösning af *salpetersyrad* hydroxylamin i öfverskott, hvari det nämda natriumsaltet vid längre digerering löser sig. Lösningen fälles därpå med silfvernitrat, det utfälda silfversaltet sönderdelas medels saltsyra, och filtratet från klorsilfret afdunstas öfver svafvelsyra. Enligt denna metod kan man visserligen erhålla oximen i ganska rent tillstånd; den är emellertid tämligen tidsödande, på samma gång utbytet lemnar mycket öfrigt att önska.[1]) Det syntes därför önskvärdt att utarbeta en bekvämare framställningsmetod. I detta ändamål underkastades först och främst den s. k. nitrovinsyran — genom hvars sönderdelning som bekant dioxivinsyran uppstår — behandling med hydroxylaminsalt under på mångfaldigt sätt varierade försöksvilkor, utan att därvid det önskade resultatet hittills kunnat ernås. Däremot visade sig följande förfaringssätt vara jämförelsevis ändamålsenligt för framställningen af den ifrågavarande oximen:

En mol. af det i handeln förekommande natriumdioxitartratet (inköpt från »Gesellschaft für chemische Industrie» i Basel) blandades med något mer än 2 mol. saltsyrad hydroxylamin, blandningen löstes i minsta mängd kall, *utspädd* saltsyra af spec. vigten 1,03 till 1,04, och lösningen fick stå omkring 12 timmar vid vanlig temperatur, hvarefter den filtrerades och underkastades en energisk, 10 till 12 gånger upprepad utskakning med eter. De första eterextrakten äro vanligen något gulfärgade och förarbetas lämpligen särskildt. Eterlösningen af oximen torkas nu med vattenfritt natriumsulfat (icke klorkalcium) och afdunstas på vattenbad. Sedan omkring $^4/_5$ af etern gått öfver, afbrytes destillationen. För att förebygga omvandling till den isomera oximen, måste nämligen lösningsmedlets fullständiga afdestillering på vattenbad sorgfälligt undvikas. Kolfåterstoden uthälles nu i en flat skål, afkyles så hastigt som möjligt med tillhjelp

[1]) Exempelvis må följande försök anföras: 7,5 gr. rent natriumdioxitartrat behandlades med 4 mol. hydroxylaminnitrat under noggrannt iakttagande af MÜLLERS föreskrifter. Först efter 8 dagars förlopp hade saltet gått i lösning, och utbytet af ren dioxivinsyredioxim belöpte sig endast till 20 % af det teoretiska.

af is eller snö och afdunstas därpå omedelbart i vakuum öfver svafvelsyra. Så snart kristaller börjat afskiljas ur den nästan färglösa, sirupösa vätskan, tillsättes ungefär tredubbla volymen torr kloroform under omröring, hvarvid oximen så godt som fullständigt afskiljes i kristalliniskt tillstånd, under det att den som biprodukt alltid bildade cyanisonitrosoättiksyran stannar i lösningen. Den erhållna kristallmassan, som ifall operationen lyckats väl, är fullkomligt snöhvit, upptages på sugfiltrum, prässas med största möjliga skyndsamhet mellan filtrerpapper och torkas i vakuum öfver svafvelsyra. Gäller det att framställa oximen i fullkomligt rent tillstånd, löses den vattenfria substansen i absolut eter, som lemnar en ringa mängd af en gulaktig, amorf kropp olöst. Sedan denna blifvit affiltrerad, tillsättes kloroform, till dess en svag opalisering inträder. Efter någon tid anskjuter oximen i vackra, vattenklara kristaller. Vid noggrannt iakttagande af ofvan meddelade föreskrifter uppgår utbytet af ren oxim till omkring 30 % af det teoretiska eller 20 % af det använda natriumsaltet. Metoden kräfver visserligen större omsorg och försigtighet än den MÜLLER'ska, men tager i stället betydligt kortare tid i anspråk.

$\beta\beta$-Dioximidobernstensyran bildar stora, färglösa prismer, som äro ytterst lättlösliga i vatten och alkohol, äfvenledes mycket lättlösliga i eter, men däremot äfven vid uppvärmning olösliga i benzol, gasolja och kloroform. Föreningen innehåller kristallvatten i växlande mängd, allt efter som den blifvit kristalliserad ur olika lösningsmedel. På nyss angifna sätt kristalliserad ur en blandning af torr eter och kloroform innehåller den 2 mol. vatten:

	Ber. för $C_4H_4N_2O_6 + 2H_2O$.	Funnet.
$2H_2O$	16,98	17,02.

Ur eter kristalliserade präparat lemnade vid vattenbestämning sinsemellan mindre väl stämmande värden, hvilka häntydde på en vattenhalt, växlande från 2 ända till 4 procent. Den ur vatten eller fuktig eter kristalliserade substansen befanns slutligen innehålla 4 mol. vatten:

	Ber. för $C_4H_4N_2O_6 + 4H_2O$.	Funnet.
$4H_2O$	29,03	28,64.

Den i vakuum öfver svafvelsyra till konstant vigt torkade substansen är vattenfri. Analysen bekräftade den af MÜLLER angifna formeln.

	Ber. för $C_4H_4N_2O_6$.	Funnet. I.	II.
C	27,28	27,66	—
H	2,27	2,44	—
N	15,90	—	15,42.

Den ur vatten kristalliserade oximen smälter mellan 70—75°, den ur eter-kloroform erhållna vid omkring 90° under liflig gasutveckling, den vattenfria substansen däremot först vid 145—150° under samtidigt inträdande förkolning. MÜLLER anger för sin diisonitrosobernstensyra smältpunkten till 128—130°. Denna uppgift har med all sannolikhet afseende på ett ännu icke fullständigt vattenfritt präparat, enär, såsom jag funnit, smältpunkten så småningom stiger, i den mån vattnet aflägsnas. För öfrigt är redan en obetydlig förorening tillräcklig att framkalla en ganska stor sänkning af smältpunkten, likasom äfven å andra sidan den hastighet, hvarmed upphettningen sker, i någon mån influerar på de funna värdena. Och då nu $\beta\beta$-dioximen i alla andra afseenden visar fullkomligt samma egenskaper, som MÜLLER angifvit för den af honom framstälda diisonitrosobernstensyran, så torde de båda substansernas identitet vara ställd utom allt tvifvel, så mycket mera som ett af hydroxylamin*nitrat* och natriumdioxitartrat med noggrannt iakttagande af MÜLLERS föreskrifter framstäldt präparat, sedan kristallvattnet fullständigt blifvit aflägsnadt, äfvenledes visade sig ega smältpunkten 145°.

Föreningen är en stark, tvåbasisk syra. Dess vattenlösning utmärkes af starkt sur smak, färgar lackmus röd och löser karbonat under liflig kolsyreutveckling. Den kristalliserade oximen är lättlöslig såväl i syror som alkalier. Salterna äro till större delen lösliga i vatten. Svårlösliga äro silfver-, bly- och kalciumsalterna.

Silfversaltet, $C_4H_2N_2O_6Ag_2$, har redan blifvit framstäldt och analyseradt af MÜLLER. Det fälles vid tillsats af silfvernitrat till en utspädd lösning af syran och bildar långa, fina, rent hvita kristallnålar. Det är vattenfritt och tämligen beständigt gent emot ljusets inverkan. Vid försigtig upphettning sönderdelas det mellan 140—150° under mörkfärgning och häftig förpuffning.

För att karaktärisera syran undersöktes dessutom äfven det särdeles väl kristalliserande *kalciumsaltet*, $C_4H_2N_2O_6Ca + 4H_2O$. Det anskjuter ur en ej allt för koncentrerad vattenlösning af syran efter tillsats af kalciumacetat och bildar färglösa, makroskopiska, sexsidiga taflor, som vid 95—100° förlora 2 mol. vatten och vid högre temperatur så småningom sönderdelas.

	Ber. för	Funnet.	
	$C_4H_2N_2O_6Ca + 4H_2O$.	I.	II.
Ca	13,98	13,95	14,04
$2H_2O$	12,59	12,15	—.

I en vattenlösning af syran åstadkommer vidare: *Bariumacetat* ingen, men *bariumhydrat* i öfverskott en hvit, voluminös, i ättiksyra lättlöslig fällning; *ferrosulfat* ingen fällning, men vid påföljande tillsats af en droppe natronlut en intensivt violettröd färgning; *ferriklorid* en mörkröd färgning och *kopparacetat* en i första ögonblicket smutsigt grön fällning, som snart antar brun färg.

Den fullkomligt rena syran låter omkristallisera sig ur kokande vatten utan att därvid undergå någon förändring. Lika litet sönderdelas den af kokande, utspädda alkalier, utan kan efter lösningens neutralisering i oförändradt tillstånd extraheras med eter.

Däremot är den vida obeständigare gent emot syror och blir isynnerhet af koncentrerad saltsyra redan i köld glatt omvandlad i den isomera $\alpha\alpha$-dioximen.

Förhållande till ättiksyreanhydrid. Diacetylförening. Den vattenfria syran är tämligen svårlöslig i ättiksyreanhydrid. Med anledning däraf anstäldes ett försök att låta de båda kropparne

inverka på hvarandra i eterlösning, men utan framgång; ty efter eterns afdunstning utkristalliserade oximen ånyo med oförändrade egenskaper. Om däremot den fint pulveriserade syran öfvergjutes med ättiksyreanhydrid i öfverskott och digereras därmed uti ett väl tillslutet profrör vid vanlig temperatur eller bättre vid 0° i 1 till 2 dagars tid, hvarunder blandningen allt emellanåt omskakas, så inträder så småningom fullständig lösning. Får därpå öfverskottet af anhydrid frivilligt afdunsta i vakuum öfver alkalihydrat, så erhålles en vackert kristalliserad återstod, som lämpligen utprässas på en lerskifva och upprepade gånger tvättas med benzol för att fullständigt aflägsna de sista spåren af ättiksyreanhydrid. Under förutsättning, att man utgått från fullkomligt ren oxim, erhåller man så ett fullkomligt analysrent präparat.

Den nya föreningen bildar platta nålar eller rombiska taflor, hvilka smälta vid ungefär 150° under häftig sönderdelning. Den är lättlöslig i vatten, alkohol och eter, olöslig i benzol. Då den vid behandling med svafvelsyra mycket lätt afspaltar ättiksyra, måste den vara en acetylförening. Af analysen framgår, att den är ett diacetat:

	Ber. för		Funnet.	
	$C_4H_3N_2O_6(COCH_3)$.	$C_4H_2N_2O_6(COCH_3)_2$.	I.	II.
N	12,84	10,77	11,00	10,91.

Såsom var att vänta, är kroppen tämligen obeständig. Redan vid längre tids förvaring i exsiccator eller i luften förlorar den långsamt i vigt under afspaltning af ättiksyra. Likasom modersubstansen är den en stark syra. I synnerhet karaktäristiskt är *silfversaltet*, hvilket vid tillsats af silfvernitrat till en nyss beredd vattenlösning erhålles som en kristallinisk, af väl utbildade rektangulära taflor bestående fällning.

En närmare undersökning egnades åt acetylföreningens förhållande till vatten, äfvensom till natriumkarbonat och natriumhydrat.

Om substansen löses i en ringa mängd *vatten*, och lösningen lemnas att afdunsta vid rumstemperatur, inträder snart saponi-

fikation, så att ättiksyra och den ursprungliga oximen bildas, hvilken senare inom kort utkristalliserar synnerligen väl och utan svårighet kan identifieras. På grund häraf är alltså föreningen att uppfatta som ett derivat af den oförändrade, primära dioximen.

Af *sodalut* löses acetylföreningen under liflig kolsyreutveckling. Om den gulfärgade lösningen surgöres med svafvelsyra och utskakas med eter, erhålles efter eterlösningens afdunstning en färglös olja af starkt sura egenskaper, hvilken blott långsamt och ofullständigt kan förmås att stelna. För att rena densamma löstes den i litet vatten, neutralisererades med ammoniak och försattes därpå med silfvernitrat, hvarvid ett finkornigt silfversalt af intensivt gul färg utföll. Detta torkades, analyserades (se nedan) och sönderdelades med något mindre än en ekvivalent mängd utspädd saltsyra. Filtratet från klorsilfret lemnade efter afdunstning i vakuum efter någon tid en fast, väl kristalliserande syra, hvilken i hvarje hänseende visade sig vara identisk med den nedan utförligare beskrifna cyannitrosoättiksyran, Vid acetylföreningens saponifiering med soda afspaltas således samtidigt kolsyra och vatten.

Äfven till utspädd *natronlut* förhåller sig acetylföreningen på alldeles samma sätt som till sodalösning. För att isolera den därvid uppkommande nya syran kan man lämpligen surgöra den alkaliska lösningen med salpetersyra samt därefter direkt fälla densamma med silfvernitrat och sönderdela silfversaltet med en beräknad mängd saltsyra. Man erhåller så likaledes cyanisonitrosoättiksyra.

ββ. Dioximidobernstensyrans förhållande till acetylklorid. I eterlösning synes acetylklorid lika litet som ättiksyreanhydrid utöfva någon inverkan. Om däremot den fint fördelade syran längre tid under flitig omskakning digereras med acetylklorid, inträder slutligen äfven här fullständig lösning. Efter vätskans afdunstning i vakuum öfver kali återstår en trögflytande, nästan färglös olja, ur hvilken understundom helt små mängder af en fast, kristalliserande kropp afsätta sig. Oljan utgör tvifvelsutan

en acetylförening, enär man utan svårighet kan afspalta ättiksyra ur densamma. Som emellertid alla försök att erhålla kroppen i fattbart tillstånd slogo fel, lemnades dess analys tillsvidare åsido.

Denna olja saponifieras redan, om den får stå någon tid i fuktig luft eller ännu hastigare vid tillsats af några droppar vatten, men lemnar därvid, utom ättiksyra, såsom andra sönderdelningsprodukt icke den ursprungliga, *utan den därmed isomera, sekundära αα-dioximen.* Vid behandling med *natriumkarbonat* löser sig oljan under liflig gasutveckling. Den gula lösningen surgjordes med svafvelsyra och utskakades upprepade gånger med eter. Efter försigtig afdunstning af lösningsmedlet återstod en färglös, af ättiksyra starkt luktande olja, hvilken i vakuum snart stelnade till en väl kristalliserande substans. Denna smälte vid 101° och visade sig likaledes vara identisk med cyanisonitrosoättiksyran.

	Ber. för $C_3H_2N_2O_3 + {}^1/_2H_2O$.	Funnet.
N	22,76	22,99.

Samma syra uppstår äfven, om den flytande acetylföreningen löses i utspädd natronlut vid låg temperatur, och reaktionsprodukten på nyss angifna sätt isoleras.

	Ber. för $C_3H_2N_2O_3 + {}^1/_2H_2O$.	Funnet.
C	29,27	29,29
H	2,44	2,52.

2. Sekundär dioxivinsyredioxim,

(αα-dioximidobernstensyra).

```
HOOC—C——C—COOH
     ‖     ‖
  HO—N     N—OH.
```

Såsom redan ofvan blifvit nämdt, omvandlas den primära oximen mycket lätt i den isomera modifikationen under vissa omständigheter, isynnerhet när den icke är fullt ren. Denna benägenhet till omvandling gör sig ofta redan vid framställningen

af den förstnämda kroppen gällande på ett tämligen oválkommet sätt, t. ex. om vid eterlösningens afdunstning temperaturen får stiga för högt, eller om den utkristalliserade oximen icke hastigt nog bringas i torrt tillstånd. Ja, det inträffade stundom, att den redan genom sugning från större delen af vidhäftande moderlut befriade oximen vid utprässning på en lerskifva helt plötsligt öfvergick i flytande tillstånd, utan att det lyckades hejda den, såsom det syntes, från en enda punkt af kristallmassan utgående omvandlingsprocessen [1]).

Lämpligast framställes den sekundära oximen på det sätt, att den primära dioximidobernstensyran löses i minsta mängd koncentrerad, rykande saltsyra och därpå någon tid öfverlemnas åt sig sjelf. Snart börjar utkristalliseringen af den sekundära oximen, som i stark saltsyra är något svårlösligare än den primära. Efter några timmar isoleras föreningen genom filtrering med sugpump, tvättning med en ringa mängd kall, koncentrerad saltsyra och torkning på porös lera. För öfrigt kan omvandlingen äfven åstadkommas därigenom, att man mättar en lösning af den primära oximen i absolut eter med torr, gasformig saltsyra eller låter densamma stå någon tid med fosforpentaklorid; de på detta sätt erhållna produkterna äro emellertid mindre rena. Såsom ofvan nämdt, låter slutligen den primära dioximen indirekt öfverföra sig i isomeren genom inverkan af acetylklorid och därpå följande saponifiering af den flytande acetylföreningen med vatten.

$\alpha\alpha$-Dioximidobernstensyran bildar små vårtformiga, hårda kristallaggregat. Den visar i allmänhet samma löslighetsförhållanden som den isomera oximen, är alltså lättlöslig i vatten, alkohol och eter, olöslig i kloroform, benzol och gasolja. Om

---

[1]) Den spontana omvandlingen af den redan i fast tillstånd erhållna oximen är alltid beledsagad af ett öfvergående sönderflytande af densamma, hvilket efter all sannolikhet får sin förklaring därigenom, att den primära oximen håller mera kristallvatten bundet än den sekundära, som alltid kristalliserar med endast 2 mol. vatten. När omvandlingen eger rum, torde därför den senare lösa sig i den öfverskjutande vattenmängd, som därvid frigöres, och erhålles först efter dennas afdunstning i fast tillstånd.

eterlösningen försättes med kloroform, till dess opalisering inträder, afskiljes oximen vanligen såsom en olja, hvilken först efter en längre tid stelnar. Föreningen innehåller 2 mol. kristallvatten, som icke bortgå i exsiccator, ej ens vid evakuering, men däremot mycket lätt kunna aflägsnas genom upphettning till 40—45°.

	Ber. för $C_4H_4N_2O_6 + 2H_2O$.	Funnet. I.	II.	III.	IV.
C	22,64	22,87	—	—	—
H	3,77	3,90	—	—	—
N	13,21	—	13,60	—	—
$2H_2O$	16,98	—	—	16,81	17,03.

Den vid 40—45° till konstant vigt torkade substansen lemnade vid analys siffror, som stämma med formeln $C_4H_4N_2O_6$:

	Ber. för $C_4H_4N_2O_6$	Funnet. I.	II.	III.	IV.
C	27,28	27,67	27,30	—	—
H	2,27	3,36	3,04 [1])	—	—
N	15,90	—	—	16,05	15,89.

Den vattenfria substansen förkolar under häftig gasutveckling vid 145—150° liksom isomeren; den vattenhaltigas smältpunkt ligger icke väsentligt lägre. Såväl i sina kemiska förhållanden som beträffande salternas löslighet o. s. v. visar den stor öfverensstämmelse med den isomera föreningen, men karaktäriseras utan svårighet som ett särskildt kemiskt individuum genom sitt olika förhållande till silfver- och kopparsalter samt framför allt till ättiksyreanhydrid.

Silfversaltet, $C_4H_2N_2O_6Ag_2 + H_2O$, erhålles vid tillsats af silfvernitrat till en vattenlösning af syran såsom en hvit, finkornig, kristallinisk fällning, men aldrig i form af nålar. Det är tämligen okänsligt för ljuset. Vid långsam upphettning färgas det brunt mellan 145 och 150° och exploderar med häftighet vid cirka 153°. Det öfver svafvelsyra torkade saltet

[1]) Till följd af den vattenfria substansens betydande hygroskopicitet erhöllos alltid något för höga värden för vätehalten.

kvarhåller fortfarande 1 mol. vatten, som låter aflägsna sig genom upphettning till omkr. 60°.

	Ber. för $C_4H_2N_2O_6Ag_2 + H_2O$.	Funnet
Ag	52,94	53,30
H_2O	4,41	4,34.

Kalciumsaltet, $C_4H_2N_2O_6Ca + 3H_2O$, afskiljes *genast* vid tillsats af kalciumacetat till syrans lösning såsom en hvit, af mikroskopiska prismer bestående fällning. Kristallvattnet låter endast långsamt och ofullständigt aflägsna sig vid upphettning till 100°. För att noggrannare fastställa vattenhalten underkastades därför saltet fullständig analys.

	Ber. för		Funnet.		
	$C_4H_2N_2O_6Ca + 2H_2O$.	$C_4H_2N_2O_6Ca + 3H_2O$.	I.	II.	III.
C	19,20	17,91	18,50	—	—
H	2,40	2,98	2,87	—	—
N	11,20	10,45	—	10,02	—
Ca	16,00	14,93	—	—	15,04.

En vattenlösning af $\alpha\alpha$-dioximen förhåller sig till de flesta andra metallsalter, inklusive ferrosulfat och ferriklorid, på alldeles samma sätt som $\beta\beta$-dioximen, endast med den skilnad att kopparacetat utfäller ett *rent grönt*, amorft kopparsalt. Af kokande utspädda alkalier förändras oximen icke.

Förhållande till ättiksyreanhydrid och acetylklorid. Den kemiska olikheten mellan de båda oximerna framträder skarpast i deras förhållande till *ättiksyreanhydrid.* Ty medan, såsom ofvan anförts, den primära oximen af detta reagens låter öfverföra sig till ett fast, väl kristalliserande acetylderivat, undergår däremot isomeren under alldeles samma försöksvilkor fullständig sönderdelning, såsom framgår af följande försök.

0,2 gr. dioxim digererades med ättiksyreanhydrid i öfverskott vid vanlig temperatur, hvarvid en svag, men oaflåtlig gasutveckling gjorde sig märkbar, till dess att efter omkr. 48 timmar fullständig lösning inträdt. Vid lösningens afdunstning i vakuum erhölls en återstod, som endast vägde 0,004 gr., hvadan alltså så godt som uteslutande flyktiga reaktionsprodukter

uppstått. Vid uppvärmning på vattenbad fullbordades reaktionen, såsom var att vänta, på betydligt kortare tid. För att vinna närmare kännedom om sönderdelningsprodukternas natur leddes de vid reaktionen bildade gaserna genom barytvatten, hvarvid jämte bariumkarbonat äfven bariumcyanid kunde påvisas, under det att den vid kokning uppträdande ammoniaklukten häntydde på närvaron af ett cyansyradt salt. Vid inverkan af ättiksyreanhydrid på den sekundära oximen bildas alltså vatten, cyan och kolsyra, eller m. a. o. det intermediärt bildade $\alpha\alpha$-diacetatet sönderfaller spontant i ättiksyra, kolsyra och cyan.

Gent emot acetylklorid förhåller sig däremot den sekundära oximen fullkomligt på samma sätt som den primära. Den genom en längre tids digerering med öfverskjutande klorid erhållna lösningen kvarlemnade efter afdunstning i vakuum äfven här en färglös, icke stelnande olja af sirupskonsistens, som icke vidare kunde renas och därför ej heller analyserades.

Af vatten saponifieras denna olja redan vid vanlig temperatur mycket lätt till ättiksyra och den ursprungliga $\alpha\alpha$-dioximen, af natron- eller sodalösning öfverföres den i den redan vid flera tillfällen omnämda cyanisonitrosoättiksyran, hvars närmare beskrifning följer här nedan.

På grund af dessa sakförhållanden torde det ej lida något tvifvel, att produkten af den sekundära oximen och acetylklorid är identisk med den likaledes flytande acetylförening, som erhålles vid inverkan af samma syreklorid på den primära oximen; de skäl, som tala för dess uppfattning såsom $\alpha\beta$-derivat, hafva redan i den inledande öfversigten blifvit anförda.

3. **Cyanisonitrosoättiksyra.**

(Cyanoximidoättiksyra).

$$\begin{array}{l} \mathrm{HOOC{-}C{-\!-\!-\!-}C} \\ \qquad\quad\;\, \| \qquad\quad\, \| \! | + {}^{1}\!/_{2}\ \mathrm{H_2O.} \\ \qquad\quad \mathrm{N{-}OH\ \ N} \end{array}$$

Denna förening erhåller man dels som en konstant biprodukt vid framställningen af den primära dioxivinsyredioximen ur na-

triumdioxitartrat och hydroxylamin i af saltsyra sur lösning, dels som normal sönderdelningsprodukt af de båda acetylerade oximerna vid deras saponifiering medels soda eller natronlut. Cyanisonitrosoättiksyran har ungefär samtidigt med mina undersökningar äfven blifvit framstäld af L. WOLFF och P. F. GANS[1]), ehuru på en annan väg, nämligen genom oxidering af den s. k. furazanpropionsyran

$$\begin{array}{l} HC{-}C\,.\,CH_2\,.\,CH_2\,.\,COOH \\ \;\,\| \quad\;\; | \\ \;\,N \quad N \\ \quad \diagdown\diagup \\ \quad\; O \end{array}$$

med kamäleon och därpå följande omlagring af den i första hand bildade »furazankarbonsyran» medels natronlut.

För att skilja syran från dioxivinsyredioximen betjenar man sig lämpligen af dess löslighet i kloroform, enär detta lösningsmedel lemnar dioximen så godt som alldeles olöst. Medan alltså den senare till största delen utkristalliserar vid tillsats af kloroform till det koncentrerade eterextraktet (jfr sid. 507), stannar däremot syran kvar i moderluten. Efter några timmar affiltreras lösningen från den utkristalliserade oximen och afdunstas först på vattenbad, slutligen vid vanlig temperatur. Såsom återstod erhålles en gulaktig, sirupös olja, hvilken stundom stelnar redan efter en kort tid, vanligen dock först efter flera dagars förlopp. För att isolera kroppen från en ännu vidhäftande, smetig substans utprässas den på porös lera och fuktas upprepade gånger med helt litet kloroform. För att ytterligare rena densamma kan man lösa den i minsta mängd kloroform, filtrera lösningen från till äfventyrs befintlig, olöst återstod (dioxim), därpå låta den afdunsta vid rumstemperatur och ännu en gång prässa den utkristalliserade substansen på lera.

För *framställning* af syran, särskildt då det gäller att erhålla densamma i fullt rent tillstånd, har emellertid följande förfaringssätt visat sig vara lämpligare. Vattenfri och fint pul-

---

[1]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. XXIV, 1165.

veriserad dioximidobernstensyra [1]) — likgiltigt hvilkendera modifikationen — öfvergjutes i en kolf med acetylklorid i öfverskott (ungefär 4 delar). Man låter reaktionsblandningen, som allt emellanåt omskakas, stå så länge vid vanlig temperatur, till dess att all oxim gått i lösning, hvartill i allmänhet erfordras 1—2 dagar. I nödfall kan lösningen påskyndas genom tillsats af något absolut eter. Efter fullbordad reaktion afdunstas lösningen så hastigt som möjligt i vakuum, hvarpå den flytande återstoden löses i natronlut. Efter någon tid surgöres med svafvelsyra och utskakas upprepade gånger med eter. Vid försigtig afdunstning af lösningsmedlet erhålles som återstod en färglös olja, som i vakuum vid låg temperatur snart stelnar till en rent hvit kristallmassa. Den så erhållna produkten är redan efter en omkristallisering ur kloroform eller eter-benzol fullkomligt ren. Utbytet uppgick i allmänhet till nära 40 % af den använda dioxivinsyredioximen.

Cyanisonitrosoättiksyran kristalliserar i färglösa, platta, ofta något förgrenade nålar, som vanligen strålformigt utgå från en enda punkt. Den är mycket lättlöslig i vatten, alkohol och eter, tämligen lättlöslig i kloroform, olöslig i benzol och gasolja. Den vattenhaltiga syran smälter i rent tillstånd under liflig gasutveckling omkr. 102° (WOLFF och GANS ange 103°). Vid analys af exsiccatortorkad substans erhöllos följande värden:

	Ber. för		Funnet.		
	$C_3H_2N_2O_3 + H_2O$.	$C_3H_2N_2O_3 + \frac{1}{2}H_2O$.	I.	II.	III.
C	27,27	29,27	29,35	29,33	—
H	3,03	2,44	2,73	2,65	—
N	21,21	21,76	—	—	21,99.

Såsom af analysen framgår, innehåller föreningen ½ mol. kristallvatten, hvilket icke bortgår i exsiccator öfver svafvelsyra

[1]) Dioximidobernstensyran behöfver för detta ändamål icke vara fullt ren. Den vid behandling af natriumdioxitartrat med saltsyrad hydroxylamin erhållna råprodukten, som afskiljes vid tillsats af kloroform till de försigtigt koncentrerade eterextrakten, är äfven utan vidare omkristallisering tillräckligt ren.

vid 15—17°, ej ens vid evakuering. Då emellertid WOLFF och GANS anföra, att deras syra förlorar sitt kristallvatten i vakuum vid »rumstemperatur», så måste denna uppgift hänföra sig till en åtskilligt högre värmegrad än den ofvan angifna. I sjelfva verket lyckades det genom syrans uppvärmning i vakuum öfver fosforsyreanhydrid till omkr. 25° att, ehuru tämligen långsamt erhålla densamma i vattenfritt tillstånd.

	Ber. för $C_3H_2N_2O_3 + {}^1/_2H_2O$.	Funnet.
H_2O	7,32	7,31.

Den vattenfria syrans smältpunkt befanns ligga vid omkr. 120°. WOLFF och GANS uppgifva visserligen 129°, men i betraktande af den omständigheten, att smältningen åtföljes af sönderdelning, torde väl en fullt noggrann öfverensstämmelse knappt vara att vänta, så mycket mer som de för smältpunkten funna värdena äro tämligen beroende af det sätt och den hastighet, hvarmed upphettningen sker.

Vid syrans uppvärmning i torkskåp till 40—50° bortgick likaledes vatten, men någon konstant vigt kunde på detta sätt ej erhållas.

Att syrans verkliga molekylarvigt motsvarar den ofvan angifna formeln $C_3H_2N_2O_3$, framgår af följande molekylarvigtsbestämning:

Substans.	Isättika.	Depression.	Funnen mol. vigt.
0,233 gr.	16,30 gr.	0,515°	108
0,277 »	16,44 »	0,384°	109.

	Ber. för $C_3H_2N_2O_3$.
Molekylarvigt	114.

Syran sönderdelar karbonat, löses af natronlut med gul färg och kan efter lösningens neutralisering och utskakning med eter erhållas tillbaka i oförändradt tillstånd. Af koncentrerad svafvelsyra synes den vid vanlig temperatur ej förändras, men förstöres däremot så småningom vid kokning med utspädd saltsyra och öfverföres därvid förnämligast i oxalsyra. Vid upphettning i rör till 100° inträder likaledes fullständig sönderdel-

ning. Vid rörets öppnande iakttogs en intensiv cyanlukt. Vattenlösningen lemnade vid afdunstning en obetydlig, gulfärgad återstod af smetig konsistens, som med ferrosulfat gaf en starkt mörkröd färgning. Den undersöktes ej vidare. Af permanganat förstöres syran redan i köld.

Ett *surt silfversalt*, $C_3HN_2O_3Ag$, utfälles af silfvernitrat ur en vattenlösning af syran. *Hvit*, finkornig, kristallinisk fällning.

	Ber. för $C_3HN_2O_3Ag + {}^1/_2H_2O$.	$C_3H_2NO_3Ag$.	Funnet.
Ag	46,96	48,87	48,31.

Ett *neutralt silfversalt*, $C_3N_2O_3Ag_2$, erhålles däremot af en med natronlut eller ammoniak neutraliserad vattenlösning af syran vid tillsats af silfvernitrat och bildar en genom sin lifligt gula färg väl karaktäriserad fällning, hvilken, om den blifvit framställd ur tillräckligt utspädda lösningar, under mikroskopet visar sig vara tydligt kristallinisk. Saltet är explosivt och börjar redan vid 100° att brunfärgas. För analysen användes en vid 60—65° torkad substans. Äfven detta salt är vattenfritt.

	Ber för $C_3N_2O_3Ag + {}^1/_2H_2O$.	$C_3N_2O_3Ag_2$.	Funnet.
Ag	64,09	65,85	65,43.

Kopparsaltet, $C_3N_2O_3Cu + 4H_2O$, anskjuter vid tillsats af kopparacetat till en (ej allt för utspädd) vattenlösning af syran i form af sexsidiga eller skenbart fyrsidiga taflor med rombisk omkrets. På grund af sitt karaktäristiska utseende och sin svårlöslighet i kallt vatten är saltet särdeles egnadt för upptäckande af små mängder af syran på mikroskopisk väg. Vid upphettning sönderdelas det med explosionsartad häftighet. Af kristallvattnet bortgår hälften (2 mol.) i exsiccator öfver svafvelsyra.

	Ber. för $C_3N_2O_3Cu + 4H_2O$.	Funnet.		
C	14,56	14,47	—	—
H	3,23	3,06	—	—
N	11,33	—	11,36	—
Cu	25,56	—	—	25,10
H_2O (2 mol.)	14,56	—	—	14,65.

Anmärkningsvärdt är, att föreningen, ehuru utfäld ur sur lösning, eger sammansättningen af ett *neutralt* salt, ett bevis för syrans utpräglad tvåbasiska karaktär.

Kalciumsaltet $C_3H_2O_3Ca + 7H_2O$, erhålles af kalciumkarbonat och cyanisonitrosoättiksyra såsom sexsidiga, färglösa taflor, hvilka vid 100° delvis förlora sitt kristallvatten och därvid antaga gul färg.

	Ber. för $C_3N_2O_3Ca + 7H_2O$.	Funnet.
Ca	14,39	14,01.

Af ofvannämda salter hafva silfver- samt kalciumsalterna äfven blifvit framstälda och analyserade af WOLFF och GANS.

Ett ytterligare bevis för den här beskrifna syrans identitet med den WOLFFSKA lemnar dess förhållande till kokande alkalier. Vid ett försök att saponifiera föreningen genom kokning med måttligt stark natronlut (eg. vigt 1,08) lyckades det icke att påvisa någon ammoniakutveckling. Äfven vid digerering med stark kalilut (eg. vigt 1,23) på vattenbad iakttogs ingen märkbar färgförändring hos ett i kylrörets mynning instucket rödt lackmuspapper. Först vid ihållande kokning med kalilut af den nyssnämda koncentrationen inträdde den åsyftade saponifieringen. Ur den efter reaktionens fullbordande surgjorda och filtrerade lösningen utfäldes vid tillsats af en flerdubbel volym alkohol ett i början flytande kaliumsalt, hvilket snart stelnade till hvita blad. Föreningen visade samma egenskaper och sammansättning som det af v. BAEYER[1]) beskrifna kaliumnitrosomalonatet.

	Ber. för $C_3HNO_5K_2 + {}^1/_2H_2O$.	Funnet.
N	6,42	6,75.

Reaktionsförloppet kan följaktligen åskådliggöras genom följande skema:

$$\begin{array}{ccc} HOOC-C\!-\!\!-\!\!-\!\!-C & & HOOC-C-COOH \\ \| \qquad\quad \||| & + 2H_2O = & \| \\ N-OH \quad N & & N-OH \end{array} + NH_3 .$$

(isonitrosomalonsyra)

---

[1]) Ann. Chem. *131*, 292.

Genom denna reaktion torde, förhandenvaron af en cyangrupp uti syran $C_3H_2N_2O_3$ vara tillfullo ådagalagd. Bildningen af cyanisonitrosoättiksyra ur dioximidobernstensyra genom afspaltning af vatten och kolsyra erbjuder för öfrigt en omisskännelig analogi med det sakförhållandet, att den af CRAMER[1]) nyligen studerade β-(mono)oximidobernstensyran

$$\begin{array}{l} HOOC-C-CH_2-COOH \\ \| \\ NOH \end{array}$$

med lätthet afspaltar 1 mol. vatten och 1 mol. kolsyra samt därvid öfvergår i cyanättiksyra:

$$\begin{array}{l} C-CH_2 . COOH . \\ ||| \\ N \end{array}$$

---

[1]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. XXIV, 1198.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1891. N:o 7.
Stockholm.

Om en användning af de BERNOULLISKA funktionerna vid några serieutvecklingar.

Af ALEXANDER BERGER.

[Meddeladt den 9 September 1891 genom G. MITTAG-LEFFLER.]

§ 1.

I sina föreläsningar öfver högre aritmetik använder Professor KRONECKER en numerisk funktion ε_n, hvilken kan definieras på följande sätt för alla hela värden på n. Om n är delbart med någon hel qvadrat, som är större än enheten, så sätta vi

(1) $$\varepsilon_n = 0;$$

men om talet n icke är delbart med någon sådan qvadrat, sätta vi

(2) $$\varepsilon_n = +1 \text{ eller } \varepsilon_n = -1,$$

allteftersom n är en produkt af ett jämt eller af ett udda antal primfaktorer. Så är t. ex.

(3) $$\varepsilon_1 = +1,\ \varepsilon_2 = -1,\ \varepsilon_3 = -1,\ \varepsilon_4 = 0,\ \varepsilon_5 = -1,\ \varepsilon_6 = +1,$$
$$\varepsilon_7 = -1,\ \varepsilon_8 = 0,\ \varepsilon_9 = 0,\ \varepsilon_{10} = +1,\ \varepsilon_{11} = -1,\ \varepsilon_{12} = 0,$$
$$\varepsilon_{13} = -1,\ \varepsilon_{14} = +1,\ \varepsilon_{15} = +1,\ \varepsilon_{16} = 0.$$

Om w är en reel qvantitet, som är större än 1, så följer omedelbart af denna definition formeln

(4) $$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^w}\right) = \sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{\varepsilon_h}{h^w},$$

der vid produkten i venstra membrum p genomlöper alla positiva primtal. Men enligt en formel af EULER är

(5) $$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^w} = \frac{1}{\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^w}\right)},$$

och af eqv. (4) och (5) erhålles

(6) $$\sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{\varepsilon_h}{h^w} \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^w} = 1$$

eller

(7) $$\sum_{h=1}^{h=\infty} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\varepsilon_h}{(hk)^w} = 1 .$$

Om vi låta h och k antaga alla hela positiva talvärden, så är produkten hk alltid ett helt positivt tal n, och följaktligen kan eqv. (7) sättas under formen

(8) $$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n}{n^w} = 1;$$

hvad koefficienten c_n beträffar, så är denna tydligen bestämd af formeln

(9) $$c_n = \sum_h \sum_k \varepsilon_h ,$$

der de hela positiva talen h, k kombineras med hvarandra på alla sätt, som äro förenliga med vilkoret

(10) $$hk = n .$$

Häraf följer, att h måste vara en positiv divisor till n, och emedan för ett bestämdt värde på h talet k också är fullt bestämdt enligt eqv. (10), så kan eqv. (9) skrifvas

(11) $$c_n = \sum_d \varepsilon_d ,$$

der d vid summationen genomlöper talets n alla positiva divisorer.

Om vi nu införa det af eqv. (11) gifna uttrycket för c_n i eqv. (8), så erhålla vi formeln

(12)
$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sum_d \varepsilon_d}{n^w} = 1,$$

och emedan denna formel gäller för alla värden på w, som äro större än 1, så måste alla termerna utom den första i serien i venstra membrum vara noll. Vi erhålla alltså för $n \geqq 2$ formeln

(13)
$$\sum_d \varepsilon_d = 0,$$

der d genomlöper talets n positiva divisorer.

Vi antaga nu, att $g(h)$ är en funktion, som är fullkomligt bestämd för alla hela positiva värden på h, och som har den egenskapen, att

(14)
$$g(h)g(k) = g(hk)$$

för alla hela positiva värden på h och k. Vi anmärka här, att funktionen $g(h)$ blott behöfver vara definierad för hela positiva värden på h. För $k = 1$ erhålla vi af eqv. (14)

(15)
$$g(h)\{g(1) - 1\} = 0.$$

Sätta vi här $h = 1$, så finna vi

(16)
$$g(1)\{g(1) - 1\} = 0,$$

och således måste $g(1)$ antingen vara lika med 0 eller lika med 1. Om $g(1) = 0$, så följer af eqv. (15), att $g(h)$ är noll för hvarje helt positivt värde på h. Detta fall utesluta vi, och således är

(17)
$$g(1) = 1.$$

Om $f(x)$ är en funktion af en variabel x, hvilken har den egenskapen, att dubbelserien

(18)
$$\sum_{h=1}^{h=\infty} \sum_{k=1}^{k=\infty} \varepsilon_h g(hk) f(hkx)$$

är absolut konvergent, så kunna vi omordna termerna, och emedan h och k vid summationen antaga alla hela positiva talvärden, så är produkten hk alltid ett helt positivt tal, och vi erhålla en likhet af formen

$$(19) \qquad \sum_{h=1}^{h=\infty}\sum_{k=1}^{k=\infty}\varepsilon_h g(hk)\,f(hkx) = \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n g(n)\,f(nx)\,.$$

Den här ingående koefficienten c_n är tydligen bestämd af likheten

$$(20) \qquad c_n = \sum_h \sum_k \varepsilon_h ,$$

der vid summationen de hela positiva talen h och k kombineras med hvarandra på alla sätt, som äro förenliga med vilkoret

$$(21) \qquad hk = n.$$

Häraf följer, att h genomlöper alla positiva divisorer till n, och emedan för ett bestämdt värde på h talet k också är fullt bestämdt enligt eqv. (21), så kan eqv. (20) skrifvas

$$(22) \qquad c_n = \sum_d \varepsilon_d ,$$

der d genomlöper talets n alla positiva divisorer.

Om vi nu använda eqv. (13) på eqv. (22), så finna vi, att

$$(23) \qquad c_1 = 1,$$

samt att

$$(24) \qquad c_n = 0$$

för $n \geqq 2$. Med användning af dessa två formler transformeras eqv. (19) till

$$(25) \qquad \sum_{h=1}^{h=\infty}\sum_{k=1}^{k=\infty}\varepsilon_h g(hk)\,f(hkx) = g(1)\,f(x)\,.$$

Om vi i denna likhet låta de båda membra byta plats samt använda eqv. (14) och (17) så erhålla vi

$$(26) \qquad f(x) = \sum_{h=1}^{h=\infty}\varepsilon_h g(h) \sum_{k=1}^{k=\infty} g(k) f(hkx)\,,$$

hvarmed följande teorem är bevisadt.

Teorem I. Om $f(x)$ är en funktion af en variabel x, och om $g(h)$ är en funktion, som för alla hela positiva värden på h och k uppfyller vilkoren

$$g(h)g(k) = g(hk)\,, \quad g(1) = 1\,,$$

så är

$$f(x) = \sum_{h=1}^{h=\infty} \varepsilon_h g(h) \sum_{k=1}^{k=\infty} g(k) f(hkx)$$

för alla värden på x, för hvilka serien i högra membrum är absolut konvergent.

Medelst denna formel är funktionen $f(x)$ utvecklad i en dubbelserie. Om det är möjligt att summera den andra serien i högra membrum och således erhålla ett finit uttryck för densamma, så erhåller man en utveckling af funktionen $f(x)$ i en enkel serie.

Herr TCHEBICHEFF är, så vidt jag känner, den förste, som användt en dylik metod att utveckla funktioner i oändliga serier.[1])

§ 2.

Innan jag använder teorem I, skall jag här anföra några formler ur de BERNOULLISKA talens och funktionernas teori, och jag skall härvid begagna samma beteckningar för dessa tal och funktioner, som jag användt i några af mig under de senare åren utgifna afhandlingar.[2])

Med de BERNOULLISKA talen förstår jag koefficienterna

(27) $$B(0),\quad B(1),\quad B(2),\quad B(3),\ldots\ldots$$

i serieutvecklingen

(28) $$\frac{v}{e^v - 1} = B(0) + B(1)v + B(2)v^2 + B(3)v^3 + \ldots\ldots,$$

hvilken gäller för $|v| < 2\pi$. Af eqv. (28) och formeln

(29) $$e^v = 1 + \frac{v}{1} + \frac{v^2}{1\cdot 2} + \frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots\ldots$$

---

[1]) Note sur différentes séries. Par M. P. TCHEBICHEFF (Journal de mathématiques de Liouville. Tome XVI, année 1851, p. 343).

[2]) Se t. ex.: Recherches sur les nombres et les fonctions de Bernoulli. Par A. BERGER 1890. (Acta mathematica, tome 14, p. 249).

erhålles

$$(30)\quad v=\left\{\frac{v}{1}+\frac{v^2}{1\cdot 2}+\frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\dots\right\}\{B(0)+B(1)v+B(2)v^2+\dots\}$$

eller efter utförandet af produkten i högra membrum

$$(31)\quad v=\frac{B(0)}{1}v+\left\{\frac{B(1)}{1}+\frac{B(0)}{1\cdot 2}\right\}v^2 + \left\{\frac{B(2)}{1}+\frac{B(1)}{1\cdot 2}+\frac{B(0)}{1\cdot 2\cdot 3}\right\}v^3+\dots.$$

Sätta vi koefficienterna för v^m i båda membra lika med hvarandra, så erhålla vi

$$(32)\qquad B(0)=1\,,\quad \sum_{k=1}^{k=m}\frac{B(m-k)}{1\cdot 2\cdot 3\dots k}=0 \quad \text{för}\quad m\geqq 2\,.$$

Medelst eqv. (32) kunna de BERNOULLISKA talen lätt beräknas. Om vi nämligen i den andra likheten sätta m successive lika med $2, 3, 4, \dots.$ och lösa de sålunda erhållna eqvationerna, så finna vi de BERNOULLISKA talens värden; de tio första äro

$$(33)\qquad B(0)=1\,,\quad B(1)=-\frac{1}{2},\quad B(2=\frac{1}{12},\quad B(3)=0\,,$$
$$B(4)=-\frac{1}{720},\quad B(5)=0\,,\quad B(6)=\frac{1}{30240},\quad B(7)=0\,,$$
$$B(8)=-\frac{1}{1209600},\quad B(9)=0\,.$$

Med de BERNOULLISKA funktionerna förstår jag koefficienterna

$$(34)\qquad \varphi(z,0)\,,\quad \varphi(z,1)\,,\quad \varphi(z,2)\,,\quad \varphi(z,3)\,,\dots$$

i den för $|v|<2\pi$ gällande serieutvecklingen

$$(35)\qquad v\frac{e^{zv}-1}{e^v-1}=\varphi(z,0)+\varphi(z,1)v+\varphi(z,2)v^2+\varphi(z,3)v^3+\dots.$$

Af eqv. (28) och (29) erhålles

$$(36)\qquad v\frac{e^{zv}-1}{e^v-1}$$
$$=\left\{\frac{zv}{1}+\frac{z^2v^2}{1\cdot 2}+\frac{z^3v^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\dots\right\}\{B(0)+B(1)v+B(2)v^2+\dots\}$$

eller, om multiplikationen i högra membrum utföres,

$$(37)\qquad v\,\frac{e^{zv}-1}{e^{v}-1}=\frac{B(0)z}{1}v+\left\{\frac{B(1)z}{1}+\frac{B(0)z^2}{1\cdot 2}\right\}v^2$$
$$+\left\{\frac{B(2)z}{1}+\frac{B(1)z^2}{1\cdot 2}+\frac{B(0)z^3}{1\cdot 2\cdot 3}\right\}v^3+\ldots$$

Om vi sätta koefficienterna för v^m i de högra membra af eqv. (35) och (37) lika med hvarandra, så erhålla vi följande uttryck för de BERNOULLISKA funktionerna

$$(38)\qquad \varphi(z,0)=0\,,\quad \varphi(z,m)=\sum_{k=1}^{k=m}\frac{B(m-k)z^k}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}\quad \text{för}\quad m\geqq 1\,.$$

Af dessa likheter erhålla vi de BERNOULLISKA funktionernas värden; de sju första äro

$$(39)\qquad \varphi(z,0)=0\,,\quad \varphi(z,1)=z\,,\quad \varphi(z,2)=\frac{z^2}{2}-\frac{z}{2}\,,$$
$$\varphi(z,3)=\frac{z^3}{6}-\frac{z^2}{4}+\frac{z}{12}\,,\quad \varphi(z,4)=\frac{z^4}{24}-\frac{z^3}{12}+\frac{z^2}{24}\,,$$
$$\varphi(z,5)=\frac{z^5}{120}-\frac{z^4}{48}+\frac{z^3}{72}-\frac{z}{720}\,,\quad \varphi(z,6)=\frac{z^6}{720}-\frac{z^5}{240}+\frac{z^4}{288}-\frac{z^2}{1440}\,.$$

Om m är ett helt positivt tal hvilket som hälst, och om z är en reel qvantitet, som uppfyller vilkoren

$$(40)\qquad 0<z<1\,,$$

så gäller serieutvecklingen[1])

$$(41)\qquad \varphi(z,m)=-B(m)-\frac{1}{(2\pi i)^m}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{e^{2k\pi zi}+(-1)^m e^{-2k\pi zi}}{k^m}\,;$$

om $m\geqq 2$, så gäller formeln (41) för

$$(42)\qquad 0\leqq z\leqq 1\,.$$

Vi införa nu den numeriska funktionen $E(x)$, hvilken definieras på följande sätt. Om x är en reel qvantitet, så förstå vi med $E(x)$ det högsta af alla de hela tal, som icke öfverstiga x, så att alltid

---

[1]) Recherches etc. p. 267.

(43) $$0 \leqq x - E(x) < 1 .$$

Om x är en reel qvantitet hvilken som hälst, och vi sätta

(44) $$z = x - E(x) ,$$

så är enligt olikheterna (43) vilkoret (42) uppfyldt, och alltså erhälla vi för $m \geqq 2$ af eqv. (41)

(45) $$\frac{1}{(2\pi i)^m} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{e^{2k\pi xi} + (-1)^m e^{-2k\pi xi}}{k^m} = -B(m) - \varphi\{x - E(x), m\} ,$$

hvilken formel gäller för alla reela värden på x.

Vi uppställa nu följande definition.

Definition 1. Om x är en reel qvantitet hvilken som hälst, och m ett helt tal, som uppfyller vilkoret

$$m \geqq 2 ,$$

så definiera vi en funktion $T(x, m)$ medelst likheten

(46) $$T(x, m) = \varphi\{x - E(x), m\} + B(m) .$$

Emedan $\varphi(z, m)$ är en hel funktion af z, och emedan qvantiteten $x - E(x)$ alltid är innesluten mellan gränserna 0 och 1, så är $T(x, m)$ ändlig för alla reela värden på x, äfven för $x = \infty$. Då x varierar kontinuerligt mellan två konsekutiva hela tal, bibehåller $E(x)$ samma värde, och $x - E(x)$ varierar kontinuerligt, och således är funktionen $T(x, m)$ då kontinuerlig. Då variabeln x passerar ett helt tal, så varierar $x - E(x)$ diskontinuerligt och springer öfver från 1 till 0; emedan $m \geqq 2$, så äro både $\varphi(0, m)$ och $\varphi(1, m)$ lika med noll, och alltså är funktionen $T(x, m)$ äfven då kontinuerlig.

Härmed är således bevisadt, att funktionen $T(x, m)$ är ändlig och kontinuerlig för alla reela värden på variabeln x.

Om vi ersätta x med $x + 1$, så erhålles af eqv. (46)

(47) $$T(x+1, m) = \varphi\{x + 1 - E(x+1), m\} + B(m)$$

och alltså

(48) $$T(x+1, m) = \varphi\{x - E(x), m\} + B(m) ,$$

och af eqv. (46) och (48) följer

(49) $$T(x+1, m) = T(x, m),$$

hvilken likhet visar, att funktionen $T(x, m)$ är en periodisk funktion af x med perioden 1.

Om x är ett helt tal, så följer af eqv. (46)

(50) $$T(x, m) = \varphi(0, m) + B(m) = B(m).$$

Om vi använda eqv. (46) på formeln (45), så erhålla vi likheten

(51) $$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{e^{2k\pi xi} + (-1)^m e^{-2k\pi xi}}{k^m} = -(2\pi i)^m T(x, m),$$

hvilken gäller för alla reela värden på x. Härmed är följande teorem bevisadt.

Teorem II. Om man med x betecknar en reel qvantitet hvilken som hälst och med m ett helt positivt tal, som är större än eller lika med 2, så är

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{e^{2k\pi xi} + (-1)^m e^{-2k\pi xi}}{k^m} = -(2\pi i)^m T(x, m).$$

För $m = 2n$ erhålles häraf

(52) $$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos 2k\pi x}{k^{2n}} = \frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n}}{2} T(x, 2n),$$

och för $m = 2n+1$ finna vi

(53) $$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin 2k\pi x}{k^{2n+1}} = \frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n+1}}{2} T(x, 2n+1).$$

Formlerna (52) och (53) gälla för alla reela värden på x och för $n \geqq 1$.

I sina föreläsningar öfver de binära qvadratiska formerna har Professor KRONECKER infört begreppet fundamentaldiskriminant, och han förstår dermed hvarje helt tal Δ, som ej är ett positivt qvadrattal, och som är af någon af följande tre former:

1) $\Delta = P$, der $P \equiv 1$, mod 4,

2) $\Delta = 4P$, der $P \equiv -1$, mod 4,

3) $\Delta = 8P$, der $P \equiv 1$, mod 2,

om man med P förstår ett helt tal, som ej är delbart med någon annan qvadrat än med enheten. Om man med

$$\left(\frac{\Delta}{r}\right)$$

betecknar den af Prof. KRONECKER generaliserade LEGENDRE'ska symbolen, och med ε förstår talets Δ tecken, så att

$$\varepsilon = \pm 1, \quad \varepsilon\Delta > 0, \tag{54}$$

så gälla följande formler:

$$\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) = 0, \tag{55}$$

$$\left(\frac{\Delta}{r + h\varepsilon\Delta}\right) = \left(\frac{\Delta}{r}\right) \text{ för } r > 0, \quad h > 0, \tag{56}$$

$$\left(\frac{\Delta}{\varepsilon\Delta - r}\right) = \varepsilon \left(\frac{\Delta}{r}\right) \text{ för } 0 < r < \varepsilon\Delta, \tag{57}$$

$$\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) e^{\frac{2k\pi ri}{\varepsilon\Delta}} = \left(\frac{\Delta}{k}\right)(\sqrt{\Delta}) \text{ för } k > 0, \tag{58}$$

hvarvid iakttages, att qvadratroten $(\sqrt{\Delta})$ är bestämd af likheterna

$$(\sqrt{\Delta}) = |\sqrt{\Delta}| \text{ för } \Delta > 0, \tag{59}$$

$$(\sqrt{\Delta}) = i|\sqrt{-\Delta}| \text{ för } \Delta < 0. \tag{60}$$

Vi uppställa nu följande definition.

Definition 2. Om Δ är en fundamentaldiskriminant, och ε talets Δ tecken, och om x är en reel qvantitet hvilken som hälst, och om vidare m är ett helt tal, som uppfyller vilkoret

$$m \geqq 2,$$

så definiera vi en funktion $T(x, m, \Delta)$ medelst likheten

$$T(x, m, \Delta) = \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) T\left(x + \frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right). \tag{61}$$

Vi kunna uttrycka funktionen $T(x, m, \Delta)$ medelst de BERNOULLISKA funktionerna. Af eqv. (46) och (61) erhålla vi nämligen

$$(62)\quad T(x, m, \Delta) = \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right)\left[\varphi\left\{x + \frac{r}{\varepsilon\Delta} - E\left(x + \frac{r}{\varepsilon\Delta}\right), m\right\} + B(m)\right]$$

och således enligt eqv. (55)

$$(63)\quad T(x, m, \Delta) = \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi\left\{x + \frac{r}{\varepsilon\Delta} - E\left(x + \frac{r}{\varepsilon\Delta}\right), m\right\}.$$

Af funktionens $T(x, m, \Delta)$ definition och af funktionens $T(x, m)$ egenskaper följer, att funktionen $T(x, m, \Delta)$ är ändlig och kontinuerlig för alla reela värden på x, samt att denna funktion är periodisk och har perioden 1.

Om vi i eqv. (51) införa $x + \frac{r}{\varepsilon\Delta}$ i stället för x och förlänga den sålunda erhållna likheten med $\left(\frac{\Delta}{r}\right)$, så finna vi

$$(64)\quad \left(\frac{\Delta}{r}\right)\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{e^{2k\pi\left(x+\frac{r}{\varepsilon\Delta}\right)i} + (-1)^m e^{-2k\pi\left(x+\frac{r}{\varepsilon\Delta}\right)i}}{k^m} = -(2\pi i)^m \left(\frac{\Delta}{r}\right) T\left(x + \frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right).$$

Sätta vi här r successive lika med

$$1, 2, 3, \ldots\ldots \varepsilon\Delta - 1,$$

och addera de sålunda erhållna likheterna, så finna vi med användning af eqv. (61)

$$(65)\quad \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right)\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{e^{2k\pi\left(x+\frac{r}{\varepsilon\Delta}\right)i} + (-1)^m e^{-2k\pi\left(x+\frac{r}{\varepsilon\Delta}\right)i}}{k^m} = -(2\pi i)^m T(x, m, \Delta).$$

Genom ombyte af summationsordningen i venstra membrum erhålles häraf

$$(66)\quad \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^m}\left\{e^{2k\pi xi}\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)e^{\frac{2k\pi ri}{\varepsilon\Delta}}+(-1)^m e^{-2k\pi xi}\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)e^{-\frac{2k\pi ri}{\varepsilon\Delta}}\right\}$$
$$= -(2\pi i)^m T(x, m, \Delta).$$

Men enligt eqv. (58) är

$$(67)\quad \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)e^{\frac{2k\pi ri}{\varepsilon\Delta}}=\left(\frac{\Delta}{k}\right)(\sqrt{\Delta});$$

om vi i summan i venstra membrum införa $\varepsilon\Delta - r$ i stället för r, så finna vi med användning af eqv. (57)

$$(68)\quad \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)e^{-\frac{2k\pi ri}{\varepsilon\Delta}}=\varepsilon\left(\frac{\Delta}{k}\right)(\sqrt{\Delta}).$$

Om vi nu använda eqv. (67) och (68) på eqv. (66), så erhålla vi

$$(69)\quad \sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{e^{2k\pi xi}+\varepsilon(-1)^m e^{-2k\pi xi}}{k^m}=-\frac{(2\pi i)^m}{(\sqrt{\Delta})}T(x, m, \Delta),$$

hvarmed följande teorem är bevisadt.

Teorem III. Om Δ är en fundamentaldiskriminant, och ε är talets Δ tecken, så att

$$\varepsilon = \pm 1, \quad \varepsilon\Delta > 0,$$

och om vidare x är en reel qvantitet hvilken som hälst, och om m är ett helt tal, som uppfyller vilkoret

$$m \geq 2,$$

så är

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{e^{2k\pi xi}+\varepsilon(-1)^m e^{-2k\pi xi}}{k^m}=-\frac{(2\pi i)^m}{(\sqrt{\Delta})}T(x, m, \Delta).$$

Om n är ett helt positivt tal, så erhålla vi häraf för $\Delta > 0$

$$(70)\quad \sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{\cos 2k\pi x}{k^{2n}}=\frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n}}{2|\sqrt{\Delta}|}T(x, 2n, \Delta)$$

och

$$(71)\qquad \sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{\varDelta}{k}\right)\frac{\sin 2k\pi x}{k^{2n+1}} = \frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n+1}}{2\left|\sqrt{\varDelta}\right|}\,T(x,\,2n+1,\,\varDelta),$$

och för $\varDelta < 0$ erhålla vi

$$(72)\qquad \sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{\varDelta}{k}\right)\frac{\sin 2k\pi x}{k^{2n}} = \frac{(-1)^{n}(2\pi)^{2n}}{2\left|\sqrt{-\varDelta}\right|}\,T(x,\,2n,\,\varDelta)$$

och

$$(73)\qquad \sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{\varDelta}{k}\right)\frac{\cos 2k\pi x}{k^{2n+1}} = \frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n+1}}{2\left|\sqrt{-\varDelta}\right|}\,T(x,\,2n+1,\,\varDelta).$$

§ 3.

I det föregående är visadt, att funktionerna

$$T(x,\,m),\qquad T(x,\,m,\,\varDelta)$$

äro ändliga för alla reela värden på x. Det är lätt att bestämma gränser, mellan hvilka dessa funktioners värden alltid äro inneslutna.

Emedan qvantiteten

$$-\frac{e^{2k\pi xi}+(-1)^m e^{-2k\pi xi}}{i^m}$$

är reel samt ligger mellan gränserna -2 och 2, så gälla olikheterna

$$(74)\qquad -\frac{2}{k^m} \leqq -\frac{e^{2k\pi xi}+(-1)^m e^{-2k\pi xi}}{k^m i^m} \leqq \frac{2}{k^m}.$$

Sätta vi här k successive lika med $1, 2, 3, \ldots.$ och addera de sålunda erhållna olikheterna, så finna vi

$$(75)\qquad -2\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^m} \leqq -\frac{1}{i^m}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{e^{2k\pi xi}+(-1)^m e^{-2k\pi xi}}{k^m} \leqq 2\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^m}$$

och således enligt teorem II

$$(76) \qquad -2\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^m} \leqq (2\pi)^m T(x, m) \leqq 2\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^m}.$$

Emedan $m \geqq 2$, så är

$$(77) \qquad \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^m} \leqq \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^2}$$

och alltså

$$(78) \qquad \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^m} \leqq \frac{\pi^2}{6},$$

och af eqv. (76) följer

$$(79) \qquad -\frac{\pi^2}{3} \leqq (2\pi)^m T(x, m) \leqq \frac{\pi^2}{3}.$$

Teorem IV. För alla reela värden på x och för $m \geqq 2$ är funktionen

$$(2\pi)^m T(x, m)$$

innesluten mellan gränserna $-\frac{\pi^2}{3}$ och $\frac{\pi^2}{3}$.

Emedan qvantiteten

$$-(\sqrt{\varDelta})\left(\frac{\varDelta}{k}\right)\frac{e^{2k\pi xi} + \varepsilon(-1)^m e^{-2k\pi xi}}{i^m}$$

är reel samt ligger mellan $-2\sqrt{\varepsilon\varDelta}$ och $2\sqrt{\varepsilon\varDelta}$, så gälla olikheterna

$$(80) \qquad -\frac{2\sqrt{\varepsilon\varDelta}}{k^m} \leqq -(\sqrt{\varDelta})\left(\frac{\varDelta}{k}\right)\frac{e^{2k\pi xi} + \varepsilon(-1)^m e^{-2k\pi xi}}{k^m i^m} \leqq \frac{2\sqrt{\varepsilon\varDelta}}{k^m}.$$

Sätta vi här k successive lika med $1, 2, 3, \ldots$ och addera de på detta sätt erhållna olikheterna, så finna vi

$$(81) \qquad -2\sqrt{\varepsilon\varDelta}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^m} \leqq -\frac{(\sqrt{\varDelta})}{i^m}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{\varDelta}{k}\right)\frac{e^{2k\pi xi} + \varepsilon(-1)^m e^{-2k\pi xi}}{k^m}$$

$$\leqq 2\sqrt{\varepsilon\varDelta}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^m}$$

och således enligt teorem III

$$(82)\qquad -2\sqrt{\varepsilon\Delta}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^m}\leqq(2\pi)^m T(x, m, \Delta)\leqq 2\sqrt{\varepsilon\Delta}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^m}.$$

Med användning af formeln (78) erhålles nu af olikheterna (82)

$$(83)\qquad -\frac{\pi^2}{3}\leqq\frac{(2\pi)^m T(x, m, \Delta)}{\sqrt{\varepsilon\Delta}}\leqq\frac{\pi^2}{3},$$

hvarmed följande sats är bevisad.

Teorem V. För alla reela värden på x och för $m\geqq 2$ är funktionen

$$\frac{(2\pi)^m T(x, m, \Delta)}{\sqrt{\varepsilon\Delta}}$$

innesluten mellan gränserna $-\frac{\pi^3}{3}$ och $\frac{\pi^2}{3}$.

§ 4.

Om vi i teorem I sätta

$$(84)\qquad f(x) = e^{2\pi xi}+(-1)^m e^{-2\pi xi}$$

samt

$$(85)\qquad g(h) = \frac{1}{h^m},$$

der m är ett helt tal, som är större än eller lika med 2, så erhålla vi

$$(86)\qquad e^{2\pi xi}+(-1)^m e^{-2\pi xi} = \sum_{h=1}^{h=\infty}\frac{\varepsilon_h}{h^m}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{e^{2hk\pi xi}+(-1)^m e^{-2hk\pi xi}}{k^m}$$

och alltså enligt teorem II

$$(87)\qquad e^{2\pi xi}+(-1)^m e^{-2\pi xi} = -(2\pi i)^m\sum_{h=1}^{h=\infty}\frac{\varepsilon_h T(hx, m)}{h^m}.$$

Teorem VI. Om x är en reel qvantitet hvilken som hälst, och m ett helt tal, som är större än eller lika med 2, så är

$$e^{2\pi xi}+(-1)^m e^{-2\pi xi} = -(2\pi i)^m\sum_{h=1}^{h=\infty}\frac{\varepsilon_h T(hx, m)}{h^m}.$$

För $m = 2n$ erhålles häraf

(88) $$\cos 2\pi x = \frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n}}{2}\sum_{h=1}^{h=\infty}\frac{\varepsilon_h T(hx, 2n)}{h^{2n}},$$

och för $m = 2n+1$ erhålla vi

(89) $$\sin 2\pi x = \frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n+1}}{2}\sum_{h=1}^{h=\infty}\frac{\varepsilon_h T(hx, 2n+1)}{h^{2n+1}}.$$

Dessa två formler gälla för alla reela värden på x och för alla hela positiva värden på n.

Om vi i teorem I införa

(90) $$f(x) = e^{2\pi xi} + \varepsilon(-1)^m e^{-2\pi xi}$$

samt

(91) $$g(h) = \left(\frac{\varDelta}{h}\right)\frac{1}{h^m},$$

der m är ett helt tal, som är större än eller lika med 2, så erhålles

(92) $$e^{2\pi xi} + \varepsilon(-1)^m e^{-2\pi xi}$$
$$= \sum_{h=1}^{h=\infty}\left(\frac{\varDelta}{h}\right)\frac{\varepsilon_h}{h^m}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{\varDelta}{k}\right)\frac{e^{2hk\pi xi} + \varepsilon(-1)^m e^{-2hk\pi xi}}{k^m}$$

och alltså enligt teorem III

(93) $$e^{2\pi xi} + \varepsilon(-1)^m e^{-2\pi xi} = -\frac{(2\pi i)^m}{(\sqrt{\varDelta})}\sum_{h=1}^{h=\infty}\left(\frac{\varDelta}{h}\right)\frac{\varepsilon_h T(hx, m, \varDelta)}{h^m},$$

hvarmed följande teorem är bevisadt.

Teorem VII. Om $\varDelta$ är en fundamentaldiskriminant och ε talets $\varDelta$ tecken, och om vidare x är en reel qvantitet hvilken som hälst, och m ett helt tal, som är större än eller lika med 2, så är

$$e^{2\pi xi} + \varepsilon(-1)^m e^{-2\pi xi} = -\frac{(2\pi i)^m}{(\sqrt{\varDelta})}\sum_{h=1}^{h=\infty}\left(\frac{\varDelta}{h}\right)\frac{\varepsilon_h T(hx, m, \varDelta)}{h^m}.$$

Om n är ett helt positivt tal, så erhålles häraf för $\varDelta > 0$

(94) $$\cos 2\pi x = \frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n}}{2\left|\sqrt{\varDelta}\right|}\sum_{h=1}^{h=\infty}\left(\frac{\varDelta}{h}\right)\frac{\varepsilon_h T(hx, 2n, \varDelta)}{h^{2n}}$$

och

$$(95)\qquad \sin 2\pi x = \frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n+1}}{2|\sqrt{\Delta}|}\sum_{h=1}^{h=\infty}\left(\frac{\Delta}{h}\right)\frac{\varepsilon_h T(hx, 2n+1, \Delta)}{h^{2n+1}},$$

och för $\Delta < 0$ finna vi

$$(96)\qquad \sin 2\pi x = \frac{(-1)^{n}(2\pi)^{2n}}{2|\sqrt{-\Delta}|}\sum_{h=1}^{h=\infty}\left(\frac{\Delta}{h}\right)\frac{\varepsilon_h T(hx, 2n, \Delta)}{h^{2n}}$$

och

$$(97)\qquad \cos 2\pi x = \frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n+1}}{2|\sqrt{-\Delta}|}\sum_{h=1}^{h=\infty}\left(\frac{\Delta}{h}\right)\frac{\varepsilon_h T(hx, 2n+1, \Delta)}{h^{2n+1}}.$$

Dessa fyra formler gälla för alla reela värden på x och för alla hela positiva värden på n.

§ 5.

I § 2 är visadt, att funktionerna

$$T(x, m), \quad T(x, m, \Delta)$$

äro periodiska funktioner af x, hvilket helt tal m än är, blott m är större än eller lika med 2. Det är af intresse att undersöka, huru dessa funktioner förhålla sig, då talet m växer mot oändligheten, och en sådan undersökning skall visa, att dessa funktioner, multiplicerade med lämpliga faktorer, då tendera att sammanfalla med $\cos 2\pi x$ eller $\sin 2\pi x$.

Om vi nämligen sätta eqv. (88) under formen

$$(98)\qquad \cos 2\pi x = \frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n}}{2}T(x, 2n) + \frac{(-1)^{n-1}}{2}\sum_{h=2}^{h=\infty}\frac{\varepsilon_h(2\pi)^{2n}T(hx, 2n)}{h^{2n}}$$

samt iakttaga, att qvantiteten $(2\pi)^{2n}T(hx, 2n)$ enligt teorem IV alltid är innesluten mellan bestämda ändliga gränser, så erhålles af eqv. (98) för $n = \infty$

(99) $$\cos 2\pi x = \lim_{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n}}{2} T(x, 2n).$$

På samma sätt erhålles af eqv. (89) med användning af teorem IV

(100) $$\sin 2\pi x = \lim_{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n+1}}{2} T(x, 2n+1).$$ [1])

Om vi sätta eqv. (94) under formen

(101) $$\cos 2\pi x = \frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n}}{2\left|\sqrt{\varDelta}\right|} T(x, 2n, \varDelta) + \frac{(-1)^{n-1}}{2\left|\sqrt{\varDelta}\right|} \sum_{h=2}^{h=\infty} \left(\frac{\varDelta}{h}\right) \frac{\varepsilon_h (2\pi)^{2n} T(hx, 2n, \varDelta)}{h^{2n}}$$

samt iakttaga, att qvantiteten $(2\pi)^{2n} T(hx, 2n, \varDelta)$ enligt teorem V alltid är innesluten mellan bestämda ändliga gränser, så erhålla vi af eqv. (101), om vi låta n växa mot oändligheten,

(102) $$\cos 2\pi x = \lim_{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n}}{2\left|\sqrt{\varDelta}\right|} T(x, 2n, \varDelta) \text{ för } \varDelta > 0.$$

På samma sätt erhålla vi af eqv. (95), (96), (97) med användning af teorem V formlerna

(103) $$\sin 2\pi x = \lim_{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n+1}}{2\left|\sqrt{\varDelta}\right|} T(x, 2n+1, \varDelta) \text{ för } \varDelta > 0,$$

(104) $$\sin 2\pi x = \lim_{n=\infty} \frac{(-1)^{n}(2\pi)^{2n}}{2\left|\sqrt{-\varDelta}\right|} T(x, 2n, \varDelta) \text{ för } \varDelta < 0,$$

(105) $$\cos 2\pi x = \lim_{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n+1}}{2\left|\sqrt{-\varDelta}\right|} T(x, 2n+1, \varDelta) \text{ för } \varDelta < 0.$$

Vi anmärka här, att de sex nu bevisade formlerna (99), (100), (102), (103), (104), (105) äfven kunna deduceras på det sättet, att man i eqv. (52), (53), (70), (71), (72), (73) låter n växa mot oändligheten.

---

[1]) Jämför: P. APPELL, Sur les valeurs approchées des polynômes de BERNOULLI (Nouvelles annales de mathématiques, année 1887).

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts. från sid. 474.)

London. *Linnean society.*
Journal. Zoology. Vol. 20: N:o 124—125; 23: 145—147. 1890—91. 8:o.
List of the Linnean society. 1890/91. 8:o.
— *Royal Society.*
Philosophical transactions. Vol. 181 (1890): A—B. 4:o.
Proceedings. Vol. 48: N:o 292—295; 49: 296—301. 1890—91. 8:o.
List. 1890 1/12. 4:o.
— *Zoological society.*
Transactions. Vol. 13: P. 1—2. 1891. 4:o.
Proceedings of the scientific meetings. Year 1890: P. 4. 8:o.
» » » general » for scientific business. Year 1891: P. 1. 8:o.
Luxembourg. *Société botanique du grand-duché de Luxembourg.*
Recueil des mémoires & des travaux. N:o 12 (1887—1890). 8:o.
Madras. *Government observatory.*
Results of observations of the fixed stars made with the meridian circle in the years 1868—1870. 1890. 4:o.
Melbourne. *Styrelsen öfver Victoria.*
v. Müller, F., Iconography of Australian salsolaceous plants. Dec. 1—6. 1889—90. 4:o.
Montreal. *Royal society of Canada.*
Proceedings and transactions. Vol. 8 (1890). 4:o.
Moskwa. *Société Imp. des naturalistes.*
Bulletin. (2) T. 4 (1890): N:o 3—4; 5 (1891): 1. 8:o.
New Haven, U. S. *Observatory of the Yale university.*
Report. Year 1890/91. 8:o.
New York. *American museum of natural history.*
Annual report. Year 1890/91. 8:o.
Palermo. *R. Accademia di scienze, lettere e belle arti.*
Bullettino. Anno 3 (1886): N:o 6; 4 (1887): 1—6; 7 (1890): 1—6; 8 (1891): 1—3. 4:o.
Philadelphia. *Academy of natural sciences.*
Proceedings. Year 1890: P. 1; 1891: P. 1. 8:o.
— *American philosophical society.*
Proceedings. Vol. 29: N:o 135. 1891. 8:o.
Pisa. *Società Toscana di scienze naturali.*
Memorie. Vol. 11. 1891. st. 8:o.
Processi verbali. Vol. 7 (1889/91): s. 1—170. st. 8:o.
— *Scuola normale superiore.*
Annali. Vol. 13. 1890. 8:o.
Roma. *R. Comitato geologico d'Italia.*
Bollettino. Vol. 21 (1890). 8:o.
S:t Louis, U. S. *Missouri Botanical garden.*
Annual report. 2 (1890). 8:o.

S:t Petersburg. *Comité géologique.*
Mémoires. T. 4: N:o 2; 5: 1, 5; 8: 2; 10: 1. 1890. 4:o.
Romanowski, G. D., Materiali . . . — Materialier till Turkestans geologi. H. 3. 1890. 4:o.
Bulletins. T. 9 (1890): N:o 7–8. 8:o.

Stuttgart. *Verein für vaterländische Naturkunde in Württemberg.*
Jahreshefte. Jahrg. 47 (1890). 8:o.

Sunderland. *West Hendon house observatory.*
Publications. N:o 1. Backhouse, T. W., The structure of the sidereal universe. 1891. 4:o.

Sydney. *Australian museum.*
Records. Vol. 1: N:o 6–7. 1891. 8:o.
Ramsay, E. P., Catalogue of Australian birds. P. 3. 1891. 8:o.
— *Linnean society of N. South Wales.*
Proceedings. (2) Vol. 5 (1890): P. 1–4. 8:o.
— *Royal Society of N. South Wales.*
Journal and proceedings. Vol. 23 (1889): P. 2; 24 (1890): 1. 8:o.
— *Department of mines.*
Geological survey of N. S. Wales. Palæontology. N:o 5. 1891. 4:o.
Records. Vol. 2: P. 3. 1891. 4:o.

Tōkyō. *College of science of the Imp. university of Japan.*
Journal. Vol. 4: P. 1. 1891. 4:o.

Utrecht. *Provinciaal Utrechtsch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen.*
Very, F. W., Prize essay on the distribution of the moon's heat and its variation with the phase. The Hague 1891. st. 8:o.

Washington, U. S. *Naval observatory.*
Observations. Year 1885. 4:o.
» » » Appendix 3. 1891. 4:o.
Total eclipse of the sun 1889 $^1/_1$. — A report of the observations made by the Washington university eclipse party at Norman, California. Cambridge 1891. 4:o.
— *Smithsonian institution.*
Annual report. 1888 July; 1889 July. 8:o.

Wellington. *Colonial museum.*
Annual report. 25 (1889/90). 8:o.

Wien. *K. K. Geologische Reichsanstalt.*
Abhandlungen. Bd. 15: H. 3. 1891. 4:o.
Jahrbuch. Bd. 40 (1890): H. 3–4. st. 8:o.
— *Zoologisch-botanische Gesellschaft.*
Verhandlungen. Bd. 41 (1891): Qu. 1–2. 8:o.

Würzburg. *Physikalisch-medicinische Gesellschaft.*
Verhandlungen. Neue (2) Folge Bd. 24: N:o 7; 25: 1–5. 1891. 8:o.
Sitzungsberichte. Jahrg. 1891: N:o 1—5. 8:o.

Zürich. *Naturforschende Gesellschaft.*
Vierteljahrsschrift. Jahrg. 35 (1890): H. 3–4; 36 (1891): 1. 8:o.

Hr Grefve T. Károlyi i Budapest.

Codex diplomaticus comitum Károlyi de Nagy-károlyi. K. 1—4. Budapest 1882—1887. 8:o.

Utgifvaren.

Bohuslänsk fiskeritidskrift, utg. af A. W. Ljungman. Årg. 7 (1890). Göteb. 8:o.

Författarne.

Cleve, P. T., The Diatoms of Finland. Hfors 1891. 8:o.

Lindvall, C. A., Glacialperioden. Sthm 1891. 8:o.

— The glacial period. Sthm 1891. 8:o.

Ljungman, A. W., Smärre uppsatser rörande sillen och sillfisket, m. m. Å nytt utgifne. Göteb. 1891. 8:o.

Thorell, T., Opilioni nuovi o poco conosciuti del arcipelago Malese. Genova 1891. 8:o.

Breuer, A., Übersichtliche Darstellung der mathematischen Theorien über die Dispersion des Lichtes. Th. 2. Erfurt 1891. 8:o.

Fresenius, C. R., Chemische Untersuchung der Trink- oder Bergquelle des K. Bades Bertrich. Wiesb. 1891. 8:o.

— Analyse des Julianenbrunnens und des Georgenbrunnens in fürstl. Bade Eilsen. Wiesb. 1891. 8:o.

Gilbert, J. H., Occasional lectures and other discourses on agricultural chemistry. London 1890. 8:o.

— History and present position of the Rothamsted investigations. London 1891. 8:o.

Hjelt, E., Minnestal öfver Jacob Chydenius. Hfors 1891. 4:o.

— Undersökningar öfver reaktionshastigheten vid laktonbildningsprocessen. Hfors 1891. 4:o.

Holm, Th., A study of some anatomical characters of N. American Gramineæ. Crawfordsville. 1891. 8:o.

Lawes, J. B. & Gilbert, J. H., The Rothamsted memoirs on agricultural chemistry and physiology. Vol. 1—6. London 1886—90. 8:o.

— — » » » Vol. 1—2. Lond. 1890, 1886. 4:o.

— — Memoranda of the origin, plan, and results of field and other experiments, conducted on the farm and in the laboratory . . . at Rothamsted . . . 1890 June, 1891 June. 4:o.

Norrie, G., Kataraktdepressionen i Skandinavien i sidste Halfdel af 18:e Aarhundrede. Kjöbenh. 1891. 8:o.

Pierce, G. W., The life-romance of an algebraist. Boston 1891. 8:o.

Pihl, O. A. L., The stellar cluster χ Persei. Kra. 1891. 4:o.

Stockholm, 1891. Kongl. Boktryckeriet.

# ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 48. 1891. № 8.

Onsdagen den 14 Oktober.

INNEHÅLL:

Tillkännagafs att Akademiens utländske ledamot, Professorn vid Conservatoire des arts et métiers i Paris ALEXANDRE EDMOND BECQUEREL med döden afgått.

Filos. Doktorn G. ADLERZ hade inlemnat berättelse om den resa, som han under sistlidne sommar med understöd af Akademien utfört till Bohuslän för fortsatta undersökningar öfver Pantopoderna.

Till Berzeliansk stipendiat utsåg Akademien Docenten i Kemi vid Upsala universitet Dr H. G. SÖDERBAUM.

Hr PETTERSSON, som haft Akademiens uppdrag att fullborda bearbetningen af de hydrografiska undersökningar, som framlidne Professor F. L. EKMAN under år 1877 utfört inom de Sverige omgifvande hafven, och att afsluta den af Prof. EKMAN påbörjade afhandling om dessa undersökningar, meddelade, att

hans uppdrag nu vore uppfylldt, samt redogjorde för innehållet af den sålunda afslutade afhandlingen.

Hr HASSELBERG dels meddelade resultaten af sina undersökningar öfver lerjordens emissionsspektrum, dels öfverlemnade och refererade en uppsats af Filos. Kandidaten O. NEOVIUS om skiljandet af syrets och kväfvets linier i luftens emissionsspektrum. (Se Bihang till K. Vet.-Akad. Handl.)

Hr Frih. NORDENSKIÖLD redogjorde för amerikanske kemisten W. H. HILDEBRANDS upptäckt af kväfve i uraninit, hvarigenom dettas förekomst i äldre kristalliniska bergarter nu till fullo konstaterats.

Hr RETZIUS förevisade lefvande nejonögon, Petromyzon fluviatilis, såväl i flere larvstadier som i fullvuxet tillstånd, hvilka genom bruksdisponenten P. G. TAMMS biträde kommit honom tillhanda från Elfkarleön.

Hr NILSSON meddelade på författarens vägnar följande uppsatser: 1:o) »Till frågan om grundämnenas föreningsvärde», och 2:o) »Den 7-atomiga jodens dubbelsyror», båda af Prof. C. W. BLOMSTRAND (se Bihang etc.).

Hr CLEVE meddelade följande uppsatser öfver undersökningar vid Upsala kemiska laboratorium: 1:o) »Om dicyanfenylhydrazins kondensationsprodukter med alifatiska aldehyder», af Docenten J. A. BLADIN*; 2:o) »Om inverkan af acetättiketer på dicyanfenylhydrazin», af densamme*; 3:o) »Om 1 : 6 : 4 Diklornaftalinsulfonsyra»,* 4:o) »Om 1 : 2 Amidonaftalinsulfonsyra och dess derivat»*, de båda sistnämnda af Hr CLEVE sjelf. I sammanhang härmed lemnade Hr CLEVE en öfversigt af de arbeten, som under de senaste 17 åren blifvit på Upsala kemiska laboratorium utförda.

Sekreteraren öfverlemnade för införande i Akademiens skrifter följande inkomna uppsatser: 1:o) om ω-isonitrosoacetofenons (benzoylformoxims) konfiguration», af Docenten H. G. SÖDERBAUM*; 2:o) »Sur le logarithme intégral et la fonction $f(x)$ de RIEMANN», af Fil. D:r E. PHRAGMÉN*; 3:o) »Öfversigt öfver Sveriges Cephalopoder», af Docenten E. LÖNNBERG (se Bihang

etc.); 4:o) »Ichtyologische Notizen», af densamme (se Bihang etc.); 5:o) »Beiträge zur Kenntniss Kalifornischer Collembola», af Fil. Kandidaten H. SCHÖTT (se Bihang etc.); 6:o) »Chlorophyllophyceer från Norska Finnmarken», af Filos. Kandidaten O. BORGE (se Bihang etc.).

Följande skänker anmäldes.

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

H. MAJ:T KONUNGEN.

MARTIUS, C. F., EICHLER, A. W., URBAN, I., Flora Brasiliensis. Fasc. 109. Lipsiæ 1891. F.

Stockholm. *Svenska akademien.*

Handlingar ifrån 1886. D. 5(1890). 8:o.

Göteborg. *K. Vetenskaps och vitterhets samhället.*

Handlingar. Ny tidsföljd. H. 20—25. 1885—91. 8:o.

Upsala. *Botaniska sektionen af naturvetenskapliga studentsällskapet.*

Sitzungsberichte. Jahrg. 4(1889). Cassel 1891. 8:o.

Kristiania. *K. Norska universitetet.*

SCHÜBELER, F. C., Viridarium Norvegicum. Bd. 1: H. 2; 2: 1—2; 3. Kra 1886—89. 4:o.

— » » Tillæg. 1. Kra 1891. 8:o.

— *Observatorium.*

Magnetische Beobachtungen und stündliche Temperaturbeobachtungen 1882 Aug.—1883 Aug. . . . Kra 1891. 4:o.

Supplement zu den Zonenbeobachtungen . . . Kra 1891. 4:o.

Belgrad. *Académie R. de Serbie.*

Spomenik. 7—9. 1890—91. 4:o.

Glas. (Bulletin). 23—29. 1890—91. 8:o.

Berlin. *K. Geodätisches Institut.*

Jahresbericht 1890 April—1891 April. 8:o.

Braunschweig. *Verein für Naturwissenschaft.*

Jahresbericht 1887/88—1888/89. 8:o.

Breslau. *Schlesische Gesellschaft für vaterländische Kultur.*

Jahresbericht. 68(1890) & Ergänzungsheft. 8:o.

Bruxelles. *Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*

Mémoires couronnés. T. 50—51. 1890, 1889. 4:o.

» » et autres mémoires. Collection in 8:o T. 43—45. 1889—91. 8:o.

Bulletins. (3) T. 17—18(1889)—21(1891). 8:o.

Annuaire. Année 56(1890)—57(1891). 16:o.

Catalogue des livres de la bibliothèque. P. 2: F. 3. 1890. 8:o.

Biographie nationale. T. 10: F. 3; 11: 1—2. 1889—91. 8:o.

Calcutta. *R. Asiatic society of Bengal.*
Journal. P. 1. Vol. 58 (1889): N:o 3; 59 (1890): 3—4; 60 (1891): 1. P. 2. Vol. 58 (1889): N:o 5; 59 (1890): 2—5 & Suppl. 2; 60 (1891): 1. 8:o.
Proceedings. Year 1890: N:o 4—10; 1891: 1—6. 8:o.
BEVERIDGE, H., Annual adress 1891 4/2. 8:o.
Chapel Hill. *Elisha Mitchell scientific society.*
Journal. Year 7 (1890): P. 2. 8:o.
Dorpat. *K. Universitäts-Sternwarte.*
Beobachtungen. Bd. 18. 1891. 4:o.
Dublin. *R. Dublin society.*
Scientific transactions. (2) Vol. 4: 6—8. 1890—91. 4:o.
» proceedings. (2) Vol. 6: P. 10; 7: 1—2. 1890—91. 8:o.
Edinburgh. *Royal Society.*
Transactions. Vol. 34; 36: P. 1. 1890—91. 4:o.
Proceedings. Vol. 17 (1889/90). 8:o.
Frankfurt a/M. *Senckenbergische naturforschende Gesellschaft.*
Abhandlungen. Bd. 16: H. 3—4. 1891. 4:o.
Bericht. 1891. 8:o.
Greifswald. *K. Universität.*
Akademiska skrifter. År 1890/91. 101 häften 4:o & 8:o.
Hamburg. *Verein für wissenschaftliche Unterhaltung.*
Verhandlungen. Bd. 7 (1886/90). 8:o.
Heidelberg. *Grossherzogl. Badische Universität.*
Akademiska skrifter År 1890/91. 69 häften 4:o & 8:o.
Helsingfors. *K. Universitetet.*
Akademiska skrifter. År 1890/91. 23 häften 4:o & 8:o.
— *Finlands geologiska undersökning.*
Kartblad. N:o 16—17, med Beskrifning. 1890. Tvfol. & 8:o.
Liége. *Société géologique de Belgique.*
Annales. T. 16: L. 2: 17: 4; 18: 1. 1890—91. 8:o.
Liverpool. *Biological society.*
Proceedings and transactions. Vol. 5 (1890/91). 8:o.
London. *British museum (Natural history).*
Catalogue of Birds. Vol. 19. 1891. 8:o.
LYDEKKER, R., Catalogue of fossil Birds. 1891. 8:o.
NEWTON, R. B., Systematic list of the Fr. E. Edwards collection of British oligocene and eocene Mollusca. 1891. 8:o.
Illustrations of typical specimens of Lepidoptera heterocera. P. 8. 1891. 4:o.
Madrid. *Comisión del mapa geológico de España.*
Memorias: PALACIO, P., Provincia de Soria. 1890. st. 8:o.
Manchester. *Literary and philosophical society.*
Memoirs and proceedings. Vol. 4: N:o 4—5. 1890—91. 8:o.
Mexico. *Sociedad científica »Antonio Alzate».*
Memorias y revista. T. 4 (1890): N:o 3—6.

(Forts. å sid. 617).

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1891. N:o 8.
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska Laboratorium.

197. Om dicyanfenylhydrazins kondensationsprodukter med alifatiska aldehyder.

Af J. A. Bladin.

[Meddeladt den 14 Oktober 1891 genom P. T. Cleve.]

Jag har visat,[1]) att benzaldehyd i alkohollösning reagerar på dicyanfenylhydrazin så, att ett benzylidenderivat under vattenafspaltning bildas:

$$\begin{array}{l} C_6H_5-N-NH_2 \\ \qquad\;\; | \\ \quad NC-C=NH \end{array} + OHC\,.\,C_6H_5 =$$

$$= \begin{array}{l} C_6H_5-N-N=CH\,.\,C_6H_5 \\ \qquad\;\; | \\ \quad NC-C=NH \end{array} + H_2O\,,$$

och att denna kondensationsprodukt ytterst lätt genom inverkan af lindriga oxidationsmedel kan öfverföras i difenylcyantriazol:

$$\begin{array}{l} C_6H_5-N-N \\ \qquad\;\;|\quad\; \| \\ \;NC-C\quad CH\,.\,C_6H_5 \\ \qquad\;\;\diagdown NH \end{array} + O = \begin{array}{l} C_6H_5-N-N \\ \qquad\;\;|\quad\; \| \\ \;NC-C\quad C-C_6H_5 \\ \qquad\;\;\diagdown\diagup \\ \qquad\quad N \end{array} + H_2O\,.$$

På min uppmaning har sedan Holmquist[2]) låtit åtskilliga andra aromatiska aldehyder, såsom kanelaldehyd, orto- och paraoxibenzaldehyd, inverka på dicyanfenylhydrazin och funnit, att dessa reagera på samma sätt som benzaldehyd, och att de först

---

[1]) Öfversigt af K. Vet.-Akad:s Förh. 1889, N:o 3, sid. 139.

[2]) Öfversigt af K. Vet.-Akad:s Förh. 1891, N:o 6, sid. 429.

under vattenafspaltning bildade kondensationsprodukterna genom inverkan af lindriga oxidationsmedel lika lätt som benzylidendicyanfenylhydrazin kunna öfverföras i triazolderivat. I aromatiska aldehyders inverkan på dicyanfenylhydrazin eger man således en lätt utförbar metod att med godt utbyte erhålla triazolderivat, där utom fenyl finnes en annan aromatisk radikal substituerande väte i triazolkärnan.

Jag har nu utsträckt denna reaktion äfven till den alifatiska serien och funnit, att hithörande aldehyder reagera på dicyanfenylhydrazin på samma sätt som de aromatiska, och att de bildade kondensationsprodukterna lätt genom oxidationsmedels inverkan kunna öfverföras i triazolderivat. Reaktionen att genom aldehyders inverkan på dicyanfenylhydrazin erhålla triazolderivat tycks därför vara fullt generel.

Man utför försöken på följande sätt:

Dicyanfenylhydrazin löses i alkohol (c. 1 del på 3 à 4 delar alkohol) och lösningen försättes med beräknad mängd (eller något mera) aldehyd, hvarpå blandningen uppkokas och försättes med ett par droppar saltsyra.[1]) Fullständig reaktion eger därvid vanligen genast rum. Man kan pröfva lösningen på oangripen dicyanfenylhydrazin genom att hälla några droppar däraf på ett urglas, tillsätta litet mera alkohol och därpå några droppar kalilut; finnes ännu oangripen dicyanfenylhydrazin kvar, färgas lösningen, i synnerhet om man blåser på den samma, vackert violett. I de flesta fall behöfver man ej isolera de bildade kondensationsprodukterna, utan man försätter lösningen efter reaktionens slut med alkoholisk järnkloridlösning, bäst i något öfverskott, och kokar en stund. Alkoholen afdunstas därpå och ersättes med vatten, hvarvid triazolderivatet afskiljer sig och kan renas genom omkristallisering ur lämpliga lösningsmedel eller ock genom direkt kokning med alkoholiskt kali öfverföras i motsvarande karbonsyra. Utbytet af triazolförening är godt.

---

[1]) I många fall eger inverkan rum utan tillsats af saltsyra, men närvaron af samma påskyndar alltid reaktionen.

Inverkan af acetaldehyd och paraldehyd på dicyanfenylhydrazin.

Etylidendicyanfenylhydrazin.

$$\begin{array}{l} C_6H_5—N—N = CH \,.\, CH_3 \\ \quad\quad\;\; | \\ \quad NC—C = NH \end{array}$$

Acetaldehyd reagerar i alkohollösning lätt på dicyanfenylhydrazin enligt ekvationen:

$$\begin{array}{l} C_6H_5—N—NH_2 \\ \quad\quad\;\; | \\ NC—C=NH \end{array} + OHC \,.\, CH_3 = \begin{array}{l} C_6H_5—N—N=CH \,.\, CH_3 \\ \quad\quad\;\; | \\ NC—C=NH \end{array} + H_2O.$$

Man behöfver blott till en varm alkohollösning af dicyanfenylhydrazin tillsätta något mer än beräknad mängd acetaldehyd och en droppe saltsyra.[1]) Fullständig reaktion eger därvid genast rum, hvilket kan ses däraf att några droppar af lösningen icke ger med kalilut någon violett färg. Lösningen koncentreras därpå och utspädes med vatten, då en mer eller mindre färgad olja afskiljer sig, hvilken emellertid snart stelnar kristalliniskt. I stället för acetaldehyd kan paraldehyd användas; reaktionen försiggår med samma lätthet som vid användning af acetaldehyd. Äfven vid direkt kokning af dicyanfenylhydrazin med öfverskott af paraldehyd eger reaktion rum; efter lösningens utspädning med vatten afskiljer sig en brunfärgad olja, som lätt stelnar i synnerhet vid omröring med en glasstaf. Föreningen renas genom omkristalliseringar ur gasolja, hvarvid de bruna produkterna till största delen stanna olösta.

Analyser:

1. 0,1691 gr. gaf vid förbränning med blykromat i slutet rör 0,4021 gr. CO_2 (motsv. 0,10966 gr. C) och 0,0900 gr. H_2O (motsv. 0,01000 gr. H).

---

[1]) Acetaldehyd reagerar, om ock kanske något långsammare, på dicyanfenylhydrazin äfven utan tillsats af saltsyra.

2. 0,1655 gr. gaf vid förbränning med kopparoxid 42,4 ccm. N-gas, mätt öfver kalilut vid 765 mm. bar. tr. och 16,8 ° C.

	Beräknadt:		Funnet: 1.	2.
C_{10}	120	64,5	64,9	—
H_{10}	10	5,4	5,9	—
N_4	56	30,1	—	30,5
	186	100,0		

Etylidendicyanfenylhydrazin är mycket lättlöslig i alkohol, eter, benzol, aceton och kloroform, svårlöslig i gasolja, olöslig i vatten. Ur gasolja kristalliserar den samma i gula blad af smältpunkt 95,5—96,5 ° C.

Fenylmetylcyantriazol ur etylidendicyanfenylhydrazin.

Liksom benzylidendicyanfenylhydrazin [1]) och cinnamylendicyanfenylhydrazin [2]) kan etylidendicyanfenylhydrazin genom inverkan af oxidationsmedel (silfvernitrat, järnklorid o. d.) lätt öfverföras i triazolderivat. Försättes nämligen en alkohollösning af föreningen vid vanlig temperatur med silfvernitratlösning, utfaller genast reduceradt silfver. Affiltreras detta, och filtratet försättes med vatten, utfaller fenylmetylcyantriazol och kan renas genom omkristallisering ur litet alkohol. Ett på detta sätt erhållet preparat bildade färglösa prismer af smältpunkt 108—109 ° C. och gaf vid analys värden som stämma för fenylmetylcyantriazol.

0,1938 gr. gaf vid förbränning med blykromat i slutet rör 0,4661 gr. CO_2 (motsv. 0,12712 gr. C) och 0,0840 gr. H_2O (motsv. 0,00933 gr. H)

	Beräknadt:		Funnet:
C_{10}	120	65,2	65,6
H_8	8	4,4	4,8
N_4	56	30,4	—
	184	100,0	

[1]) BLADIN: Öfversigt af K. Vet.-Akad:s Förh. 1889, N:o 3, sid. 145.

[2]) HOLMQUIST: Öfversigt af K. Vet.-Akad:s Förh. 1891, N:o 6, sid. 431.

Liksom silfvernitrat verkar järnklorid. En alkohollösning af etylidendicyanfenylhydrazin uppvärmdes en stund med en koncentrerad alkoholisk järnkloridlösning; vid tillsats af vatten utföll en olja, som snart stelnade kristalliniskt. Vid omkristallisering ur litet alkohol erhöllos små prismer af smältpunkt 108,5—109° C. Således hade äfven här fenylmetylcyantriazol bildats.

Inverkan af œnantol på dicyanfenylhydrazin.

Då nu acetaldehyd med sådan lätthet reagerar på dicyanfenylhydrazin under bildning af etylidendicyanfenylhydrazin, lider det ej något tvifvel, att de närstående homologa aldehyderna, propionaldehyd, butyraldehyd, valeraldehyd etc., med nämda förening ger analoga kondensationsprodukter, och att dessa sedan kunna oxideras till triazolderivat. För att emellertid visa, att reaktionen eger rum äfven med alifatiska aldehyder med hög kolhalt, har jag låtit œnantol, $CH_3(CH_2)_5 . CHO$, inverka på dicyanfenylhydrazin och därvid funnit min förmodan bekräftad, att den samma reagerar på samma sätt, och att den bildade kondensationsprodukten genom inverkan af oxidationsmedel ger ett triazolderivat, nämligen fenylhexylcyantriazol.

En varm alkohollösning af dicyanfenylhydrazin försattes med beräknad mängd œnantol (1 mol. af hvardera) och ett par droppar saltsyra. Reaktion egde därvid genast rum. Utan tillsats af saltsyra synas de bägge föreningarna ej inverka på hvarandra. Efter alkoholens afdunstning återstod en brunfärgad olja, som ej stelnade. Denna utgöres helt visst af föreningen,

$$\begin{array}{l} C_6H_5\text{—}N\text{—}N = CH\ .\ (CH_2)_5\ .\ CH_3 \\ \qquad\quad | \\ \quad NC\text{—}C = NH \end{array},$$

men som den samma ej kunde bringas i fast form, kunde den ej renas, utan öfverfördes sådan den var i fenylhexylcyantriazol. För detta ändamål löstes oljan i alkohol, och lösningen försattes med något mera än beräknad mängd järnklorid, äfven denna

löst i alkohol. Blandningen kokades i en öppen skål, och den afdunstade alkoholen ersattes med vatten. En svartbrun olja bildades därvid på vätskans yta, hvilken utdrogs med eter, efter hvilkens afdunstning det återstod en mörk olja, som ej ville stelna. Denna utgöres af *fenylhexylcyantriazol*, som bildats enligt ekvationen:

$$\begin{array}{l} C_6H_5-N-N \\ \quad\quad\;\; | \\ NC-C\quad CH-(CH_2)_5 \,.\, CH_3 + O = \\ \quad\quad\;\; \diagdown NH \end{array}$$

$$= \begin{array}{l} \quad C_6H_5-N-N \\ \quad\quad\quad\quad\;\, | \quad\;\; \| \\ NC-C \quad C-(CH_2)_5 \,.\, CH_3 + H_2O \,. \\ \quad\quad\quad\; \diagdown \diagup \\ \quad\quad\quad\;\; N \end{array}$$

Detta framgår tydligt af föreningens förhållande till alkoholiskt kali och till svafvelväte.

Fenylhexyltriazolkarbonsyra.

$$\begin{array}{l} \quad\quad C_6H_5-N-N \\ \quad\quad\quad\quad\quad\;\, | \quad\;\; \| \\ HOOC-C \quad C-(CH_2)_5 \,.\, CH_3 \,. \\ \quad\quad\quad\quad\; \diagdown \diagup \\ \quad\quad\quad\quad\;\; N \end{array}$$

Den på ofvan beskrifna sätt erhållna oljan kokades med alkoholiskt kali i en öppen skål, så länge ammoniak bortgick. Allt efter som alkoholen afdunstade, tillsattes vatten. Sedan all alkohol afdunstat, och ammoniakutvecklingen upphört, fick lösningen kallna och försattes därpå försigtigt med saltsyra. Först afskilde sig därvid en brun, seg tjära, som affiltrerades, och det numera nästan färglösa filtratet försattes med saltsyra i ringa öfverskott, hvarvid en blott svagt färgad olja utföll, som vid omröring med en glasstaf stelnade. Afpassar man vid neutraliseringen noga den punkt, då de färgade ämnena afskilt sig, utan att allt för mycket af syran fallit ut, blir utbytet af karbonsyra mycket godt. Syran renades genom tillsats af gasolja till en benzollösning af den samma.

Analyser på vid 100° C. torkad substans:

1. 0,2741 gr. gaf vid förbränning med blykromat i slutet rör 0,6648 gr. CO_2 (motsv. 0,18131 gr. C) och 0,1820 gr. H_2O (motsv. 0,02022 gr. H).

2. 0,2036 gr. gaf vid förbränning med kopparoxid 27,2 ccm. N-gas, mätt öfver kalilut vid 751,5 mm. bar. tr. och 15,6° C.

	Beräknadt:		Funnet: 1.	2.
C_{15}	180	65,9	66,1	—
H_{19}	19	7,0	7,4	—
N_3	42	15,4	—	15,7
O_2	32	11,7	—	—
	273	100,0		

Föreningen är lättlöslig i alkohol, benzol, aceton, svårlöslig i gasolja och vatten. Ur vatten kristalliserar den samma i silfverglänsande blad; erhållen genom fällning medels gasolja ur benzollösning, bildar den samma färglösa bladiga kristaller. Den smälter under svag gasutveckling vid 126° C. till en färglös olja; vid ytterligare upphettning blir gasutvecklingen starkare.

Fenylhexyltriazolkarbonsyrans *eterarter* äro oljor. De kunna lätt framställas ur vid 100° C. torkadt silfversalt och alkyljodider genom upphettning; vid vanlig temperatur eger ingen inverkan rum.

Fenylhexyltriazolkarbonsyrans salter.

Kalium- och *ammoniumsalterna* äro lättlösliga.

Silfversaltet bildar en hvit, nästan olöslig fällning.

Kopparsaltet $(C_6H_5 . C_2N_3(C_6H_{13}) . CO_2)_2Cu + H_2O$. Till en kokhet, fullt neutral lösning af ammoniumsaltet sattes en äfvenledes varm lösning af kopparsulfat. Genast utföll en ljusblå fällning, som under mikroskop visade sig vara kristallinisk. Den tvättades noga med vatten. Saltet håller 1 mol. kristallvatten.

Lufttorkadt salt analyserades:

1. 0,3242 gr. aftog ej i vigt i exsickator öfver svafvelsyra, men förlorade vid 180° C. 0,0097 gr. och gaf vid förbränning 0,0410 gr. CuO (motsv. 0,03273 gr. Cu).

2. 0,2310 gr. förlorade vid 180° C. 0,0066 gr. och gaf vid förbränning 0,0289 gr. CuO (motsv. 0,02307 gr. Cu).

3. 0,2417 gr. gaf vid förbränning 0,0307 gr. CuO (motsv. 0,02451 gr. Cu).

	Beräknadt på $(C_6H_5 . C_2N_3(C_6H_{13}) . CO_2)_2Cu + H_2O$:	Funnet: 1.	2.	3.
Cu	10,1	10,1	10,0	10,1
H_2O	2,9	3,0	2,9	—

Fenylhexyltriazolkarbonsyrans klorhydrat.

$$C_6H_5 . C_2N_3(C_6H_{13}) . CO_2H . HCl.$$

Liksom homologa syror ger äfven fenylhexyltriazolkarbonsyran ett kristalliserande klorhydrat. Syran löses lätt i vanlig saltsyra vid uppvärmning. Vid lösningens afsvalning utkristalliserar saltet i färglösa, hopfiltade nålar. För analys utpressades saltet och torkades under en natt i exsickator öfver fast kali.

0,2353 gr. gaf efter förbränning med kalk 0,1073 gr. AgCl (motsv. 0,02724 gr. HCl).

	Beräknadt på $C_6H_5 . C_2N_3(C_6H_{13}) . CO_2H . HCl$:	Funnet:
HCl	11,8	11,6.

Saltet sönderdelas af vatten i sina komponenter, likaså vid längre tids stående i exsickator öfver fast kali. Ett prof, som under c. en veckas tid stått i exsickator öfver kali, gaf efter förbränning med kalk blott en svag opaleskens med silfvernitrat.

Fenylhexyltriazolkarbonsyrans amid.

```
         C6H5—N—N
              |  ||
H2NOC---C   C—(CH2)5 . CH3 .
              \/
              N
```

Etyletern, löst i alkohol, försattes med koncentrerad kaustik ammoniak, och blandningen fick stå under c. 18 timmar i slutet kärl vid vanlig temperatur. Efter alkoholens afdunstning kvarblef en svagt gulfärgad olja, som lätt stelnade kristalliniskt. Den omkristalliserades ur benzol. Kristalliserad ur detta lösningsmedel, håller föreningen kristallbenzol (antagligen $^1/_2$ mol.), som den förlorar först vid smältning.

Analys på smält substans:

0,2269 gr. gaf vid förbränning med kopparoxid 39,3 ccm. N-gas, mätt öfver kalilut vid 767 mm. bar. tr. och 17,0 ° C.

	Beräknadt:		Funnet:
C_{15}	180	66,2	—
H_{20}	20	7,3	—
N_4	56	20,6	20,7
O	16	5,9	—
	272	100,0	

Föreningen kristalliserar ur benzol, hvari den samma är lättlöslig, i rent hvita, glänsande blad; äfven lättlöslig i alkohol. Ur alkohollösning fälles föreningen af vatten i form af små oljedroppar, hvilka lätt öfvergå i färglösa nålar. Kristalliserad ur benzol, smälter föreningen efter föregående smältning och stelning vid 82—82,5 ° C. Benzolhaltig smälter den samma oskarpt vid lägre temperatur.

Fenylhexyltriazolkarbonsyrans tiamid.

$$\begin{array}{l} \quad\quad C_6H_5—N—N \\ \quad\quad\quad\quad\;\; | \quad\;\; \| \\ H_2NSC—C \quad C—(CH_2)_5 . CH_3 . \\ \quad\quad\quad\quad\;\; \diagdown \diagup \\ \quad\quad\quad\quad\quad N \end{array}$$

I en varm med stark ammoniak försatt alkohollösning af ej renad fenylhexylcyantriazol inleddes svafvelväte, tills lösningen luktade starkt däraf, hvarpå den samma koncentrerades. Vid afsvalning afskilde sig en brun olja, som lätt stelnade, hvilken

affiltrerades. Det gula filtratet försattes med vatten, då en rent gul olja afskilde sig, som snart stelnade. Föreningen renades genom lösning i alkohol och försigtig tillsats af vatten till kallnad lösning, hvarvid först afskilde sig oljedroppar, som snart öfvergingo i svafvelgula blad.

Analyser på exsickatortorkad substans:

1. 0,1503 gr. gaf vid förbränning med kopparoxid 24,7 ccm. N-gas, mätt öfver kalilut vid 754 mm. bar. tr. och 17,2 ° C.

2. 0,2144 gr. gaf efter förbränning med kaliumklorat och soda 0,1679 gr. $BaSO_4$ (motsv. 0,02306 gr. S).

	Beräknadt:		Funnet: 1.	2.
C_{15}	180	62,5	—	—
H_{20}	20	6,9	—	—
N_4	56	19,5	19,3	—
S	32	11,1	—	10,8
	288	100,0		

Föreningen är lättlöslig i alkohol, benzol och dylika lösningsmedel och afskiljer sig ur dessa såsom en gul olja. Smältpunkt 76—77 ° C.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1891. N:o 8.
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska laboratorium.

198. Om inverkan af acetättiketer på dicyanfenylhydrazin.

Af J. A. Bladin.

[Meddeladt den 14 Oktober 1891 genom P. T. Cleve.]

Pyrodrufsyra ger i alkohollösning med dicyanfenylhydrazin ytterst lätt fenylmetylcyantriazol[1]) enligt ekvationen:

$$\begin{array}{l} C_6H_5—N—NH_2 \\ \qquad\; | \\ NC—C \diagdown NH \end{array} + OC\begin{array}{l}\diagup CH_3 \\ \diagdown COOH\end{array} = \begin{array}{l} C_6H_5—N—N \\ \qquad\quad | \quad\;\; \| \\ NC—C \quad C—CH_3 \\ \qquad\quad \diagdown \diagup \\ \qquad\quad\; N \end{array} +$$

$$+ HCOOH + H_2O,$$

hvarvid således den sura gruppen, —COOH, afspaltas och ej —CH_3. Nu är acetättiketern analogt sammansatt som pyrodrufsyran, och det vore därför af intresse att se, huruvida äfven här den negativa gruppen —CH_2. COO. C_2H_5 afspaltades, och man finge fenylmetylcyantriazol enligt ekvationen:

$$\begin{array}{l} C_6H_5—N—NH_2 \\ \qquad\; | \\ NC—C \diagdown NH \end{array} + OC\begin{array}{l}\diagup CH_3 \\ \diagdown CH_2 \,.\, COO \,.\, C_2H_5\end{array} =$$

$$= \begin{array}{l} C_6H_5—N — N \\ \qquad\quad | \quad\;\; \| \\ NC—C \diagdown \diagup C—CH_3 \\ \qquad\quad\; N \end{array} + CH_3 \,.\, COOH + H_2O \,.$$

---

1) Bladin: Öfversigt af K. Vet.-Akad:s Förh. 1886, N:o 8, sid. 253.

I denna afsigt företogs följande undersökning, för hvars resultat jag i det följande skall redogöra.

Pyrodrufsyran reagerar på dicyanfenylhydrazin i alkohollösning redan vid svag uppvärmning och ger därmed fenylmetylcyantriazol. Acetättiketern åter reagerar emellertid ej på dicyanfenylhydrazin under dessa förhållanden, men väl om försöket utföres på annat sätt, nämligen dels genom kokning direkt med acetättiketer, dels i alkohollösning vid närvaro af små mängder saltsyra.

Dicyanfenylhydrazin försattes med sin dubbla vigt acetättiketer. Vid vanlig temperatur egde ingen inverkan rum, men vid uppvärmning gick dicyanfenylhydrazin lätt i lösning, och snart råkade vätskan i lindrig kokning, hvilket berodde därpå, att alkohol afskilde sig, som bortgick. Sedan lösningen fått under c. 10 minuter lindrigt koka eller så länge, tills ett prof efter tillsats af alkohol och kalilut ej vidare gaf den för dicyanfenylhydrazin karakteristiska violetta färgen, göts den bruna vätskan i en porslinsskål, hvarvid snart nästan allt stelnade till en svartbrun, smörjig massa. Denna håller utom öfverskott af acetättiketer ej mindre än tränne skilda föreningar, för hvilkas åtskiljande följande förfaringssätt användes.

Massan utrördes med alkohol, hvarvid de smörjiga produkterna jemte en del af kristallerna gingo i lösning, under det att ett föga färgadt pulver förblef olöst. Detta affiltrerades och uttvättades noga med alkohol, tills det blifvit i det närmaste färglöst. För fullständig rening omkristalliserades föreningen några gånger dels ur alkohol, dels ur vatten och analyserades.

1. 0,2179 gr. gaf vid förbränning med blykromat i slutet rör 0,4745 gr. CO_2 (motsv. 0,12941 gr. C) och 0,1065 gr. H_2O (motsv. 0,01183 gr. H).

2. 0,1830 gr. lufttorkad substans aftog ej i vigt i exsickator öfver svafvelsyra och gaf vid förbränning med kopparoxid 35,1 ccm. N-gas, mätt öfver kalilut vid 768 mm. bar. tr. och 17,2° C.

3. 0,1750 gr. gaf på samma sätt 33,3 ccm. N-gas, mätt öfver kalilut vid 762,5 mm. bar. tr. och 14,4° C.

	Beräknadt.		Funnet. 1.	2.	3.
C_{12}	144	59.0	59,4	—	—
H_{12}	12	4,9	5,4	—	—
N_4	56	23,0	—	22,9	22,8
O_2	32	13,1	—	—	—
	244	100,0			

Föreningen är ganska svårlöslig i alkohol, vid vanlig temperatur nästan olöslig, och kristalliserar därur i små glänsande blad; äfven tämligen svårlöslig i vatten, ur hvilket lösningsmedel den samma kristalliserar vid lösningens långsamma afsvalning i egendomliga, ofta fjäderlikt hopade, hårda kristaller; lättlöslig i isättika, svårlöslig i eter. Den löses i ammoniak först vid kokning och äfven trögt i utspädd kalilut. Det är sålunda en mycket svag syra, som fälles ur kalilösningen af saltsyra i form af ett fullkomligt färglöst, glänsande kristallpulver. Föreningen reducerar ej ens vid kokning ammoniakalisk silfverlösning. Den smälter efter att några grader förut ha veknat under lindrig gasutveckling vid 208—209° C. till en gul olja.

Den i kall alkohol lösliga delen af reaktionsprodukten håller de bägge andra vid reaktionen bildade föreningarna. Alkohollösningen koncentrerades och fick därpå stå i en öppen skål vid vanlig temperatur, tills alkoholen i det närmaste afdunstat. Därvid afskilde sig i den bruna, smörjiga massan prismatiska kristaller. Dessa uttvättades på filtrum hastigt med litet kall alkohol, pressades mellan papper och omkristalliserades upprepade gånger ur litet alkohol, hvarvid föreningen slutligen erhölls i blott svagt färgade prismer, som smälte vid 108—109° C. Denna förening är *fenylmetylcyantriazol*,

```
C6H5—N—N
     |   ||
NC—C   C—CH3,
      \ /
       N
```

med hvilken den öfverensstämmer i alla sina egenskaper. En kväfvebestämning bekräftade sammansättningen.

0,1606 gr. gaf vid förbränning med kopparoxid 42,0 ccm. N-gas, mätt öfver kalilut vid 753 mm. bar. tr. och 17,3° C.

	Beräknadt för $C_6H_5 . C_2N_3(CH_3) . CN$.	Funnet.
N	30,4	30,6

Äfven en molekylarvigtsbestämning utfördes på föreningen:

Substans.	Benzol.	Depression.	Molekylarvigt funnen.	Molekylarvigt beräknad.
0,2212 gr.	14,18 gr.	0,404°	189	184.[1]

Den tredje vid reaktionen bildade föreningen har jag ej kunnat isolera; den finnes i de sista alkoholiska moderlutarne och är helt säkert en olja. Uppvärmas dessa försigtigt med litet kalilut, afskilja sig vid afsvalning ytterst fina nålar, hvilka efter tvättning med alkohol erhållas färglösa. Dessa nålar äro emellertid ingenting annat än kaliumsaltet till den i alkohol svårlösliga syran, hvilket de i utseende fullkomligt likna (se sid. 566), och försättas de med saltsyra, erhålles den fria syran sjelf eller kokas de samma med vatten och litet kalilut, bildas under ammoniakutveckling den sid. 568 beskrifna syran, $C_{12}H_{11}N_3O_3$. Den i de sista moderlutarna befintliga föreningen är därför ingenting annat än *etyletern till den i alkohol svårlösliga syran*, $C_{12}H_{12}N_4O_2$, och har genom kalits inverkan saponifierats.

Hvad nu konstitutionen för dessa bägge föreningar (syran och dess eterart) beträffar, så torde ej mera än en antaglig formel finnas, nämligen:

---

[1]) Denna molekylarvigtsbestämning bekräftar den formel, jag uppställt för triazolföreningarne. Som jag i samband med denna äfven utfört en dylik bestämning på difenylcyantriazol,

```
C6H5—N—N
     |   ||
NC—C   C . C6H5 ,
      \\ /
       N
```

$$C_6H_5—N—N = C\begin{cases}CH_3\\CH_2 . CO_2H\end{cases}$$
$$NC—C = NH$$

resp.

$$C_6H_5—N—N = C\begin{cases}CH_3\\CH_2 . CO_2 . C_2H_5.\end{cases}$$
$$NC—C = NH$$

Acetättiketern har således reagerat på dicyanfenylhydrazin enligt ekvationen:

$$\begin{array}{l}C_6H_5—N—NH_2\\NC—C = NH\end{array} + OC\begin{cases}CH_3\\CH_2 . CO_2 . C_2H_5\end{cases} =$$

$$= \begin{array}{l}C_6H_5—N—N = C\begin{cases}CH_3\\CH_2 . CO_2 . C_2H_5\end{cases}\\NC—C = NH\end{array} + H_2O,$$

och den därvid bildade eterarten har sedan vid kokningen delvis saponifierats till karbonsyra. Också erhålles vid långvarigare kokning af dicyanfenyhydrazin med acetättiketer eterarten i blott ringa mängd, under det att utbytet af sjelfva syran blir bättre.

Hvad vidare bildningen af fenylmetylcyantriazol beträffar, så får man väl antaga, att vid kokningen acetättiketern delvis sönderdelas, så att acetylgruppen afskiljes och i sjelfva frigöringsögonblicket ger med dicyanfenylhydrazin ett acetylderivat,

$$\begin{array}{l}C_6H_5—N—NH . COCH_3\\NC—C = NH\end{array}$$

hvilket sedan spontant förlorar vatten och öfvergår i fenylmetylcyantriazol:

---

vill jag här anföra den samma.

Substans.	Benzol,	Depression.	Molekylarvigt funnen.	Molekylarvigt beräknad.
0,2098 gr.	13,92 gr.	0,312°	237	246.

Af dessa molekylarvigtsbestämningar framgår, att triazolföreningarne ega den molekylarvigt, som de af mig för dem uppstälda formlerna fordra.

$$\begin{array}{l} C_6H_5-N-NH \\ \quad\;\; | \qquad | \\ NC-C \quad CO\,.\,CH_3-H_2O \\ \qquad\diagdown NH \end{array} = \begin{array}{l} C_6H_5-N-N \\ \quad\;\; | \qquad \| \\ NC-C \quad C-CH_3, \\ \qquad\diagdown\diagup \\ \qquad\;\; N \end{array}$$

om man ej vill antaga, att triazolderivatet bildats såsom en sekundär produkt ur syran,

$$\begin{array}{l} C_6H_5-N-N=C\begin{array}{l}\diagup CH_3 \\ \diagdown CH_2\,.\,COOH,\end{array} \\ \qquad\quad | \\ NC-C=NH \end{array}$$

resp. dess eterart, därigenom att denna förlorat ättiksyra:

$$\begin{array}{l} C_6H_5-N-N \\ \quad\;\; | \qquad \| \\ NC-C \quad C\begin{array}{l}\diagup CH_3 \\ \diagdown CH_2\,.\,CO_2H\end{array} \\ \quad\diagdown NH \end{array} = \begin{array}{l} C_6H_5-N-N \\ \quad\;\; | \qquad \| \\ NC-C \quad C-CH_3 + CH_3\,.\,CO_2H\,. \\ \qquad\diagdown\diagup \\ \qquad\;\; N \end{array}$$

Mot detta antagande strider emellertid den omständigheten, att denna syra är jämförelsevis beständig; den sönderdelas visserligen vid kokning med kalilut och saltsyra, men fenylmetylcyantriazol bildas ej därvid. En annan omständighet finnes dessutom, som talar för det förra uppfattningssättet af reaktionsförloppet. Försättes nämligen en alkohollösning af dicyanfenylhydrazin med beräknad mängd acetättiketer (1 mol. af hvardera), och blandningen uppvärmes på vattenbad efter tillsats af några droppar saltsyra, ger blandningen efter $^1/_2$—$^3/_4$ timmes förlopp ej vidare reaktion för dicyanfenylhydrazin med alkoholiskt kali, och undersökes reaktionsprodukten, finner man, att denna utgöres blott af en fattbar produkt, nämligen fenylmetylcyantriazol. Denna har dessutom vid detta försök bildats i ej obetydligt större mängd än vid kokningen af dicyanfenylhydrazin direkt med acetättiketer. I detta fall har tydligen närvaron af saltsyran befordrat sönderdelningen af acetättiketern, och utbytet af triazolföreningen har också blifvit större.

Huru härmed än må förhålla sig, så är reaktionen analog med bildningen af fenylmetylcyantriazol vid inverkan af pyrodrufsyra på en alkohollösning af dicyanfenylhydrazin:[1])

---

[1]) BLADIN: Öfversigt af K. Vet.-Akad:s Förh. 1886, N:o 8, sid. 253.

$$
\begin{array}{l} C_6H_5—N—NH_2 \\ \quad\;\; | \\ NC—C \\ \quad\;\; \diagdown NH \end{array} + OC\begin{array}{l}\diagup CH_3 \\ \diagdown COOH\end{array} =
$$

$$
= \begin{array}{l} C_6H_5—N—N \\ \qquad\;\; | \quad\;\; \| \\ NC—C \quad C—CH_3 \\ \qquad\; \diagdown \diagup \\ \qquad\;\; N \end{array} + HCOOH + H_2O ,
$$

med den skilnad likväl, att i detta fall någon förening af sammansättningen,

$$
\begin{array}{l} C_6H_5—N—N = C\begin{array}{l}\diagup CH_3 \\ \diagdown COOH\end{array} , \\ \qquad\quad | \\ \quad NC—C = NH \end{array}
$$

ej förefinnes i reaktionsprodukten, utan blott triazolföreningen, och att i senare fallet reaktionen försiggår betydligt lättare, redan vid lindrig uppvärmning af beräknade mängder dicyanfenylhydrazin och pyrodrufsyra i alkohollösning.

Hvad slutligen proportionen beträffar, i hvilken de tränne föreningarna bildas, så utgör alltid den i alkohol svårlösliga syran hufvudprodukten (vid ett försök erhölls af 10 gr. dicyanfenylhydrazin 6 gr. af denna förening), under det att de bägge andra bildas i underordnad mängd.

I det följande skall jag beskrifva några derivat, som jag erhållit ur föreningen,

$$
\begin{array}{l} C_6H_5—N—N = C\begin{array}{l}\diagup CH_3 \\ \diagdown CH_2 . CO_2H .\end{array} \\ \qquad\quad | \\ \quad NC—C = NH \end{array}
$$

Den är, såsom jag redan nämt, en mycket svag syra. Kokas föreningen med vanlig kaustik ammoniak, löses den trögt och vid afsvalning utkristallisera små bollar, hvilka utgöra *ammoniumsaltet*,

$$
\begin{array}{l} C_6H_5—N—N = C\begin{array}{l}\diagup CH_3 \\ \diagdown CH_2 . CO_2 . H_4N .\end{array} \\ \qquad\quad | \\ \quad NC—C = NH \end{array}
$$

Såsom kväfvebestämningen utvisar, har saltet emellertid något sönderdelats.

0,1146 gr. i exsickator torkadt salt gaf vid förbränning med kopparoxid 25,0 ccm. N-gas, mätt öfver kalilut vid 768 mm. bar. tr. och 14,8 ° C.

	Beräknadt på $C_6H_5—N(—C(=NH)—CN)—N=C(CH_3)—CH_2.CO_2.H_4N$:	Funnet:
N	26,8	26,3.

Får en med ammoniak försatt alkohollösning afdunsta i exsickator, utkristallisera färglösa, tjocka, rombiska taflor, men detta är ej något ammoniumsalt utan fri syra, hvilket smältpunkten 208—209 ° C. och en kväfvebestämning utvisade.

0,1356 gr. gaf vid förbränning med kopparoxid 26,2 ccm. N-gas, mätt öfver kalilut vid 770 mm. bar. tr. och 17,2 ° C.

	Beräknadt för $C_6H_5—N(—C(=NH)—CN)—N=C(CH_3)—CH_2.COOH$:	Funnet:
N	23,0	23,1.

Kaliumsaltet,

$$C_6H_5—N(—C(=NH)—NC)—N=C\begin{matrix}CH_3\\CH_2.CO_2K\end{matrix},$$

är jämväl ganska obeständigt. Det är i alkohol svårlösligt och ej heller så synnerligen lättlösligt i vatten och ännu mindre i kalilut. Det erhålles lättast, om man till en varm alkohollösning af syran sätter kalilut; därvid stelnar nästan genast vätskan till en gröt af färglösa, hopfiltade, ytterst fina nålar. För analys uttvättades saltet med alkohol.

Analys:

0,2073 gr. i exsickator torkadt salt aftog ej i vigt vid 100 ° C. och gaf vid afrykning med svafvelsyra 0,0625 gr. K_2SO_4 (motsv. 0,02803 gr. K).

	Beräknadt för $C_{12}H_{11}N_4O_2K$:	Funnet:
K	13,9	13,5

Saltet tycks sönderdelas redan af luftens kolsyra, i det att det samma efter en tids liggande i luft starkt fräser vid tillsats af en syra, hvilket ej är förhållandet med nyberedt salt.

Syran ger med salpetersyrlighet en *isonitrosoförening*,

$$\begin{array}{l} C_6H_5—N—N = C\begin{cases} CH_3 \\ C(NOH) . COOH . \end{cases} \\ \qquad\quad | \\ \quad NC—C = NH \end{array}$$

Syran löstes i kokande vatten, och lösningen försattes med beräknad mängd kaliumnitrit. Vid den varma lösningens surgöring med saltsyra afskilde sig färglösa nålar, hvilka affiltrerades, tvättades med vatten och omkristalliserades ur alkohol.

Analys:

0,1437 gr. lufttorkad substans aftog ej i vigt vid 100° C. och gaf vid förbränning med kopparoxid 30,9 ccm. N-gas, mätt öfver kalilut vid 759 mm. bar. tr. och 14,0° C.

	Beräknadt:		Funnet:
C_{12}	144	52,8	—
H_{11}	11	4,0	—
N_5	70	25,6	25,7
O_3	48	17,6	—
	273	100,0	

Föreningen är svårlöslig i kall alkohol, lättlöslig i varm, mycket svårlöslig i vatten. Den löses mycket lätt i kaustik ammoniak och kalilut med gul färg. Ur en sådan koncentrerad lösning fälles föreningen af syror såsom ett färglöst harts, som lätt hårdnar. Den smälter vid 217—218° C. under gasutveckling till en brun olja efter att något förut ha börjat vekna och sönderdelas.

Syran,

$$\begin{array}{l} C_6H_5—N—N = C\begin{cases} CH_3 \\ CH_2 . CO_2H , \end{cases} \\ \qquad\quad | \\ \quad NC—C = NH \end{array}$$

sönderdelas lätt vid kokning med kalilut eller saltsyra, i det

att en grupp NH därvid afskiljes i form af ammoniak och ersättes af en atom O:

$$C_{12}H_{12}N_4O_2 + H_2O = C_{12}H_{11}N_3O_3 + H_3N.$$

Sedan vid kokningen med kalilut ammoniakutvecklingen upphört, neutraliseras lösningen med saltsyra, hvarvid kristaller afskilja sig, hvilka renas genom omkristalliseringar dels ur alkohol, dels ur vatten.

Analyser på exsickatortorkad substans:

1. 0,1972 gr. gaf vid förbränning med blykromat i slutet rör 0,4267 gr. CO_2 (motsv. 0,11637 gr. C) och 0,0870 gr. H_2O (motsv. 0,00967 gr. H).

2. 0,1332 gr. gaf vid förbränning med kopparoxid 19,5 ccm. N-gas, mätt öfver kalilut vid 769,5 mm. bar. tr. och 15,6 ° C.

	Beräknadt:		Funnet: 1.	2.
C_{12}	144	58,8	59,0	—
H_{11}	11	4,5	4,9	—
N_3	42	17,1	—	17,6
O_3	48	19,6	—	—
	245	100,0		

Liksom kalilut verkar utspädd saltsyra. Sedan lösningen kokats under c. $^1/_4$ timme, fick den afsvalna, hvarvid kristaller afskilde sig. Dessa försattes med litet ammoniak, då osönderdelad syra stannade olöst. Ur filtratet fäldes föreningen medels saltsyra och renades genom omkristalliseringar ur alkohol och vatten.

Analys:

0,1560 gr. gaf vid förbränning med kopparoxid 22,9 ccm. N-gas, mätt öfver kalilut vid 761,5 mm. bar. tr. och 14,4 ° C.

	Beräknadt:	Funnet:
N	17,1	17,6.

Denna nya förening, $C_{12}H_{11}N_3O_3$, är svårlöslig i kall alkohol, lättlöslig i varm och kristalliserar därur i fullkomligt färg-

lösa, platta nålar; svårlöslig i vatten. Det är en starkare syra än den ursprungliga föreningen, löses lätt i ammoniak och alkalier och fälles af syror. Den reducerar ej ammonikalisk silfverlösning ens vid kokning. Föreningen smälter under stark gasutveckling vid 187—188° C. till en gul olja.

Hvad nu syrans konstitution beträffar, ligger det närmast till hands att antaga, att i den ursprungliga syran imidgruppen utbytts mot syre:

$$\begin{array}{l} C_6H_5—N—N = C\begin{cases} CH_3 \\ CH_2 . CO_2H \end{cases} \\ \quad\quad\;\; | \\ \;\; NC—C = NH \end{array} + H_2O =$$

$$= \begin{array}{l} C_6H_5—N—N = C\begin{cases} CH_3 \\ CH_2 . CO_2H \end{cases} \\ \quad\quad\;\; | \\ \;\; NC—C = O \end{array} + H_3N .$$

Märkligt är det emellertid, att gruppen NC—CO— ej spaltas vid kokningen med kali eller saltsyra.

Liksom den andra syran ger äfven denna ett *isonitrosoderivat*,

$$\begin{array}{l} C_6H_5—N—N = C\begin{cases} CH_3 \\ C(NOH) . CO_2H \end{cases} \\ \quad\quad\;\; | \\ \;\; NC—C = O \end{array} ,$$

hvilket erhölls på följande sätt. Föreningen, $C_{12}H_{11}N_3O_3$, löstes i en blandning af 5 delar vatten och en del vanlig saltsyra, och till den kokheta lösningen sattes en beräknad mängd kaliumnitrit (1 mol.) under omröring. Nästan genast började ur den fullkomligt färglösa lösningen små prismer afskilja sig. Föreningen omkristalliserades upprepade gånger dels ur utspädd alkohol (1 del alkohol och 3 delar vatten) dels ur isättika.

Analys:

0,1238 gr. aftog ej i vigt vid 110° C. och gaf vid förbränning med kopparoxid 21,3 ccm. N-gas, mätt öfver kalilut vid 762 mm. bar. tr. och 15,6° C.

	Beräknadt:		Funnet:
C_{12}	144	52,6	—
H_{10}	10	3,6	—
N_4	56	20,4	20,5
O_4	64	23,4	—
	274	100,0	

Föreningen är mycket lättlöslig i alkohol, mycket svårlöslig i vatten, lättlöslig i isättika och aceton, nästan olöslig i benzol. Den löses lätt i kaustik ammoniak och kalilut med vackert gul färg. Den smälter under stark gasutveckling vid 209° C. till en svartbrun massa.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1891. N:o 8.
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska laboratorium.

199. Om 1-6-4-Diklornaftalinsulfonsyra.

Af P. T. Cleve.

Om man lindrigt uppvärmer den vid 48° smältande 1-6-diklornaftalinen med en blandning af koncentrerad och rykande svafvelsyra, löses den lätt, och syran stelnar efter en stund till en grötformig massa af ifrågavarande sulfonsyra. Reaktionsprodukten löses lätt i hett vatten, men utkristalliserar vid afsvalning i form af fina, hvita kristallnålar, såvida vätskan innehöll ett större öfverskott af svafvelsyra. Sulfonsyran är nämligen föga löslig i utspädd svafvelsyra, ehuru lättlöslig i vatten. Om men icke användt ett för stort öfverskott af svafvelsyra vid beredningen af sulfonsyran, erhåller man nästan uteslutande 1-6-4-diklormonosulfonsyra, men vid närvaro af mycket rykande svafvelsyra och längre upphettning bildas ännu en syra, som ger lättlösliga salter och troligen är en disulfonsyra.

För rening af sulfonsyran neutraliserar man lösningen med kalk, filtrerar från gips och afdunstar lösningen till kristallisering, då kalciumsaltet erhålles i tunna, glimmerlika fjäll.

Salter af 1-6-4-diklornaftalinsulfonsyra.

Kaliumsaltet — $C_{10}H_5Cl_2SO_3K + H_2O$ — bildar silfverglänsande, i kokande vatten tämligen lättlösliga, i kallt vatten svårlösliga, platta prismer.

0,2609 gr. mellan papper pressadt salt förlorade vid upphettning till 140° 0,0138 gr. H_2O och gaf 0,0675 gr. K_2SO_4.

	Funnet:	Beräknadt:
K	11,61	11,75
H_2O	5,29	5,41.

Natriumsaltet — $2C_{10}H_5Cl_2SO_3Na + 3H_2O$ — bildar platta, silfverglänsande nålar, lättlösliga i hett vatten, svårlösliga i kallt vatten.

0,2825 gr. mellan papper pressadt salt förlorade vid 120° 0,0233 gr. H_2O och gaf 0,0616 gr. Na_2SO_4.

	Funnet:	Beräknadt:
Na	7,06	7,06
H_2O	8,25	8,25.

Amoniumsaltet kristalliserar liksom kaliumsaltet i glimmerlika fjäll och platta nålar.

Silfversaltet — $C_{10}H_5Cl_2SO_3Ag + H_2O$ — silfverglänsande tunna fjäll, tämligen lättlösliga i hett vatten, men svårlösliga i kallt.

0,271 gr. förlorade vid 100° 0,0122 gr. H_2O och gaf 0,0951 gr. AgCl.

	Funnet:	Beräknadt:
Ag	26,41	26,82
H_2O	4,50	4,48.

Kalciumsaltet. — $(C_{10}H_5Cl_2SO_3)_2Ca + 3H_2O$ — Glittrande, tunna, tafvelformiga kristaller, tämligen lösliga i kokande vatten, svårlösliga i kallt vatten.

0,2716 gr. förlorade vid 140° 0,0213 gr. H_2O och gaf 0,0570 gr. $CaSO_4$.

	Funnet:	Beräknadt:
Ca	6,17	6,20
H_2O	7,84	8,37.

Bariumsaltet — $(C_{10}H_5Cl_2SO_3)_2Ba + 3H_2O$ — bildar tunna, glimmerlika taflor, tämligen lösliga i hett vatten och svårlösliga i kallt vatten.

a. 0,2810 gr. mellan papper pressadt salt förlorade vid 140° 0,0186 gr. H_2O och gaf 0,0866 gr. $BaSO_4$.

b. 0,2026 gr. af en annan beredning gaf 0,0133 gr. H_2O och 0,0618 gr. $BaSO_4$.

	Funnet: a.	Funnet: b.	Beräknadt:
Ba	18,11	17,92	18,43
H_2O	6,62	6,61	7,27.

Blysaltet. — $(C_{10}H_5Cl_2SO_3)_2Pb + 4H_2O$ — Tunna, silfverglänsande, platta nålar, tämligen lättlösliga i kokande vatten och svårlösliga i kallt vatten.

0,191 gr. förlorade vid 140° 0,0154 gr. H_2O.

0,3019 gr. förlorade vid 140° 0,0247 gr. H_2O.

0,2480 gr. gaf 0,0889 gr. $PbSO_4$.

	Funnet:			Beräknadt:
Pb	—	—	24,37	24,88
H_2O	8,06	8,18	—	8,67.

Kopparsaltet — $(C_{10}H_5Cl_2SO_3)_2Cu + 6H_2O$ — bildar blekt blåaktiga, tunna, glänsande taflor, tämligen lösliga i kokande vatten, svårlösliga i kallt vatten.

0,6266 gr. mellan papper pressadt salt förlorade vid 140° 0,0909 gr. och gaf 0,0658 gr. CuO.

0,2884 gr. gaf 0,0310 gr. CuO.

	Funnet:		Beräknadt:
Cu	8,58	8,38	8,74
H_2O	14,51	—	14,94.

Zinksaltet — $(C_{10}H_5Cl_2SO_3)_2Zn + 5H_2O$ — bildar färglösa, glänsande, små tafvelformiga kristaller, tämligen lättlösliga i vatten.

0,3864 gr. mellan papper pressadt salt förlorade vid 140° 0,0478 gr.

0,5892 gr. gaf 0,0632 gr. ZnO.

	Funnet:	Beräknadt:
Zn	8,61	9,20
H_2O	12,37	12,73.

Eterarter af 1-6-4-diklornaftalinsulfonsyra.

Metyletern — $C_{10}H_5Cl_2SO_3CH_3$ — erhölls af silfversaltet och jodmetyl samt bildar färglösa, fina kristallnålar, lättlösliga i kloroform, men tämligen svårlösliga i kall alkohol. Smältpunkt 138°.

0,2761 gr. gaf efter glödgning med kalk 0,2733 gr. AgCl.

0,2064 gr. gaf 0,0597 gr. H_2O och 0,3447 gr. CO_2.

0,217 gr. gaf 0,1746 gr. $BaSO_4$.

	Funnet:	Beräknadt:
C	45,54	45,39
H	3,22	2,75
Cl	24,49	24,35
S	11,06	11,00.

Etyletern — $C_{10}H_5Cl_2SO_3C_2H_5$ — erhölls af silfversaltet och jodetyl samt bildar fina, färglösa nålar. Smältpunkt 154°.

0,2365 gr. gaf 0,2224 gr. AgCl.

	Funnet:	Beräknadt:
Cl	23,26	23,23.

Klorid af 1-6-4-diklornaftalinsulfonsyra

$C_{10}H_5Cl_2SO_2Cl$.

Kloriden erhölls af syrans kaliumsalt med fosforpentaklorid och kristalliserar ur isättika i flere centimeter långa, spröda, färglösa nålar med smältpunkten 151°. Kloriden är svårlöslig i isättika.

0,2461 gr. gaf 0,3580 gr. AgCl.

	Funnet:	Beräknadt:
Cl	35,99	35,98.

Amid af 1-6-4-diklornaftalinsulfonsyra

$C_{10}H_5Cl_2SO_2NH_2$.

Amiden erhölls när kloriden kokades med en blandning af kaustik ammoniak och alkohol. Den bildar långa och platta,

atlasglänsande nålar, tämligen lösliga i kokande alkohol, svårlösliga i kall alkohol. Smältpunkt 217°.

0,3264 gr. gaf 15,6 kubikcentimeter kväfgas, mätt öfver kalilut. Temp. 17°,2. Bar. 762 mm.

	Funnet:	Beräknadt:
N	5,65	5,08.

1-6-4-Triklornaftalin

$C_{10}H_5Cl_3$.

Genom upphettning af kloriden med fosforpentaklorid erhölls en triklornaftalin, som ur alkohol kristalliserar i färglösa nålar, lättlösliga i alkohol. Smältpunkten var 56° efter hastig afkylning i kapillärrör, men 65° om långsamt stelnad substans upphettades.

0,2435 gr. gaf 0,4548 gr. AgCl.

	Funnet:	Beräknadt:
Cl	46,20	45,93.

Denna triklornaftalin framstäldes af mig 1878 genom nitrering af 1-6-diklornaftalin och nitroföreningens behandling med fosforpentaklorid, 1879 af WIDMAN genom upphettning med fosforpentaklorid af diklorsulfonsyra, erhållen af klor och naftalin-β-sulfonsyras klorid. Sistnämda diklorsulfonsyra erhölls sedermera af ARNELL[1]) genom inverkan af svafvelsyra på 1-4-diklornaftalin. Af dessa bildningssätt framgår otvifvelaktigt, att den vid 56° (resp. 65°) smältande triklornaftalinen är

Cl

Cl Cl

hvaraf följer att här ofvan beskrifna diklorsulfonsyra är

---

[1]) Bidrag till kännedomen om naftalins klorsulfonsyror p. 36 (Upsala 1889).

Cl

Cl

SO_3H

Såsom nämdt bildas denna syra nästan uteslutande vid inverkan af svafvelsyra på 1-6-diklornaftalin. Ifrågavarande diklornaftalin håller i olika kärnor en kloratom i α- och en i β-ställning. Enligt ARNELLS undersökning bildas vid sulfonering af α-monoklornaftalin syrorna

Cl Cl

och

SO_3H SO_3H

och vid sulfonering af β-klornaftalin syrorna

SO_3H

Cl och Cl

SO_3H

Således predisponera både α- och β-kloratomen i 1-6-diklornaftalin sulfongruppen att ingå i 4, hvarför också syran 1-6-4-nästan enbart uppstår, när man sulfonerar 1-6-diklornaftalin.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1891. N:o 8.
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska laboratorium.

200. Om 1-2-Amidonaftalinsulfonsyra och dess derivat.

Af P. T. Cleve.

[Meddeladt den 14 Oktober 1891.]

Enligt ett patent af Landshoff & Meyer i Grünau[1]) uppstår, om man till 200° eller 250° helst i kolsyreström upphettar naftionsyrans alkalisalter, salter af en ny amidosulfonsyra. Från nämda firma har jag emottagit prof på den nya syrans natriumsalt och funnit att den är den sista af de sju teoretiskt möjliga α-amidosulfonsyrorna. Den tekniska produkten var ett gråaktigt pulver och utgjordes till största delen af syrans natriumsalt, hvilket lätt erhölls rent genom omkristallisering ur kokande vatten. Emedan syran vid upphettning med kalk såsom patentinnehafvarne uppgifvit lemnar α-naftylamin, innehåller den amidogruppen i α-ställning och emedan syran efter transformering till diklornaftalin ger den vid 34° smältande och i rhomboedrer kristalliserande 1-2-diklornaftalinen, såsom framgår af följande undersökning, är den utan tvifvel

NH_2

SO_2OH SO_2OH

Syran — $C_{10}H_6NH_2SO_3H$ — erhålles när man till en varm lösning af natriumsaltet tillsätter en mineralsyra. Den utfälles i form af glänsande, oftast af ett färgämne violett färgade nålar,

[1]) Deut. Pat. 56,563, 21 Jan. 1891 (D. Chem. Ges. 1891, p. 682).

af flere millimeters längd. Vid långsam kristallisering erhålles den i små, men väl utbildade kristaller. Kristallformen har blifvit bestämd af Herr C. MORTON, som derom lemnat följande meddelande.

»Kristallsystemet rhombiskt.

Axelförh.: $a : b : c = 0{,}79401 : 1 : 0{,}36429$.

Komb.: ∞P; $\infty \bar{P} \infty$; P.

$100 : 110 = 38° 30'$		
$100 : 1\bar{1}0 = 38° 35'$		
$\bar{1}00 : \bar{1}\bar{1}0 = 38° 25'$	......	$38° 27'$
$\bar{1}00 : \bar{1}10 = 38° 5'$		
$111 : 100 = 66° 40'$		
$11\bar{1} : 100 = 66° 58'$	......	$66° 41'$
$1\bar{1}1 : 100 = 67° 5'$		
$111 : 1\bar{1}1 = 46° 30'$	......	$46° 38'$.

Utsläckningen parallel med kanten 110 : 100.

De optiska axlarnes plan parallelt med basplanet.

Syran fälld ur varm lösning innehåller icke kristallvatten, men vid lägre temperatur anskjuta ur lösningen platta, sköra nålar, som vittra i luften och synas innehålla $1/2$ mol. kristallvatten. Syran är betydligt mer löslig än isomeriska ryror. Enligt ett approximativt försök löses 1 del vattenfri syra i 34 delar kokande vatten och 225 delar vatten af 16°.

0,3434 gr. gaf vid förbränning med blykromat 0,1332 gr. H_2O och 0,6809 gr. CO_2.

0,2433 gr. gaf 0,2398 gr. $BaSO_4$.

0,2784 gr. gaf 15 kubc. kväfgas, mätt öfver kalilut vid temp. 15°,8 och bar. 756,8.

	Funnet:	Beräknadt:
C	54,07	53,81
H	4,41	4,04
N	6,36	6,28
S	14,54	14,35.

Kaliumsaltet — $C_{10}H_6NH_2SO_3K$ — bildar tunna platta nålar, lättlösliga i hett vatten, tämligen svårlösliga i kallt vatten.

Saltet förlorar vid torkning vid 100° ungefär 1,5 procent vatten, som antagligen var hygroskopisk fukt.

0,5150 gr. vid 100° torkadt salt gaf 0,1706 gr. K_2SO_4.

	Funnet:	Beräknadt:
K	14,87	14,98.

Natriumsaltet — $C_{10}H_6NH_2SO_3Na$ — bildar små glittrande kristallfjäll, lösliga i ungefär 10 delar kokande vatten och 60 delar vatten af 16°. Saltet är vattenfritt.

0,2104 gr. gaf 0,0605 gr. Na_2SO_4.

	Funnet:	Beräknadt:
Na	9,31	9,39.

Amoniumsaltet — $C_{10}H_6NH_2SO_3NH_4$ — är lättlösligt och bildar tunna kristallfjäll.

0,3986 gram gaf 38,9 kubcent. kväfgas, temp. 16°,4. Bar. 766,3 m.m.

	Funnet:	Beräknadt:
N	11,93	11,66.

Silfversaltet — $C_{10}H_6NH_2SO_3Ag$ — erhålles om man till en lösning af kaliumsaltet sätter en lösning af silfvernitrat. Det utfälles ögonblickligen i form af en snöhvit, finkristallinisk fällning, som torkad bildar ett talklikt pulver. Det innehåller icke kristallvatten.

1,174 gr. gaf 0,5047 gr. AgCl.

	Funnet:	Beräknadt:
Ag.	32,35	32,67.

Magnesiumsaltet — $(C_{10}H_6NH_2SO_3)_2Mg + 8H_2O$ — är lättlösligt och kristalliserar i glimmerlika, tunna fjäll.

0,4042 gr. förlorade vid 140° 0,0939 gr. H_2O och gaf 0,0756 gr. $MgSO_4$.

0,5011 gr. förlorade 0,1169 gr. H_2O och gaf 0,0978 gr. $MgSO_4$.

	Funnet:		Beräknadt:
Mg	3,73	3,90	3,92
H_2O	23,23	23,33	23,53.

Kalciumsaltet — $(C_{10}H_6NH_2SO_3)_2Ca$ — är svårlösligt och kristalliserar ur en varm lösning i tunna, sexsidiga, talkliknande taflor.

0,7565 gr. salt gaf 0,2122 gr. $CaSO_4$.

	Funnet:	Beräknadt:
Ca	8,25	8,26.

Bariumsaltet — $(C_{10}H_6NH_2SO_3)_2Ba + H_2O$ — bildar tunna, glittrande, mycket svårlösliga fjäll.

0,3891 gr. förlorade vid 100° 0,0122 gr. och intet vid ytterligare upphettning till 200° samt gaf 0,1504 gr. $BaSO_4$.

	Funnet:	Beräknadt:
Ba	22,73	22,87
H_2O	3,18	3,00.

Blysaltet — $(C_{10}H_6NH_2SO_3)_2Pb + H_2O$ — är svårlösligt och kristalliserar i tunna, glimmerlika blad.

0,4042 gr. förlorade vid 150° 0,0106 gr. samt gaf 0,1805 gr. $PbSO_4$.

0,587 gr. förlorade vid 150° 0,0157 gr. och gaf 0,2628 gr. $PbSO_4$.

	Funnet:		Beräknadt:
Pb	30,51	30,58	30,94
H_2O	2,62	2,67	2,69.

Zinksaltet — $(C_{10}H_6NH_2SO_3)_2Zn + 5H_2O$ — är lättlösligt och bildar platta, till halfklotformiga aggregat förenade nålar.

0,2030 gr. förlorade vid 100° 0,0301 gr., intet vid ytterligare upphettning till 200° samt gaf 0,0278 gr. ZnO.

	Funnet:	Beräknadt:
Zn	10,99	10,85
H_2O	14,83	15,02.

Mangansaltet — $(C_{10}H_6NH_2SO_3)_2Mn + H_2O$ — är tämligen lättlösligt och bildar mycket små, kvadratiska taflor.

0,3505 gr. förlorade vid 150° 0,0115 gr. och gaf 0,1015 gr. $MnSO_4$.

	Funnet:	Beräknadt:
Mn	10,42	10,46
H_2O	3,28	3,49.

1-2-Acetylamidosulfonsyra

$C_{10}H_6(NHCO . CH_3)SO_3H$.

Upphettar man amidosulfonsyran med acetanhydrid i slutet rör i vattenbad, öfvergår den till ett gulaktigt, kristalliniskt ämne, som lätt löses i vatten. Vid vattenlösningens frivilliga afdunstning afsätta sig små, glänsande, gulaktiga nålar, hvilka innehålla 1 mol. H_2O, som bortgår vid torkning vid 100° (funnet 6,63 ber. 6,36).

0,2251 gr. gaf 0,2020 gr. $BaSO_4$.

0,2928 gr. gaf 0,1209 gr. H_2O och 0,5827 gr. CO_2.

	Funnet:	Beräknadt:
C	54,27	54,34
H	4,57	4,15
S	12,32	12,08.

Diazosulfonsyra

$C_{10}H_6N_2SO_3$.

En lösning af 4 delar natriumsalt och 1 del kaliumnitrit i 100 delar med is afkyldt vatten häldes i en med is afkyld blandning af 5 delar saltsyra och 100 delar vatten. Diazoföreningen utfälles genast i form af ett grönt, kristalliniskt pulver, som under mikroskop visar sig som gulaktiga, små taflor. Kort efter det diazoföreningen utfallit, antager vätskan en blåaktig färg och afsätter efter någon tid indigoblåa, små knippen, sannolikt af en oxiazosulfonsyra. Åtminstone bildades en alldeles likadan produkt när diazoföreningen kokades med vatten och lösningen någon tid lemnades åt sig sjelf.

0,2061 gr. gaf vid förbränning 19,6 kubc. kväfgas t. 14°,2. Bar. 760 m.m.

	Funnet:	Beräknadt:
N	11,34	11,97.

1-2-Hydrazinsulfonsyra.

$$C_{10}H_6 \langle {NH—NH_2 \atop SO_3H}$$

Om nyss beredd och i vatten uppslammad diazosulfonsyra blandas med en lösning af beräknad mängd tennklorur i saltsyra, förvandlas den till ett hvitt, skimrande pulver af mikroskopiska fjäll. Efter uttvättning löstes det i ammoniak och fäldes med saltsyra. Fälles lösningen kall, fås små fjäll, men tämligen stora, om nästan kokhet lösning fälles.

0,2397 gr. gaf 0,2338 gr. $BaSO_4$.

0,3086 gr. gaf 0,3070 gr. $BaSO_4$.

0,3275 gr. gaf 32 kubc. kväfgas, mätt öfver kalilut, temp. 18°. Bar. 762,5 m.m.

0,3043 gr. gaf 0,1232 gr. H_2O och 0,5622 gr. CO_2.

	Funnet:				Beräknadt:
C	—	—	—	50,37	50,42
H	—	—	—	4,50	4,20
N	—	—	11,54	—	11,76
S	13,41	13,66	—	—	13,44.

Salterna af hydrazinsulfonsyran äro mer lösliga än af motsvarande amidosyra. Natriumsaltet bildar små, otydligt utbildade kristaller. Bariumsaltet bildar klotformiga, hårda aggregat af tätt packade nålar.

1-2-Klorsulfonsyra.

Om man till en kokande lösning af kopparklorur i stark klorvätesyra i små portioner tillsätter diazosulfonsyra, utvecklas kväfgas. Vid afsvalning utkristalliserar klorsulfonsyran i glimmerlika, silfverglänsande fjäll, som genom afsugning befrias från moderluten, hvilken innehåller färgämnen och ganska obetydligt af klorsulfonsyran. Klorsulfonsyran löses lätt i kokande vatten och kristalliserar vid afsvalning i tunna blad.

Klorid till 1-2-klorsulfonsyra

$C_{10}H_6ClSO_2Cl$.

Kaliumsaltet af klorsulfonsyra upphettades med fosforpentaklorid, hvarefter den med kallt vatten tvättade kloriden kristalliserades ur benzol och blandningar af benzol och ligroin. Kloriden bildar färglösa, glänsande kristallnålar med smältpunkten 80°. Den är lättlöslig i eter, benzol och isättika, svårlöslig i ligroin.

0,2189 gr. gaf 0,2414 gr. AgCl.

0,2353 gr. gaf 0,2091 gr. $BaSO_4$.

	Funnet:	Beräknadt:
Cl	27,28	27,15
S	12,21	12,27.

Salter af 1-2-klorsulfonsyra.

Kaliumsaltet — $C_{10}H_6ClSO_3K$ — bildar tunna kristallblad, lättlösliga i hett vatten och tämligen svårlösliga i kallt vatten.

0,3613 gr. förlorade intet vid torkning och gaf 0,1113 gr. K_2SO_4.

	Funnet:	Beräknadt:
K	13,81	13,94.

Natriumsaltet — $C_{10}H_6ClSO_3Na + 4H_2O$ — bildar tunna, silfverglänsande fjäll, lätt lösliga i hett vatten, svårlösliga i kallt.

0,2372 gr. förlorade vid 150° 0,051 gr. och gaf 0,0497 gr. Na_2SO_4.

	Funnet:	Beräknadt:
Na	6,79	6,83
H_2O	21,50	21,40.

Silfversaltet bildar små, tämligen lösliga, diamantglänsande kristaller. Saltet är vattenfritt.

Kalciumsaltet — $(C_{10}H_6ClSO_3)_2Ca + H_2O$ — bildar fettglänsande små kristallfjäll.

0,35 gr. förlorade vid 150° 0,0119 gr. vatten och gaf 0,088 gr. $CaSO_4$.

	Funnet:	Beräknadt:
Ca	7,39	7,39
H_2O	3,33	3,40.

Bariumsaltet är mycket svårlösligt och bildar små, tunna kristallfjäll.

Etyleter af 1-2-klorsulfonsyra

$C_{10}H_6ClSO_3C_2H_5$.

Etern erhölls af etyljodid och silfversaltet. Den kristalliserar ur alkohol i fina, färglösa kristallnålar, lätt lösliga i kokande alkohol, svårlösliga i kall alkohol. Smältpunkt 104°.

0,2113 gr. gaf 0,0811 gr. H_2O och 0,4141 gr. CO_2.

	Funnet:	Beräknadt:
C	53,43	53,25
H	4,26	4,07.

Amid till 1-2-klorsulfonsyra

$C_{10}H_6ClSO_2NH_2$.

Amiden erhölls i form af ett hvitt, af mycket små kristallnålar sammansatt pulver, när en lösning af kloriden i eteralkohol blandades med koncentrerad ammoniak. Amiden är mycket svårlöslig i kokande alkohol och smälter först öfver 250°.

0,23 gr. gaf 11,8 kubc. kväfgas mätt öfver kalilut vid temp. 17°,5 och bar. 766 m.m.

	Funnet:	Beräknadt:
N	6,10	5,80.

1-2-Diklornaftalin

$C_{10}H_6Cl_2$.

Diazosulfonsyran öfverfördes genom inverkan af klorvätesyra till motsvarande klorsulfonsyra, hvars kaliumsalt destillerades

med öfverskott af fosforpentaklorid. Genom destillatets behandling med vatten erhölls en olja, hvilken destillerades med vattenånga. Dervid erhölls en färglös olja, som småningom stelnade. Efter omkristalliseringar ur alkohol erhöllos stora, rhombiska taflor af 1-2-diklornaftalin med smältpunkten 34°.

0,1895 gr. gaf 0,2770 gr. AgCl.

	Funnet:	Beräknadt:
Cl	36,16	35,84.

Häraf och emedan syrans salter vid upphettning afge α-naftylamin framgår, att amidosulfonsyran är

NH_2

SO_3H.

1-2-Oxisulfonsyra

$C_{10}H_6(OH)SO_3H$.

Om man i kokande vatten i små portioner inlägger diazosulfonsyran, utvecklas kväfgas, och man erhåller en mörkblå vätska, som vid afdunstning afsätter ett blått azofärgämne. Om man deremot använder utspädd svafvelsyra i stället för vatten, minskas färgämnebildningen högst betydligt. Den svafvelsyrehaltiga lösningen neutraliseras med baryt och filtreras kokande het, hvarefter under afsvalningen gulfärgadt svårlösligt, antagligen basiskt bariumsalt, afsätter sig. Om man till bariumsaltets varma lösning tillsätter svafvelsyra till dess lösningens gula färg öfvergår till blå, utfälles med bariumsulfat en mängd blått färgämne. Den filtrerade lösningen afsatte vid afdunstning bariumsalt af oxisulfonsyran i mörkblåa, kristalliniska massor, hvilka jag icke kunde befria från färgämne. Saltet sönderdelades derför fullständigt med svafvelsyra, och lösningen neutraliserades med blykarbonat. Då blysaltet äfven var starkt färgadt, löstes det och sönderdelades med svafvelväte, hvarpå blysalt ånyo fram-

ställdes. Det var ännu färgadt, hvarför försöktes att med blodlutkol affärga saltets lösning. Derefter erhölls vid afdunstning ett föga färgadt blysalt. Sönderdelas blysaltet med utspädd svafvelsyra, erhåller man vid afsvalning af den hett filtrerade vätskan oxisulfonsyran i form af mikroskopiska, nästan färglösa taflor, som äro tämligen lättlösliga i kokande vatten, men någorlunda svårlösliga i kallt vatten. I utspädd svafvelsyra är syran mycket svårlöslig. Ur en kokande het och mättad lösning afsätter sig syran i tunna, små rhombiska taflor. Syran är ganska beständig; dess lösningar afgifva vid afdunstning blott spår af naftol, och salterna sönderdelas ej vid kokning i sulfat och naftol. Vid upphettning hade den ännu icke vid 250° smält.

0,1448 gr. mellan papper pressad syra förändrades ej vid upphettning till 100° och gaf 0,1535 gr. $BaSO_4$.

	Funnet:	Beräknadt:
S	14,56	14,28.

Syrans lösning färgas af järnklorid i första ögonblicket indigoblå, men färgen öfvergår småningom till smutsigt röd. Med diazonaftionsyra och natron ger syran ett intensivt, fuksinrödt azofärgämne, som genom tillsats af syror öfvergår i korallrödt. Med 1-6-naftalindiazosulfonsyra bildas ett praktfullt, rödt färgämne, som af syror förändras till oklart brunt. Paradiazobenzolsulfonsyra ger ett korallrödt färgämne, och 1-2-diazonaftalinsulfonsyra ett orangegult färgämne, som af syror blir brungult.

Natriumsaltet är tämligen lättlösligt och bildar glimmerlika fjäll.

Blysaltet — $(C_{19}H_6 . OH . SO_3)_2Pb + H_2O$ — erhålles, om syran mättas med blykarbonat, samt afsätter sig under lösningens afdunstning i lindrig värme i form af fettglänsande skorpor på vätskans yta. Saltet är ganska svårlösligt både i varmt och kallt vatten.

0,8088 gr. förlorade vid 150° 0,0229 gr. och gaf 0,361 gr. $PbSO_4$.

	Funnet:	Beräknadt:
Pb	30,50	30,85
H_2O	2,83	2,68.

Kalciumsaltet — $(C_{10}H_6OHSO_3)_2Ca(+H_2O?)$ — liknar blysaltet och är likaledes svårlösligt. Väl utbildade kristaller erhöllos icke, utan endast skorplika gyttringar af tätt hoppackade nålar. Saltet förlorade vid 150° 2,54 procent, men en mol. vatten motsvarar 3,57 procent, hvarför det är osäkert huruvida vigtsförlusten utgjordes af kristallvatten eller mekaniskt inneslutet vatten.

0,4838 gr. torkadt salt gaf 0,1317 gr. $CaSO_4$.

	Funnet:	Beräknadt:
Ca	8,01	8,23.

Bariumsaltet — $(C_{10}H_6 . OH . SO_3)_2Ba + 1^1/_2H_2O$ — är svårlösligt både i kallt och varmt vatten och bildar halfsferiska aggregat af tätt packade nålar.

0,8514 gr. mellan papper prässadt salt förlorade vid 150° 0,0368 gr. och gaf 0,3225 gr. $BaSO_4$.

0,8725 gr. förlorade vid torkning 0,0385 gr. och gaf 0,3304 gr. $BaSO_4$.

	Funnet:		Beräknadt:
Ba	22,27	22,27	22,46
H_2O	4,32	4,41	4,42.

1-2-Oxisulfonsyran synes icke hafva blifvit förut framställd. Den af SCHÆFFER af svafvelsyra och α-naftol erhållna syran[1]) ger helt och hållet olika bly- och kalciumsalter samt anses af REVERDIN och NOELTING vara en 1-4-syra. Enligt CLAUS och KNYRIM[2]) bildas vid inverkan af svafvelsyra på α-naftol i ättiksyrelösning under 75° en oxisulfonsyra, som antagits vara 1-2-syran.[3]) Emellertid förefinnas betydande olikheter mellan denna syra och den af mig erhållna. Syran beskrifves vara deliqvescent, smälta vid 90° och skall med fosforpentaklorid gifva under afspjelkning af sulfongruppen diklornaftol, som med mera

---

[1]) Ann. d. Ch. u. Pharm. 152, p. 293.

[2]) Ber. d. D. Ch. Ges. XVIII, p. 2924.

[3]) Se REVERDIN, NOELTING: Sur la constitution de la Naphtaline (1888) Tab. 7.

fosforklorid ger vid 90° smältande triklornaftalin. Dessutom beskrifves syran såväl som dess salter vara mycket obeständig och vid afdunstning sönderdelas i naftol och svafvelsyra eller sulfat. Jag kan icke identifiera den af mig framstälda syran med den af CLAUS och KNYRIM beskrifna, hvilken måhända varit en sur svafvelsyreeter af α-naftol.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1891. N:o 8.
Stockholm.

Om ω-isonitroso-acetofenons (benzoylformoxims) konfiguration.[1]

Af H. G. Söderbaum.

[Meddeladt den 14 Oktober 1891 genom P. T. Cleve.]

På grund af det nära förhållande, i hvilket benzaldehyd och benzoylformaldehyd stå till hvarandra, var det tänkbart, att äfven den senare aldehydens (mon-)oxim, den sedan några år tillbaka[2]) bekanta *benzoylformoximen* (= ω-isonitrosoacetofenon), skulle kunna förete liknande isomeriförhållanden som benzaldoximen. I öfverensstämmelse med den Hantzsch-Wernerska teorien[3]) vore nämligen äfven här tvänne geometriska isomerer möjliga:

$C_6H_5 . CO . C . H$ ‖ $HO . N$	$C_6H_5 . CO . C . H$ ‖ $N . OH$
α-benzoylformoxim.	β-benzoylformoxim.

Med tillgodogörande af den af Hantzsch nyligen utarbetade metoden för bestämmande af atomernas geometriska anordning i stereokemiskt isomera oximer såväl som i asymmetriska oximer utan isomeri[4]) underkastades nu ifrågavarande förening en närmare pröfning i detta afseende. Denna ledde så till vida icke till det åsyftade målet, som trots mångfaldigt varierade försöksvilkor städse blott en och samma oxim kunde erhållas, nämligen den, hvilken motsvarar β-konfigurationen. Emellertid visade det sig

[1]) Föreliggande undersökning är utförd på professor A. Hantzsch's laboratorium vid Polyteknikum i Zürich.

[2]) Claisen, Ber. d. deutsch. chem. Ges. XX, 656.

[3]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. XXIII, 11.

[4]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. XXIV, 13, 31.

samtidigt, att just denna oxim i flera afseenden företer vissa anmärkningsvärda afvikelser från öfriga hittills kända oximer, afvikelser, som tillika häntyda på den stereoisomera α-oximens om ock efemära existens.

Dessutom torde det icke lida något tvifvel, att α-konfigurationen faktiskt föreligger i benzoylformoximens tills dato enda bekanta acetylderivat.

Inverkan af ättiksyreanhydrid på benzoylformoxim.

Såsom redan CLAISEN och MANASSE[1]) angifvit, sönderfaller ω-isonitrosoacetofenon glatt i benzoylcyanid och vatten, ifall man under några timmar *uppvärmer* densamma på vattenbad tillsammans med ättiksyreanhydrid. Denna ättiksyreanhydridens vattenberöfvande verkan gör sig emellertid äfven gällande *vid vanlig temperatur* och det så energiskt, att det, trots flerfaldiga under olika betingelser anstälda försök, öfverhufvudtaget aldrig lyckades att genom inverkan af ättiksyreanhydrid på isonitrosoacetofenon framställa ett acetylderivat af denna senare.

Om oximen löses i ett öfverskott af kall ättiksyreanhydrid, och lösningen afdunstas i vakuum öfver kali, så erhålles en färglös återstod, hvilken efter någon tid frivilligt, eller ännu hastigare vid rifning med en glasstaf, stelnar till vackra, tafvelformiga kristaller. Dessas smältpunkt (34°) och öfriga egenskaper ådagalägga otvetydigt, att *benzoylcyanid* föreligger.

Äfven om oximens lösning i ättiksyreanhydrid utan föregående afdunstning omedelbart skakas med kallt vatten, afskiljes den nyssnämda, snart stelnande cyaniden af smältpunkten 34°. Vattenlösningen innehåller jämte ättiksyra blott spår af en aromatisk substans; reaktionen förlöper alltså synnerligen glatt.

Om slutligen den sorgfälligt renade oximen — under noggrannt iakttagande af de af HANTZSCH för framställningen af

---

[1]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. XX, 2194.

labila β-acetylaldoximer angifna försigtighetsmåtten[1]) -- löses i minsta möjliga mängd ättiksyreanhydrid under lindrig uppvärmning och därpå omedelbart afkyles med snö, så stelnar visserligen den trögflytande lösningen vid rifning med en glasstaf till en tjock kristallgröt; men de på porös lera från moderluten utprässade kristallerna visade sig genom sin smältpunkt såväl som genom sina öfriga egenskaper såsom oförändrad oxim, något som för öfrigt yttermera bekräftades genom en kväfvebestämning:

	Ber. för $C_8H_7NO_2$	Funnet:
N	9,39	9,46 %.

Om lösningen af benzoylformoxim i ättiksyreanhydrid under eljes oförändrade försöksvilkor upphettas kort tid, så uppstå visserligen allt efter upphettningens olika varaktighet större eller mindre mängder benzoylcyanid, men något acetylderivat kunde i intet fall isoleras eller ens iakttagas. Detta acetylderivat måste alltså spontant sönderfalla i ättiksyra och benzoylcyanid samt följaktligen motsvara β-konfigurationen:

$$\begin{array}{l} C_6H_5CO\,.\,C\,.\,H \\ \qquad\quad \| \\ \qquad\quad N.OCOCH_3 \end{array} = \begin{array}{l} C_6H_5CO\,.\,C \\ \qquad\quad ||| \\ \qquad\quad N \end{array} + \begin{array}{l} H \\ | \\ OCOCH_3\,. \end{array}$$

Inverkan af acetylklorid.

Helt annorlunda förhåller sig isonitrosoacetofenon gent emot acetylklorid. Om den fint pulveriserade oximen i köld skakas med ett öfverskott af acetylklorid, så erhålles till en början en klar lösning af rödgul färg. Snart afskiljes emellertid en riklig mängd gulhvita kristaller, hvarigenom vätskan inom kort stelnar under lindrig värmeutveckling. Genom skyndsam utprässning på porös lera erhålles ett fullkomligt hvitt kristallmjöl, som smälter oskarpt och under svag gasutveckling vid cirka 57°. Kroppen är *klorhaltig*, löser sig utan svårighet i eter och kloroform äfvensom i het benzol och gasolja, men kan icke omkri-

[1]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. XXIV, 21.

stalliseras utan sönderdelning. I exsickator öfver svafvelsyra och ännu hastigare i luften aftar den i vigt under förlust af klorväte, antar därvid gulaktig färg och smetig konsistens och flyter så småningom sönder till en gul vätska. Denna klorhaltiga substans, som redan CLAISEN och MANASSE iakttogo, ehuru de höllo densamma för den egentliga acetylföreningen, eger den empiriska sammansättningen $C_{10}H_{10}NO_3Cl$:

	Beräknadt för $C_{10}H_{10}NO_3Cl$:	Funnet: I.	II.	
C	52,77	52,47	—	%
H	4,40	4,62	—	»
Cl	15,56	—	16,51	»

och kan antingen uppfattas såsom ett *klorvätesyradt salt af oximacetatet:*

$$C_6H_5CO \,.\, CH : NO \,.\, COCH_3 \,.\, HCl\,,$$

eller ock såsom

$$C_6H_5CCl(OH) \,.\, CH : NO \,.\, COCH_3$$

d. v. s. som en klorid, motsvarande det nedan omtalade hydratet af samma oximacetat.

Denna klorväteförening sönderdelas af vatten redan vid vanlig temperatur. Man öfvergjuter lämpligen den nyss beredda, väl utprässade produkten med en liten kvantitet vatten, hvari den vid omröring till största delen löser sig. Snart afskiljas fina, hopfiltade nålar, som fylla hela vätskan. Den så erhållna kroppen är fri från saltsyra och bildar efter omkristallisering ur kloroform hvita, glänsande nålar, som smälta vid 131°. Den är tämligen lättlöslig i alkohol, kloroform och kokande vatten, däremot svårlöslig i eter och benzol. Ur en lösning af vatten eller utspädd alkohol kan den omkristalliseras i oförändradt tillstånd och anskjuter därvid långsamt i vackra, färglösa taflor. En sådan lösning antar vid tillsats af ett par droppar järnklorid en intensivt körsbärsröd färg.

De vid analysen funna värdena stämma med den empiriska formeln $C_{10}H_{11}NO_4$, som motsvarar ett *hydrat af benzoylformoximacetatet.*

	Beräknadt för $C_{10}H_{11}NO_4$:	Funnet: I.	II.	III.	
C	57,43	57,15	—	—	%
H	5,26	5,30	—	—	»
N	6,70	—	7,14	6,75	»

Vid uppvärmning med utspädd saltsyra saponifieras föreningen synnerligen lätt till oförändrad isonitrosoacetofenon af smältpunkten 127°. Den måste följaktligen i sjelfva verket uppfattas såsom ett äkta acetylderivat af isonitrosoacetofenon, hvadan dess konstitution rätteligen torde böra uttryckas genom hydratformeln

$$C_6H_5 . C(OH)_2 . CH : NO . COCH_3 .$$

Den likaledes tänkbara formeln

$$C_6H_5 . CH(OH) . C\begin{cases} OH \\ NO . COCH_3 \end{cases}$$

(mandelhydroxamsyra) är osannolik af det skäl, att en så sammansatt förening vid uppvärmning med syror icke borde öfvergå till den ursprungliga oximen utan fastmera till mandelsyra.

Äfven genom upplösning i koncentrerad svafvelsyra och därpå följande utspädning med isvatten öfverföres acetylföreningen i den ursprungliga benzoylformoximen. Vid uppvärmning med koncentrerad saltsyra inträder däremot en djupare sönderdelning. Bland sönderdelningsprodukterna påvisades isynnerhet benzoesyra i större myckenhet. Om den ursprungliga inverkningsprodukten af acetylklorid på oximen försigtigt införes i vatten utan att först genom prässning befrias från öfverskott af acetylklorid, så uppstår en klar lösning, ur hvilken så småningom gulröda, aflånga taflor eller prismer anskjuta. Trots sitt afvikande utseende karaktäriseras dessa genom sin smältpunkt, 127°, och alla öfriga egenskaper såsom varande identiska med den kända isonitrosoketonen.

Öfverhufvud taget har det aldrig lyckats att genom saponifiering af acetylföreningen erhålla en annan oxim än den redan bekanta. Det äfvenledes därhän syftande försöket att *saponifiera*

acetylföreningen i alkalisk lösning ledde, såsom af det efterföljande framgår, till alldeles oväntade resultat.

Af utspädd *natronlut* löses acetylföreningen med ljusgul färg redan vid vanlig temperatur. Äfven om lösningen omedelbart därpå surgöres, uppstår blott en obetydlig fällning, hvilken dels består af smetiga biprodukter, dels, och detta i öfvervägande mängd, af en gul, ketonartad kropp, hvars närmare beskrifning meddelas i det följande. Den filtrerade lösningen extraheras med eter, som vid afdunstning på vattenbad kvarlemnar en gulhvit kristallmassa. Denna renas genom omkristallisering ur benzol. Man erhåller så en, märkligt nog, *kväfvefri* förening, hvilken kristalliserar i hvita blad, smälter vid 118°, är lättlöslig i vatten, alkohol och eter, utmärkes af sura egenskaper och vid torr destillation lemnar benzaldehyd såsom hufvudprodukt, korteligen, i hvarje afseende visar sig vara identisk med *mandelsyran*, något som ock bekräftades genom en förbränning:

	Beräknadt för $C_6H_5CH(OH) . COOH$:	Funnet:
C	63,16	63,56 %
H	5,26	5,36 »

Antagligen har acetylderivatet i första hand saponifierats till benzoylformoxim, som under upptagande af vatten sönderdelats i hydroxylamin och benzoylformaldehyd:

$$C_6H_5 . CO . CH : NOH + H_2O = C_6H_5 . CO . CHO + NH_2 . OH ,$$

hvarpå slutligen denna senare i bildningsögonblicket redan vid vanlig temperatur upptagit ytterligare en molekyl vatten och öfvergått till mandelsyra:

$$C_6H_5 . CO . CHO + H_2O = C_6H_5 . CH(OH) . COOH .$$

Denna förklaring vinner bekräftelse af den omständigheten, att enligt H. Müllers och v. Pechmanns uppgift[1]) den färdigbildade benzoylformaldehyden genom kokning med alkalier likaledes kan öfverföras till mandelsyra. Särdeles anmärkningsvärd

---

[1]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. XX, 2904; XXII, 2556.

är i hvarje fall den stora lätthet, hvarmed benzoylformoximens acetat afspaltar sitt kväfve i form af hydroxylamin, medan motsvarande acetat af benzaldoximerna under alldeles samma försöksvilkor helt enkelt saponifieras. Härom mera i det följande.

Äfven inverkan af *sodalösning* på benzoylformoximens acetylförening förlöper på ett alldeles abnormt sätt. På grund af alla hittills gjorda iakttagelser skulle man vänta, att acetylföreningen borde, i fall den vore ett α-derivat, helt enkelt saponifieras till motsvarande oxim; i fall den åter vore ett β-derivat, däremot spaltas i ättiksyra och benzoylcyanid. Men intetdera fallet eger rum. — Acetylföreningen af isonitrosoacetofenon löses med lätthet af utspädd sodalut till en gulröd vätska. Om den (eventuelt filtrerade) lösningen försigtigt neutraliseras med svafvelsyra, så uppstår en ymnig fällning af intensivt gul färg. Filtratet från densamma reducerar FEHLINGS lösning och innehåller dessutom en ringa kvantitet mandelsyra, som kan isoleras genom utskakning med eter. Den utfälda gula föreningen tvättades med kallt vatten, torkades och erhölls vid kristallisering ur kokande benzol i form af gula, mikroskopiska nålar, som vid omkr. 170° smälte till en mörkröd vätska. Upprepad omkristallisering syntes ej vara egnad att göra smältpunkten skarpare. Kroppen är så godt som olöslig i vatten, tämligen svårlöslig i het benzol, lättlöslig i alkohol och eter. Ur en alkohollösning kristalliserar den långsamt i form af små sexsidiga, snedt afskurna prismer. Äfven denna sönderdelningsprodukt af benzoylformoximen är märkvärdigt nog *kväfvefri*. Af analysen framgår dess isomeri med benzoylformaldehyden:

	Beräknadt för $C_8H_6O_2$:	Funnet:
C	71,64	71,14 %
H	4,48	4,47 »

En efter RAOULTS kryoskopiska metod med tillhjelp af BECKMANNS apparat utförd molekylarvigtsbestämning ådagalägger emellertid, att föreningen, såsom man redan af dess egenskaper kunde förmoda, i sjelfva verket besitter en dubbelt så hög molekylarvigt. Såsom lösningsmedel användes isättika.

Molekylarvigt

Ber. för $C_{16}H_{12}O_4$:	Funnet:
268	261.

Dessa sakförhållanden gifva vid handen, att föreningen uppkommit genom kondensation af två molekyler af den i första hand genom afspaltning af hydroxylamin otvifvelaktigt bildade benzoylformaldehyden, på alldeles samma sätt som bittermandelolja och andra aromatiska aldehyder låta omvandla sig till de polymera benzoïnerna:

$$C_6H_5 . CO . CHO + HCO . CO . C_6H_5 =$$
$$= C_6H_5 . CO . CH(OH) . CO . CO . C_6H_5 .$$

I öfverensstämmelse härmed torde ifrågavarande gula substans vara att uppfatta såsom en *benzoïn af fenylglyoxal*, hvilken i egenskap af en öppen triketonalkohol, som genom oxidation lätt bör kunna öfverföras till en tetraketon, erbjuder ett visst intresse. Dess närmare undersökning förbehålles.

Ofvan meddelade fakta tillstädja att draga följande slutledningar rörande de föreliggande föreningarnes konfiguration.

På grund af den lätthet, hvarmed den enda hittills kända, fria benzoylformoximen öfverföres i benzoylcyanid,[1]) måste densamma, såsom redan ofvan blifvit anfördt, ega den konfiguration, som utmärkes af ett korresponderande läge mellan aldehydvätet och oximhydroxylen; den är m. a. o. i likhet med de egentliga feta aldoximerna, en β- eller nitril-oxim. Acetatet af denna oxim är emellertid på grund af spontan spaltning i ättiksyra och benzoylcyanid icke isolerbart eller åtminstone ytterst obeständigt.

I α-serien är förhållandet alldeles omvändt. Den af β-oximen genom inverkan af acetylklorid erhållna, i och för sig ganska

---

[1]) Att oximen äfven vid längre tids uppvärmning med utspädd natronlut först öfverföres till benzoylcyanid och vatten, därefter genom dessa produkters omsättning ger benzoësyra och cyanväte, framgår för öfrigt redan af CLAISEN's och MANASSE's uppgifter. Jfr. Ber. d. deutsch. chem. Ges. XX, 2194.

beständiga acetylföreningen kan just på grund af denna sin beständighet knappast motsvara β-konfigurationen; den måste fastmera uppfattas såsom ett genom acetylkloridens omlagrande verkan uppkommet acetat af α-oximen i enlighet med formeln:

$$\begin{array}{l} C_6H_5 \,.\, CO \,.\, CH \\ \qquad\qquad\quad \| \\ CH_3 \,.\, CO \,.\, ON \,. \end{array}$$

Denna uppfattning ansluter sig för öfrigt på det närmaste till det bekanta sakförhållandet, att β-aldoximer genom inverkan af öfverskjutande acetylklorid ge upphof till acetat af α-serien, eller att i hvarje fall de i första hand bildade β-acetaten af den samtidigt frigjorda saltsyran omlagras till α-acetat.[1])

Till samma slutsats beträffande isonitrosoacetofenonacetatets konfiguration kommer man äfven på en annan väg. Som bekant sönderfalla β-aldoximernas acetylderivat genom inverkan af alkalikarbonat synnerligen lätt i kolsyra, ättiksyra och nitril; ja, de äro i detta afseende till och med ännu känsligare än de fria oximerna.[2]) Då nu redan den fria benzoylformoximen under liknande förhållanden är särdeles benägen för nitrilbildning, så vore det oförklarligt, hvarför dess acetylderivat, om äfven detta uppfattas som en β-förening, icke också hemfaller åt en liknande sönderdelning, utan fastmera spaltas på ett alldeles afvikande sätt. Men om nu å ena sidan ifrågavarande acetylförening genom inverkan af natron eller soda icke, såsom alla öfriga kända acetat af α-oximer, ger den fria α-oximen, utan i stället kväfvefria omvandlingsprodukter af densamma, och om å andra sidan den en gång isolerade β-benzoylformoximen under samma betingelser är jämförelsevis beständig, så kunna dessa egenartade förhållanden blott förklaras så, att af α-acetatet i första hand verkligen uppstår motsvarande α-oxim, men att denna i alkalisk lösning är så obeständig, att den frivilligt sönderdelas i hydroxylamin och benzoylformaldehyd resp. dennas omvandlingsprodukter.

---

[1]) Jfr HANTZSCH, Ber. d. deutsch. chem. Ges. XXIV, 16.

[2]) l. c. 45.

Af syror återigen omvandlas den momentant uti β-oxim på vanligt sätt, hvarför också alla försök att genom inverkan af svafvelsyra, saltsyra o. d. saponifiera α-acetatet städse blott ledde till β-benzoylformoximen eller dess sönderdelningsprodukter.

Korteligen, af det ofvan anförda framgår, att *af de båda tänkbara oximerna af benzoylformaldehyden blott β-formen, af de båda acetaten däremot blott α-formen är beständig. α-Oximen sönderfaller spontant i hydroxylamin och aldehyd; likaledes β-acetatet i ättiksyra och nitril.*

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1891. N:o 8.
Stockholm.

Meddelanden från Stockholms Högskola. N:o 121.

Sur le logarithme intégral et la fonction $f(x)$ de Riemann.

Par E. Phragmén.

[Présenté le 14 octobre 1891 par M. Mittag-Leffler.]

Depuis la publication du célèbre mémoire *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (Riemann's Werke, p. 136), on a beaucoup discuté sur les points que Riemann y avait laissés obscurs. Mais les difficultés qu'on rencontre dans ces recherches sont immenses, à ce qu'il semble. Du moins, si on fait abstraction de la démonstration annoncée par M. Stieltjes du théorème fondamental que les racines de l'équation $\xi(t) = 0$ sont toutes réelles,[1]) ce cont très peu des questions soulevées par le mémoire de Riemann qu'on a réussi à éclaircir jusqu' à présent. En particulier, on n'a pas encore publié de démonstration rigoureuse du fait important, s'il y a là un fait, que la différence du logarithme intégral et de la fonction $f(x)$ de Riemann finit par s'annuler relativement à la fonction $f(x)$ elle-même.

Peut-être cette démonstration ne se fera-t-elle pas attendre trop longtemps, l'attention des géomètres ayant été dirigée de ce côté par les questions de concours proposées par deux illustres Académies.[2]) Quoi qu'il en sera, voici en attendant un résultat

---

[1]) Comptes rendus, t. 101, p. 153.

[2]) L'Académie des sciences de l'Institut de France a formulé en ces termes le sujet du grand prix des sciences mathématiques à décerner en 1891: »détermination du nombre des nombres premiers inférieurs à une quantité donnée». La même année, l'Académie des sciences de Copenhague se propose de couronner de sa médaille d'or une monographie de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann qui parviendrait à triompher des difficultés auxquelles donne naissance, aujourd'hui, l'application de cette fonction à la théorie des nombres.

moins précis, de peu d'importance peut-être, mais qui me paraît assez curieux.

Soit, comme chez RIEMANN, $f(x)$ le nombre des premiers inférieurs à x, augmenté du demi-nombre des carrés de premiers, de la troisième partie des cubes de premiers etc. au-dessous de la même limite, et soit Li x le logarithme intégral, c'est-à-dire

$$\mathrm{Li}\, x = \text{valeur principale de} \int_0^x \frac{dx}{\log x}$$

$$= \lim_{\varepsilon=0} \left[\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\log x} + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{dx}{\log x} \right].$$

Ceci posé, *il n'y a pas de limite au delà de laquelle la différence*

$$f(x) - (\mathrm{Li}\, x - \log 2)$$

ne change plus de signe.

C'est, comme on voit, un résultat un peu plus précis que celui qu'on doit à M. TCHEBYCHEFF.[1])

Ce théorème est une conséquence immédiate d'une proposition plus générale dont voici l'énoncé.

Soit $\varphi(x)$ une fonction réelle de la variable réelle x et α une constante positive non inférieure à l'unité, et supposons que l'intégrale

$$\int_\alpha^\infty \varphi(x) x^{-s-1} dx$$

soit convergente pour les valeurs de s dont la partie réelle est supérieure à l'unité, et qu'elle soit égale, dans le voisinage de $s = 1$, à une série procédant suivant les puissances positives de $s - 1$ et convergente dans un cercle dont le rayon est plus grand que l'unité; si x_0 et δ sont deux quantités positives choisies à volonté, aucune des deux inégalités

$$\varphi(x) > \delta\,, \quad \varphi(x) < -\delta$$

ne pourra subsister pour toutes les valeurs de x supérieures à x_0.

[1]) *Sur la fonction qui détermine la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée,* Mémoires des savants étrangers, S:t Pétersbourg 1851, et Journal de Liouville, t. 17, 1852.

Si l'on sait de plus que $\varphi(x)$ *a une suite infinie de points de discontinuité* x_ν, *tels que,* m_ν *désignant une valeur positive plus petite que toutes les valeurs de l'expression*

$$\varphi(x_\nu + h) - \varphi(x_\nu - 0)$$

pour $0 < h < h_\nu$, *ces quantités* m_ν *et* h_ν *peuvent être choisies de sorte que*

$$x_\nu + h_\nu \leqq x_{\nu+1}$$

et que la série

(1) $$\sum \frac{x_\nu + h_\nu}{m_\nu h_\nu}$$

ait une valeur infinie;

on pourra préciser encore et dire que $\varphi(x)$ *changera de signe une infinité de fois au-dessus de toute limite finie.*

En effet, puisque l'intégrale

$$\int_\alpha^{x_0} \varphi(x) x^{-s-1} dx$$

représente une fonction de s régulière dans tout le plan, l'intégrale

$$\int_{x_0}^\infty \varphi(x) x^{-s-1} dx$$

pourra, aussi bien que l'intégrale

$$\int_\alpha^\infty \varphi(x) x^{-s-1} dx\,,$$

se développer dans une série procédant suivant les puissances croissantes de $(s - 1)$ et convergente dans un cercle à rayon plus grand que l'unité. Soit

$$\Sigma c_\nu (s - 1)^\nu$$

ce développement, l'égalité

$$\int_{x_0}^\infty \varphi(x) x^{-s-1} dx = \Sigma\, c_\nu (s - 1)^\nu$$

subsistera pour toutes les valeurs de s à l'intérieur du dit cercle et dont la partie réelle est supérieure à 1.

Comme $\varphi(x)$ ne change pas de signe sous le signe intégral, l'intégrale

$$\int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) x^{-s-1} dx$$

est uniformément convergente pour les valeurs de s dont la partie réelle est plus grande qu'une valeur quelconque supérieure à l'unité. Par conséquent on a le droit de différentier sous le signe intégral. Différentiant n fois par rapport à s, nous aurons donc

$$(-1)^n \int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) x^{-s-1} (\log x)^n dx = \underline{|n} \cdot c_n + \{s-1\},$$

$\{s-1\}$ désignant une quantité qui s'annule en même temps que $s-1$. Puisque $\varphi(x)$ et $\log x$ sont positifs, et que x^{-s-1} va toujours en croissant vers x^{-2} lorsque s décroît vers 1 (nous supposons $x_0 > 1$, ce qui est évidemment permis), on aura

$$\int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) x^{-2} (\log x)^n dx \geqq \underline{|n} |c_n|.$$

De l'autre côté on a toujours, G désignant une quantité finie et supérieure à x_0,

$$\int_{x_0}^{G} \varphi(x) x^{-s-1} (\log x)^n dx < \underline{|n} |c_n| + |\{s-1\}|,$$

par conséquent

$$\int_{x_0}^{G} \varphi(x) x^{-2} (\log x)^n dx = \lim_{s=1} \int_{x_0}^{G} \varphi(x) x^{-s-1} (\log x)^n dx \leqq \underline{|n} |c_n|.$$

Combinant ces deux résultats, on conclut que l'intégrale

$$\int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) x^{-2} (\log x)^n dx$$

converge et est égale à $\underline{|n} |c_n|$.

Tous les éléments étant positifs, on peut écrire

$$\sum |c_n| = \int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) x^{-2} \Sigma \frac{(\log x)^n}{\underline{|n}} dx = \int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) x^{-1} dx.$$

Or la série

$$\sum c_n(s-1)^n$$

ayant, par hypothèse, un rayon de convergence plus grand que l'unité, nous arrivons au résultat que l'intégrale

$$\int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) x^{-1} dx$$

a une valeur finie.

Il est évident, dès lors, que l'on ne pourrait avoir pour $x > x_0$

$$\varphi(x) > \delta .$$

Mais supposons seulement qu'on ait

$$\varphi(x) \geqq 0 ,$$

l'intégrale

$$\int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) x^{-1} dx$$

sera supérieure ou égale à

$$\sum \int_{x_\nu}^{x_\nu + h_\nu} \varphi(x) x^{-1} dx .$$

Or $\varphi(x_\nu + h)$ étant, par hypothèse, plus grand que

$$\varphi(x_\nu - 0) + m_\nu$$

pour $0 < h < h_\nu$, et $\varphi(x_\nu - 0)$ étant positif ou nul, on aura

$$\int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) x^{-1} dx > \sum m_\nu \int_{x_\nu}^{x_\nu + h_\nu} \frac{dx}{x} > \sum \frac{m_\nu h_\nu}{x_\nu + h_\nu} ,$$

somme qui est infinie d'après l'hypothèse. Nous sommes donc, encore cette fois, arrivés à une contradiction.

Pour appliquer ce théorème à la démonstration du résultat que nous avons indiqué au commencement, soit $f(x)$ la fonction de RIEMANN dont nous avons rappelé plus haut la signification. Elle peut être définie le plus simplement, en disant qu'elle est constante au voisinage de toute valeur de x à l'exception des

puissances de premiers, et que pour la valeur $x = p^\nu$, p étant un nombre premier, elle est discontinue de telle sorte que

$$f(p^\nu + 0) - f(p^\nu - 0) = \frac{1}{\nu}.$$

En partant de cette définition, on arrive immédiatement à la relation fondamentale de RIEMANN

$$(2) \qquad \frac{\log \zeta(s)}{s} = \int_1^\infty f(x) x^{-s-1} dx .$$

Nous rappelons succinctement la démonstration de cette formule. On a

$$\int_1^\infty f(x) x^{-s-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} f(n+0) \int_n^{n+1} x^{-s-1} dx =$$

$$= \frac{1}{s} \sum_{n=1}^{\infty} f(n+0) (n^{-s-1} - (n+1)^{-s-1}) =$$

$$= \frac{1}{s} \sum_{n=1}^{\infty} [f(n+0) - f(n-0)] n^{-s} =$$

$$= \frac{1}{s} \sum_{\nu, p} \frac{1}{\nu} \frac{1}{p^{\nu s}},$$

où ν parcourt la suite des nombres entiers $1, 2, 3, \ldots$ et p la suite des nombres premiers $2, 3, 5, \ldots$

Or on a, d'après Euler,

$$\prod \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)} = \sum \frac{1}{n^s}$$

p parcourant toujours la suite des nombres premiers et n la suite de tous les nombres entiers positifs. La fonction $\zeta(s)$ étant définie, pour $\Re(s) > 1$, par l'égalité

$$\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s},$$

nous sommes donc arrivés à la formule (1).

Nous citerons encore quelques résultats relatifs à cette fonction $\zeta(s)$.

RIEMANN a démontré le premier que $\zeta(s)$ peut être définie comme une fonction analytique régulière dans tout le plan sauf au point $s = 1$ où elle a un infini simple au résidu 1. Ce même résultat a été obtenu par d'autres moyens par M. HERMITE (Comptes rendus, t. 101) et par M. JENSEN (Comptes rendus t. 107). M. JENSEN s'est occupé du calcul des coefficients du développement

$$(s-1)\zeta(s) - 1 = \sum c_\nu (s-1)^\nu$$

et a montré, en particulier, que le coefficient de $(s-1)$ est la constante connue sous le nom d'Euler ou de Mascheroni, résultat dont nous nous servirons plus loin. Citons encore, d'après RIEMANN, la propriété remarquable que

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$$

ne change pas de valeur par la substitution de $1-s$ au lieu de s, et la représentation de cette fonction par l'expression

$$-\frac{1}{s(1-s)} + \int_1^\infty \psi(x) x^{-1}\left(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}}\right)dx,$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x},$$

où la dite propriété se trouve mise en évidence.

Pour faire l'application du théorème démontré plus haut, remarquons qu'il suit de cette représentation de la fonction $\zeta(s)$ qu'elle n'a pas de zéro, ni à l'intérieur, ni sur le contour du cercle

$$|s-1| = 1.$$

En effet, pour $|s-1| \leqq 1$, $x > 1$, on a

$$\left|x^{\frac{s}{2}}\right| \leqq x, \quad \left|x^{\frac{1-s}{2}}\right| \leqq x$$

de sorte que la valeur absolue de l'expression

$$s(1-s)\int_1^\infty \psi(x)x^{-1}\left(x^{\frac{s}{2}}+x^{\frac{1-s}{2}}\right)dx$$

est inférieure à

$$4\int_1^\infty \psi(x)dx < 0.06 .$$

Donc la fonction

$$s(1-s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$$

est différente de zéro pour les valeurs en question, et puisque

$$s(1-s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}} = 2(1-s)\Gamma\left(1+\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}$$

conserve une valeur finie, la même chose a lieu au sujet de la fonction $\zeta(s)$ elle-même. On pourrait de même démontrer que la fonction $\zeta(s)$ est différente de zéro à l'intérieur et sur le contour du cercle $|s-2|=2$, résultat dont nous ferons usage plus bas.

La fonction

$$\log(1-s)\zeta(s)$$

est donc régulière à l'intérieur et sur le contour du cercle $|s-1|=1$. Pour $s=0$ elle a la valeur $-\log 2$. Par conséquent, la fonction

$$\frac{\log\zeta(s)}{s}+\frac{\log(s-1)}{s}+\frac{\log 2}{s}$$

peut être développée dans une série procédant suivant les puissances positives de $s-1$ et convergente dans un cercle dont le rayon surpasse l'unité.

Or une intégration par parties nous donnera, pour $\alpha > 1$,

$$(3) \qquad \int_\alpha^\infty \operatorname{Li} x \cdot x^{-s-1}dx = \frac{\operatorname{Li}\alpha\cdot\alpha^{-s}}{s}+\frac{1}{s}\int_\alpha^\infty\frac{x^{-s}dx}{\log x}.$$

L'intégrale

$$\int_{\alpha}^{\infty} \frac{x^{-s}\,dx}{\log x}$$

donne, après quelques transformations élémentaires,

$$\int_{\alpha}^{\infty} \frac{x^{-s}\,dx}{\log x} = \int_{(s-1)\log\alpha}^{\infty} \frac{e^{-\xi}d\xi}{\xi} = -\log(s-1) - \int_{(s-1)\log\alpha}^{\log\alpha} \frac{1-e^{-\xi}}{\xi}\,d\xi + \int_{\log\alpha}^{\infty} \frac{e^{-\xi}d\xi}{\xi}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (3), on a

$$\int_{\alpha}^{\infty} \mathrm{Li}\,x\cdot x^{-s-1}dx = -\frac{\log(s-1)}{s} +$$

$$+\frac{1}{s}\left\{\mathrm{Li}\,\alpha\cdot\alpha^{-s} - \int_{(s-1)\log\alpha}^{\log\alpha} \frac{1-e^{-\xi}}{\xi}\,d\xi + \int_{\log\alpha}^{\infty} \frac{e^{-\xi}d\xi}{\xi}\right\}.$$

L'expression entre les crochets représente une fonction entière transcendante de s dont la valeur pour $s=0$ est zéro. En effet, on obtient pour cette valeur l'expression

$$\mathrm{Li}\,\alpha - \int_{-\log\alpha}^{\log\alpha} \frac{1-e^{-\xi}}{\xi}\,d\xi + \int_{\log\alpha}^{\infty} \frac{e^{-\xi}d\xi}{\xi},$$

ce qui est nul indépendamment de la valeur de α. Car on a, par définition,

$$\mathrm{Li}\,e^{u} = \text{v. p.}\int_{-\infty}^{u} \frac{e^{u}du}{u} = \text{v. p.}\int_{\infty}^{-u} \frac{e^{-u}du}{u}$$

$$= -\text{v. p.}\int_{-u}^{u} \frac{e^{-u}du}{u} - \int_{u}^{\infty} \frac{e^{-u}du}{u},$$

ce qui peut s'écrire, zéro étant la valeur principale de $\int_{-u}^{+u}\frac{du}{u}$,

$$\mathrm{Li}\,e^{u} = \int_{-u}^{+u} \frac{1-e^{-u}}{u}\,du - \int_{u}^{\infty} \frac{e^{-u}du}{u}.$$

On a par conséquent

$$(4)\qquad \int_\alpha^\infty \mathrm{Li}\, x\cdot x^{-s-1}dx = -\frac{\log(s-1)}{s} + \text{fonction entière en } s.$$

On obtient de même

$$(5)\qquad \int_\alpha^\infty \log 2\cdot x^{-s-1}dx = \log 2\cdot\frac{\alpha^{-s}}{s} = \frac{\log 2}{s} + \text{fonction entière en } s.$$

Il est donc démontré que l'intégrale

$$\int_\alpha^\infty (f(x) - \mathrm{Li}\, x + \log 2)x^{-s-1}dx$$

peut se développer dans une série procédant suivant les puissances positives de $(s-1)$ et convergente dans un cercle

$$|s-1| = \varepsilon, \quad \varepsilon > 1.$$

De plus, la fonction $f(x) - \mathrm{Li}\, x + \log 2 = \varphi(x)$ est discontinue pour $x = p$, p désignant un nombre premier, de telle sorte que

$$\varphi(p+0) - \varphi(p-0) = 1.$$

Pour $h < 1$, on a

$$\varphi(p+h) - \varphi(p+0) = \mathrm{Li}\, p - \mathrm{Li}\,(p+h) > -\frac{1}{\log p}.$$

Par conséquent

$$\varphi(p+h) - \varphi(p-0) > 1 - \frac{1}{\log p} > \frac{1}{2}$$

dès que $p > 7$. Prenant donc, dans l'expression (1),

$$x_\nu = p, \quad p > 7,$$
$$h_\nu = 1,$$

on pourra prendre

$$m_\nu = \frac{1}{2},$$

et on aura ce résultat que la série

$$\sum \frac{m_\nu h_\nu}{x_\nu + h_\nu} = \sum \frac{1}{2(p+1)}$$

a une valeur infinie.

Le théorème que nous avons énoncé à la page 600 se trouve donc rigoureusement démontré. Il est évident qu'on pourrait employer la même méthode pour démontrer une foule d'autres résultats du même genre.

Soit, p. ex., $\varphi(x)$ une fonction définie par ces conditions qu'elle sera constante entre deux puissances de premiers, et que lorsque x passe par une telle puissance p^ν, on aura

$$\varphi(p^\nu + 0) - \varphi(p^\nu - 0) = \log p.$$

Si $\psi(x)$ désigne la somme des logarithmes des nombres premiers inférieurs à x on aura

$$\varphi(x) = \psi(x) + \psi(x^{\frac{1}{2}}) + \psi(x^{\frac{1}{3}}) + \ldots .$$

On obtient tout de suite

$$\int_1^\infty \varphi(x) x^{-s-1} dx = \sum \varphi(n+0) \int_n^{n+1} x^{-s-1} dx = \sum \varphi(n+0) \frac{n^{-s} - (n+1)^{-s}}{s}$$

$$= \frac{1}{s} \sum (\varphi(n+0) - \varphi(n-0)) n^{-s} = \frac{1}{s} \sum \frac{\log p}{p^{\nu s}}$$

$$= -\frac{1}{s} \frac{d}{ds} \log \zeta(s)$$

$$= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \frac{d}{ds} \log (s-1)\zeta(s) ,$$

c'est à dire

$$(6) \qquad \int_1^\infty \varphi(x) x^{-s-1} dx = \frac{1}{s-1} - \frac{A}{s} + \mathfrak{P}(s-1) ,$$

le symbole $\mathfrak{P}(s-1)$ désignant une série de puissances convergente dans un cercle à rayon plus grand que l'unité, et A étant une constante dont nous écrirons plus bas la valeur.

Or on a

$$\int_1^\infty x \cdot x^{-s-1} dx = \int_1^\infty x^{-s} dx = \frac{1}{s-1}$$

$$\int_1^\infty A x^{-s-1} dx = \frac{A}{s} .$$

La constante A est facile à déterminer. On a

$$A = 1 + \left[\frac{d}{ds}\log(s-1)\zeta(s)\right]_{s=0} = \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}.$$

Or on a, d'après RIEMANN,

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\pi^{-\frac{1}{2}+s}\zeta(1-s)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{s}{2}\right)}\pi^{-\frac{1}{2}+s}s\zeta(1-s)$$

et, d'après M. JENSEN, comme nous l'avons rappelé plus haut,

(7) $$s\zeta(1-s) = -1 + Cs + \ldots$$

où C est la constante d'EULER. Différentiant et faisant $s = 0$, on a donc

$$\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = -\frac{1}{2}\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} + \log\pi - C$$

ou, puisqu'on a

$$\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = -C + 2\log 2,$$

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -C,$$

(8) $$\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = \log\frac{\pi}{2}.$$

On a donc démontré que la différence

$$\varphi(x) - \left(x - \log\frac{\pi}{2}\right)$$

ne peut maintenir le même signe depuis une limite quelconque jusqu'à l'infini.

M. GRAM donne, pour notre fonction $\varphi(x)$, la formule[1])

$$\varphi(x) = (x-1) + \lambda - \log(1-x^{-2}) - 2x^{\frac{1}{2}}\sum\frac{\frac{1}{2}\cos\alpha\log x + \alpha\sin\alpha\log x}{\frac{1}{4}+\alpha^2}$$

[1]) J. P. GRAM, *Undersögelser angaaende Mængden af Primtal under en given Grænse.* Écrits publiés par l'Académie royale des sciences de Copenhague, 1884.

et indique pour λ l'expression

$$\lambda = 2i\xi'\left(\frac{i}{2}\right) - \frac{1}{2}\log\pi - C.$$

Il est facile de s'assurer qu'on a

$$1 - \lambda = \log\frac{\pi}{2}$$

de sorte que les termes les plus essentiels de la formule de M. GRAM sont identiques aux nôtres.

On démontrerait de la même manière, en faisant

$$\varphi(p^\nu + 0) - \varphi(p^\nu - 0) = \frac{1}{p^\nu}$$

et en partant de l'identité

$$\int_1^\infty \varphi(x) x^{-s} dx = \frac{\log\zeta(s)}{s-1} \tag{9}$$

que la différence

$$\varphi(x) - (\log\log x + C)$$

change de signe une infinité de fois.

De même, si on définit $\psi(x)$ par les discontinuités

$$\psi(p^\nu + 0) - \psi(p^\nu - 0) = \frac{\log p}{p^\nu},$$

ce qui entraîne l'identité

$$\int_1^\infty \psi(x) x^{-s} dx = -\frac{\frac{d}{ds}\log\zeta(s)}{s-1}, \tag{10}$$

la même chose a lieu par rapport à la différence

$$\psi(x) - (\log x - C).$$

A l'égard de ces deux expressions, $\varphi(x) - \log\log x - C$ et $\psi(x) - \log x + C$, il y a lieu de rappeler un mémoire de M. MERTENS où il démontre que leur valeur est toujours finie.[1])

Comme dernière application, considérons deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ définies par les conditions suivantes. Si x est la

[1]) Journal de Crelle, t. 78, p. 46.

ν^e puissance d'un nombre premier, et de plus congru à 1 suivant le module 4, on aura

$$\varphi(x+0) - \varphi(x-0) = \frac{1}{\nu p^\nu},$$

et si

$$x = p^\nu \equiv 3, \ \mathrm{mod}\, 4,$$

on aura

$$\psi(x+0) - \psi(x-0) = \frac{1}{\nu p^\nu}.$$

Dans tout intervalle ne comprenant pas de ces valeurs particulières les deux fonctions auront une valeur constante.

On déduira sans peine

$$s\int_1^\infty \varphi(x)x^{-s-1}dx = \sum_{(p\equiv 1)} \frac{1}{p^s} + \frac{1}{2}\sum_{(p^2\equiv 1)} \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{3}\sum_{(p^3\equiv 1)} \frac{1}{p^{3s}} + \ldots$$

$$s\int_1^\infty \psi(x)x^{-s-1}dx = \sum_{(p\equiv 3)} \frac{1}{p^s} + \frac{1}{2}\sum_{(p^2\equiv 3)} \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{3}\sum_{(p^3\equiv 3)} \frac{1}{p^{3s}} + \ldots$$

Mettant

$$\text{(11)} \qquad \begin{aligned} L_1(s) &= \sum \frac{1}{n^s} \\ L_3(s) &= \sum \left(\frac{-1}{n}\right)\frac{1}{n^s} \end{aligned} \qquad (n = 1, 3, 5, 7 \ldots)$$

on aura, d'après DIRICHLET,

$$\text{(12)} \qquad \begin{aligned} s\int_1^\infty \varphi(x)x^{-s-1}dx &= \frac{1}{2}(\log L_1(s) + \log L_2(s)) \\ s\int_1^\infty \psi(x)x^{-s-1}dx &= \frac{1}{2}(\log L_1(s) - \log L_2(s)). \end{aligned}$$

Quant à la fonction $L_1(s)$, elle est liée à $\zeta(s)$ par cette relation très simple:

$$L_1(s) = \zeta(s)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right).$$

Pour la fonction $L_2(s)$ on obtient immédiatement l'expression

(13) $$L_2(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{z^{s-1}dz}{e^z + e^{-z}}.$$

Mais si on veut tirer parti de la propriété dont jouit la fonction $L_2(s)$ que l'expression

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{s}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{-s} L_2(s)$$

ne change pas de valeur quand s est remplacé par $1 - s$[1]), on déduit facilement, en suivant la voie de RIEMANN, la formule

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{s}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{-s} L_2(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^\infty \psi(x) x^{\frac{s-1}{2}} dx$$

où l'on a fait

(14) $$\psi(x) = \sum \left(\frac{-1}{n}\right) n e^{-\frac{n^2\pi x}{4}} \quad (n = 1, 3, 5, \ldots.).$$

Or la fonction $\psi(x)$ a cette propriété que[2])

$$\psi\left(\frac{1}{x}\right) = x^{\frac{3}{2}}\psi(x);$$

donc on peut écrire

(15) $$\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{s}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{-s} L_2(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \int_1^\infty \psi(x) x^{-\frac{3}{4}}(x^s + x^{1-s}) dx,$$

formule qui met en évidence la propriété dont nous venons de parler.

A l'aide de cette formule, il serait facile de se convaincre que $L_2(s)$ est différent de zéro à l'intérieur et sur le contour du cercle

$$|s - 1| = 1.$$

Au voisinage de $s = 0$, on a

---

[1]) Cfr. HURWITZ, *Einige Eigenschaften der Dirichletschen Functionen* etc., Schlömilchs Zeitschrift, t. 27.

[2]) Voir p. ex. JACOBI, *Fundamenta*, Gesammelte Werke Bd 1, p. 236.

$$1-\frac{1}{2^s}=s\log 2+\ldots;$$

de plus on a

$$L_2(0)=\frac{2}{\pi}L_2(1)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{dz}{e^z+e^{-z}}=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2}.$$

On peut écrire, par conséquent,

$$(16)\quad \begin{aligned}\frac{\log L_1(s)}{s}&=-\frac{\log(s-1)}{s}+\frac{\log s}{s}-\frac{\log 2-\log\log 2}{s}+\mathfrak{P}(s-1),\\ \frac{\log L_2(s)}{s}&=-\frac{\log 2}{s}+\mathfrak{P}(s-1),\end{aligned}$$

où les symboles $\mathfrak{P}(s-1)$ désignent, comme plus haut, deux séries de puissances dont les rayons de convergence sont supérieurs à l'unité.

Il suit de là que les trois expressions suivantes:

$$\varphi(x)-\left(\frac{1}{2}\operatorname{Li}x-\frac{1}{2}\log\frac{\log x}{\log 2}-\log 2\right),$$

$$\psi(x)-\left(\frac{1}{2}\operatorname{Li}x-\frac{1}{2}\log\frac{\log x}{\log 2}\right),$$

$$\varphi(x)-\psi(x)+\log 2,$$

changent de signe une infinité de fois.

Il est facile de déduire de ce résultat l'expression qu'a indiquée M. TCHEBYCHEFF, dans une lettre adressée à M. FUSS et publiée dans le *Bulletin de l'Académie de S:t Pétersbourg* 1853, pour l'excès du nombre des nombres premiers de la forme $4n+3$ sur ceux de la forme $4n+1$.

En effet, désignant par $\vartheta_\nu(x)$ et $\theta_\nu(x)$ le nombre de ν^{es} puissances de premiers congrues à 1 et à 3 resp. suivant le module 4, on a

$$(17)\quad \begin{aligned}\varphi(x)&=\vartheta_1(x)+\frac{1}{2}\vartheta_2(x)+\frac{1}{3}\vartheta_3(x)+\ldots\\ \psi(x)&=\theta_1(x)+\quad * \quad+\frac{1}{3}\theta_3(x)+\ldots,\end{aligned}$$

car il n'y a pas de carrés de premiers congrus à 3, mod 4.

Or, il est facile de voir que

$$\lim \frac{\frac{1}{3}\vartheta_3(x)+\frac{1}{4}\vartheta_4(x)+\frac{1}{3}\theta_3(x)+\frac{1}{4}\theta_4(x)+\ldots}{\vartheta_2(x)}=0$$

pour x infini. Pour les valeurs de x où

$$\varphi(x)-\psi(x)+\log 2$$

est très petit, on obtiendra donc aussi une valeur très petite pour l'expression

$$\frac{\theta_1(x)-\vartheta_1(x)}{\frac{1}{2}\vartheta_2(x)}-1.$$

Or on a

$$\frac{1}{2}\vartheta_2(x)=\frac{1}{2}\,\mathrm{Li}\, x^{\frac{1}{2}} \text{ à peu près},$$

ce qui s'accorde avec l'expression de M. TCHEBYCHEFF qui est

$$\frac{\sqrt{x}}{\log x}.$$

Il faut avouer que nous n'avons pas démontré l'existence de valeurs de x telles qu'on a, *simultanément*,

$$\frac{\theta_1(x)-\vartheta_1(x)}{\frac{1}{2}\vartheta_2(x)}=1 \text{ à peu près}$$

et

$$\frac{\vartheta_2(x)}{\mathrm{Li}\, x^{\frac{1}{2}}}=1 \text{ à peu près.}$$

Mais on peut surmonter cette difficulté sans trop de peine.

En effet, $f(x)$ désignant la fonction de RIEMANN étudiée au début de ce travail, on peut s'assurer qu'on a

$$\int_1^\infty f(x^{\frac{1}{2}})x^{-s-1}dx=\frac{\log\zeta(2s)}{s}=-\frac{\log(2s-1)}{s}-\frac{\log 2}{s}+\mathfrak{P}(s-1),$$

$\mathfrak{P}(s-1)$ ayant la même signification que plus haut. Comme on a

$$\int_\alpha^\infty \mathrm{Li}\, x^{\frac{1}{2}}x^{-s-1}dx=-\frac{\log(2s-1)}{s}+\mathfrak{P}(s-1)$$

on obtient

$$\int_{\alpha}^{\infty}\Big[f(x^{\frac{1}{2}}) - \mathrm{Li}\,x^{\frac{1}{2}} + \log 2\Big]x^{-s-1}dx = \mathfrak{P}(s-1)$$

et par conséquent aussi

$$\int_{\alpha}^{\infty}\Big(\varphi(x) - \psi(x) - \frac{1}{2}f(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}\mathrm{Li}\; x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\log 2\Big)x^{-s-1}dx = \mathfrak{P}(s-1).$$

Donc la fonction

$$\psi(x) - \varphi(x) + \frac{1}{2}f(x^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2}\mathrm{Li}\; x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\log 2$$

change de signe une infinité de fois.

Or, on peut écrire

$$\psi(x) - \varphi(x) = \theta_1(x) - \vartheta_1(x) - \frac{1}{2}\vartheta_2(x)\,(1+\delta)\,,$$

$$\frac{1}{2}f(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\vartheta_2(x)\,(1+\varepsilon)\,,$$

$$\lim \delta = 0\,, \quad \lim \varepsilon = 0\,.$$

Par conséquent, il y a une infinité de valeurs de x, pour lesquelles la valeur absolue de l'expression

$$\frac{\theta_1(x) - \vartheta_1(x)}{\frac{1}{2}\vartheta_2(x)} - \frac{\frac{1}{2}\mathrm{Li}\; x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\vartheta_2(x)}$$

est plus petite que toute quantité donnée d'avance.

Or, M. TCHEBYCHEFF a démontré rigoureusement [1]) que le rapport de Li $x^{\frac{1}{2}}$ à $\vartheta_2(x)$ reste toujours fini.

Donc la même assertion est valable à l'égard de l'expression

$$\frac{\theta_1(x) - \vartheta_1(x)}{\frac{1}{2}\mathrm{Li}\; x^{\frac{1}{2}}} - 1\,,$$

et le théorème de M. TCHEBYCHEFF se trouve démontré.

---

[1]) *Mémoire sur les nombres premiers*, Mémoires des savants étrangers, S:t Pétersbourg, t. 7 (1854) et Journal de Liouville t. 17 (1852).

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts. från sid. 548.)

Minnesota. *Geological and natural history survey.*
Bulletin. N:o 6. Indianopolis. 1891. 8:o.
Annual report. 18(1889). 8:o.

München. *K. Sternwarte in Bogenhausen.*
Neue Annalen. Bd. 2. 1891. 4:o.

Nürnberg. *Naturhistorische Gesellschaft.*
Jahresbericht. Jahr 1890. 8:o.

Paris. *Société géologique de France.*
Mémoires. Paléontologie. T. 1: F. 4; 2: 1–2. 1891. 4:o.

Prag. *Böhmiska Kemiska sällskapet.*
Listy chemické. Ročzník 15(1890): C. 2–10. 8:o.

Roma. *Reale Accademia dei Lincei.*
Memorie. (4) Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. 7, Parte 2: N:o 1–12. 1890. 4:o.

Rostock. *K. Universität.*
Akademiska skrifter. År 1890/91. 54 häften 4:o & 8:o.

Tiflis. *Physikalisches Observatorium.*
Magnetische Beobachtungen. Jahr. 1888—89. 8:o.

Troyes. *Société académique d'agriculture, des sciences, arts et belles-lettres.*
Mémoires. T. 53(1889). 8:o.

Washington. *U. S. Coast and geodetic survey.*
Report. 1890 June. 4:o.

Wellington. *New Zealand institute.*
Transactions and proceedings. (2) Vol. 23(1890). 8:o.

Würzburg. *Physikalisch-Medicinische Gesellschaft.*
Verhandlungen. (N. F.) Bd. 24: N:o 6. 1890. 8:o.
Sitzungsberichte. Jahrg. 1890: N:o 8–10. 8:o.

Hrr F. & G. Beijer.
NATHORST, A. G., Jordens historia. H. 7. Sthm 1891. 8:o.

Hr D:r O. Nordstedt.
Särtryck ur Botaniska notiser, Årg. 1890. 17 häften. 8:o.

Författarne.
EGGERTZ, C. G., Studier och undersökningar öfver mullämnen och mossjord. Sthm 1888. 8:o.
ERIKSSON, J., Om växtsjukdomarnes ekonomiska betydelse. Sthm 1891. 8:o.
— Småskrifter. 9 häften. 8:o.
KROK, TH. O. B. N., ALMQVIST, S., Svensk flora för skolor. 1. Uppl. 4. Sthm 1891. 16:o.
LILIENBERG, V. E., Om strömmarne i Stockholm. Sthm 1891. 4:o.
LINDAHL, J., Description of a scull of Megalonyx Leidyi. Philadelphia 1891. 4:o.
LINDBERG, G. A., Zum Kakteenstudium. — Die Rhipsaliden. Berlin 1891. 8:o.

MASON, M., The cause of the glacial period. San Francisco 1891. 8:o.
NILSON, L. F., Laktokriten, jemförd med andra nyare metoder för bestämning af mjölkens fetthalt. Sthm. 1891. 8:o.
— Småskrifter. 6 häften. Fol. & 8:o.
SÅVE, T., John Ericsson. Minnesteckning. Karlstad 1891. 4:o.
WALLENGREN, H. D. J., Skandinaviens Heterocerfjärilar. D. 2: H. 1—3. Lund 1869—85. 8:o.
— » Vecklarefjärilar. Sthm 1890. 8:o.
— Småskrifter. 10 häften. 8:o.
WILLE, N., Algæ. Kjöbenh. 1891. 8:o.
WOODWARD, A. S., The Devonian fauna of Spitzbergen. London 1891. 8:o.

Stockholm, 1891. Kongl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 48. 1891. № 9.

Onsdagen den 11 November.

INNEHÅLL:

Hr RETZIUS meddelade en öfversigt af sina undersökningar öfver det centrala nervsystemets byggnad hos Annulaterna.

Hr PETTERSSON dels förevisade några vid Stockholms Högskolas laboratorium framställda preparat af den nya modifikation af silfver, som amerikanske kemisten CARCY LEA upptäckt, nämligen lösligt silfver och silfver med guldfärg, och dels refererade innehållet af en af honom sjelf och Ingeniören R. EKMAN gemensamt författad uppsats om en ny analytisk metod att bestämma alkoholhalten i jästa drycker. (Se Bihang till K. Vet.-Akad. Handl.).

Hr GYLDÉN meddelade en uppsats af AUG. och LOUIS LUMIÈRE: »Sur un procédé d'obtention de microphotographies destinées à la projection».*

Sekreteraren öfverlemnade för intagande i Akademiens skrifter följande insända uppsatser: 1:o) »On an apparently new Arachnid belonging to the family Crypotocelloidæ», af Professor T. THORELL (se Bihang etc.); 2:o) »Zur Theorie der Differentialgleichung von BRIOT und BOUQUET», af Doktor E. PHRAGMÉN.*

På tillstyrkan af utsedde komiterade antogos följande afhandlingar till införande i Akademiens Handlingar: 1:o) »Den svenska hydrografiska expeditionen år 1877 under ledning af F. L. Ekman. I. Allmänna delen af F. L. Ekman. II. Speciella delen efter F. L. Ekmans död utarbetad af O. Pettersson»; 2:o) »Zur Spectroskopie der Verbindungen. Spectrum der Thonerde», af Professor K. B. Hasselberg.

Anmäldes, att den Komité, som enligt framlidne Doktor A. F. Regnells förordnande har att bortgifva det af Regnell stiftade stipendium för resor i botaniskt ändamål i Brasilien eller andra intertropiska länder, hvilket stipendium nu för första gången är disponibelt, till stipendiater utsett Lektorn vid Stockholms norra latinläroverk C. A. M. Lindman, såsom den förestående expeditionens ledare, och Filos. Kandidaten G. O. Andersson Malme, såsom vetenskapligt biträde.

Årsräntan å *Wallmarkska* donationsfonden, fördelad i två lika lotter, anvisades såsom understöd dels åt Docenten S. Arrhenius för fortsättande af hans undersökningar öfver den elektrolytiska dissociations-theorien, och dels åt Filos. Licentiaten D. S. Hector för undersökningar öfver de tre stora grupperna af urinämnen.

Den disponibla årsräntan af A. F. Regnells zoologiska gåfvomedel beslöt Akademien sålunda fördela, att

till Professor S. Lovéns förfogande skulle ställas 492 kr. 46 öre att användas för Kristinbergs zoologiska stations behof,

till Professor F. A. Smitts förfogande 400 kronor för utförande af ritningar öfver hvalskelett,

till Professor Chr. Aurivillii förfogande 300 kronor för preparerande och bearbetande af de samlingar, som Riksmusei entomologiska afdelning dels redan fått mottaga och dels hade att ytterligare förvänta från den till Kamerun i Afrika utsände Fil. Kandidaten Y. Sjöstedt,

till Docenten E. Lönnbergs förfogande 300 kronor för fortsatta studier öfver skandinaviens Cestoder, och

till Läroverksadjunkten D:r C. A. WESTERLUNDS förfogande 200 kronor såsom bidrag för afslutande af hans arbete: »Fauna der in der paläarktischen Region lebenden Binnenconchylien.

Genom anställda val kallades Direktorn för Kejs. physikaliska Centralobservatorium i S:t Petersburg HEINRICH WILD och Professorn i botanik vid universitetet i Berlin ADOLPH ENGLER till utländska ledamöter af Akademien.

Följande skänker anmäldes:

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

Stockholm. *Helsovårdsnämnden.*
Veckoöfversigt af Stockholms sanitära statistik. Årg. 12(1887): N:o 15; 25; 13(1888): 1—52; 14(1889): 1—52; 15(1890): 1—53. 4:o.

Upsala. *Meteorologiska Observatorium.*
Bulletin mensuel. Vol. 22(1890). 4:o.

Kristiania. *K. Norsk meteorologisk Institut.*
Jahrbuch. Jahr 1889. Fol.

Batavia. *Magnetical and meteorological observatory.*
Observations. Vol. 12(1889). 4:o.
Rainfall in the East Indian Archipelago. Year 11(1889). 8:o.

Adelaide. *Observatory.*
Meteorological observations made at A— and other places of South Australia and the Northern Territory under the direction of Ch. Todd. Year 1883; 1888. 4:o.

Berlin. *K. Preussisches meteorologisches Institut.*
Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen. Jahr 1888; 1890: H. 1—2. 4:o.
Witterung. 1890: 1—12. 8:o.
Statistische Korrespondenz. Jahrg. 15(1889): N:o 3. 4:o.
Abhandlungen, hrsg. von W. v. BEZOLD. Bd. 1: N:o 1—3. 1890. 4:o.
v. BEZOLD, W., Das K. Preussische Meteorologische Institut in Berlin und dessen Observatorium bei Potsdam. — Aus amtlichem Anlass hrsg. 1890. 4:o.
HELLMAN, G., Die Regenverhältnisse vom 1890 $^{22}/_{11}$—$^{24}/_{11}$ in Mittel- und Westdeutschland. 1891. 4:o.

— *Meteorologische Abtheilung des forstlichen Versuchswesens in Preussen.*
Beobachtungs-Ergebnisse der . . . forstlich-meteorologischen Stationen. Jahrg. 16(1890): N:o 1—12. 8:o.

Bern. *Departement des Innern, Abth. Bauwesen. — Département fédéral de l'Intérieur, Section des travaux publics.*
Schweizerische hydrometrische Beobachtungen. Tabellarische Zusammenstellung der Haupt-Ergebnisse. — Observations hydrométriques Suisses. Table de récapitulation des principaux résultats. Jahr 1887—88. Fol.

Graphische Darstellung der Schweizerischen hydrometrischen Beobachtungen. 1890: 1a, 1b, 1c, 2a, 2b, 2c, 3—4, 5a, 5b, 6. Fol.

Tableau graphique des observations hydrométriques Suisses. 1890: 1a, 1b. 1c, 2a, 2b, 2c, 3—4, 5a, 5b, 6. Fol.

Graphische Darstellung der Lufttemperaturen und der Niederschlagshöhen. 1890: 1—3. Fol.

Brécourt (Manche). *Observatoire météorologique de Hervé Mangon.*

Résumé des observations météorologiques faites par H. M. 1868—1889 par Th. Moureaux. Paris 1891. 4:o.

Bremen. *Meteorologische Station 1:er Ordnung.*

Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen in Bremen 1803—1890. Hrsg. von P. Bergholz. Jahrg. 1. 1891. 4:o.

Bucuresci. *Institut météorologique de Roumanie.*

Annalele. — Annales. T. 4 (1888). 4:o.

Budapest. *K. Ungarische Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus.*

Jahrbücher. Bd 18 (1888). 4:o.

Buenos Aires. *Oficina meteorológica Argentina.*

Anales. T. 8. 1890. 4:o.

Chemnitz. *K. Sächsisches meteorologisches Institut.*

Jahrbuch. Jahrg. 7 (1889): Abth. 1—3; 8 (1890): 1—2. 4:o.

Decaden- und Monatsberichte aus den an 11 Stationen 2:r Ordnung angestellten meteorologischen Beobachtungen. Jahr 1890: N:o 1—12. Fol.

Coimbra. *Observatorio meteorologico e magnetico da universidade.*

Observaçóes meteorologicas. Anno 1890. Fol.

» magneticas. Anno 1878—90. Fol.

Colon. *Observatorio meteorológico del Collegio pio.*

Boletin mensual. Año 2 (1890): N:o 1—12. Montevideo. 4:o.

Dorpat. *Meteorologisches Observatorium der Universität.*

Meteorologische Beobachtungen. Jahrg. 16 (1881)—20 (1885). 4:o.

Bericht über die Ergebnisse der Beobachtungen an den Regenstationen der K. Livländischen gemeinnützigen und ökonomischen Sozietät. Jahr 1888. 4:o.

Edinburgh. *Scottish meteorological society.*

Journal. (3). Vol. 9: N:o 7 (1889). 8:o.

Fiume. *K. K. Marine-Akademie.*

Meteorologische Beobachtungen. Jahr 1890: 1—12. 8:o.

Genève et le Grand Saint-Bernhard. [*Stations.*]

Résumé météorologique par A. Kammermann. 1889. 8:o.

Habana. *R. Colegio de Belen de la compañia de Jesus.*

Observaciones magnéticas y meteorológicas. 1888: Sem. 2. Fol.

Hamburg. *Deutsche Seewarte.*

Wetterbericht. Jahrg. 15 (1890): N:o 1—365. Fol.

» Korrekturen und Nachträge. 1890: 1—12. Fol.

(Forts. å sid. 673).

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1891. N:o 9.
Stockholm.

Meddelanden från Stockholms Högskola. N:o 122.

Zur Theorie der Differentialgleichung von BRIOT und BOUQUET.

Von E. PHRAGMÉN.

[Mitgeteilt den 11 November 1891 durch D. G. LINDHAGEN.]

In der Arbeit von Hrn. POINCARÉ *Sur une classe nouvelle de transcendantes uniformes*[1]) findet man auf S. 318 eine Bemerkung, welche in Übersetzung so lautet: »Diese Schlussweise[2]) kann dazu dienen, die Eindeutigkeit der elliptischen und Abelschen Functionen zu beweisen. Es ist dies sogar der einzige strenge Beweis welcher bisher vorgeschlagen worden ist, mit Ausnahme der indirecten Beweise welche von den Thetareihen ausgehen». Wiewohl diese letzten Worte wohl nur in Betreff der Abelschen Functionen gelten sollen, führten dieselben jedoch meine Gedanken auf einige Mängel zurück, welche die sonst so eleganten Untersuchungen von BRIOT und BOUQUET über die Theorie derjenigen eindeutigen Functionen welche eine Differentialgleichung von der Form

$$F\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$$

befriedigen, als nicht ganz streng erscheinen lassen. Man findet in der That leicht, dass die Schlussfolgerungen von BRIOT und BOUQUET erst dann als völlig befriedigend anerkannt werden können, wenn gezeigt wird, erstens dass von dem Bereich, für

---

[1]) Liouville's Journal, t. 6, 1890.

[2]) Nämlich die Betrachtung des Multiplicationstheorems.

welchen u als eine monogene Function von z definirt werden kann, kein zweidimensionales Stück der z-Ebene ausgeschlossen bleibt, und zweitens dass diese Function u sich immer einem bestimmten Werth nähert, wenn die Veränderliche z auf einem gegebenen Wege einen gegebenen Werth annimmt.

Es ist der Zweck der vorliegenden kleinen Arbeit die Untersuchung von BRIOT und BOUQUET in dieser Hinsicht zu ergänzen. Zum Schluss füge ich noch ein Paar Bemerkungen hinzu, welche geeignet scheinen, die Natur der betrachteten Functionen klarer hervortreten zu lassen.

Es bedeute $F(x, y)$ eine ganze rationale Function der beiden Argumente x und y, und man nehme an, zwischen einer Function u von z und ihrer ersten Derivirten bestehe die algebraische Relation

(1) $$F\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0.$$

Diese Relation kann vollständig dargestellt werden durch eine endliche Anzahl von Entwickelungen von $\frac{du}{dz}$ nach ganzen Potenzen einer Differenz $u - u_\lambda$ oder einer ganzen Wurzel aus dieser Differenz,[1]) wobei jede Entwickelung nur innerhalb eines Gebietes angewandt zu werden braucht, welches ganz und gar im Innern ihres Convergenzbereiches fällt. Da Entwickelungen der genannten Form im Folgenden mehrfach zur Sprache kommen werden, erlaube ich mir, für dieselben eine kurze Bezeichnung einzuführen.

Es sei $\mathfrak{P}_m(x)$ eine nach wachsenden Potenzen von x deren Exponenten *positive ganzzahlige* Vielfache von $\frac{1}{m}$ sind — Null ausgeschlossen — fortschreitende Reihe, und es sei m die numerisch kleinste Grösse für welche dies stattfindet; dann bezeichne ich durch das Symbol

$$[x]_m^n$$

[1]) In einigen Entwickelungen tritt $\frac{1}{u}$ an die Stelle von $u - u_\lambda$.

eine convergente Entwickelung von der Form

$$Cx^{\frac{n}{m}}(1+\mathfrak{P}_m(x))$$

wo C eine endliche, von Null verschiedene Constante bedeutet. Von diesem Symbole gilt dann der wichtige Satz:

Ist

$$y=[x]_m^n\,,\quad (n \gtrless 0)$$

so ist auch

$$x=[y]_n^m\,,$$

von dessen Richtigkeit man sich sogleich überzeugt. Die Entwickelungen, durch welche, wie wir oben gesehen haben, der Zusammenhang zwischen $\frac{du}{dz}$ und u dargestellt werden kann, können also in dieser Bezeichnung geschrieben werden:

$$(2)\qquad \frac{du}{dz}=[u-u_\lambda]_{m_\lambda}^{n_\lambda}$$

indem m_λ und n_λ rationale Zahlen sind, m_λ positiv.

Nur einigen dieser Entwickelungen muss man eine andere Form geben, nämliche denjenigen welche in der Umgebung von $u=\infty$ gelten. Indem wir

$$u'=\frac{1}{u}$$

setzen, können wir aber auch diese Entwickelungen auf die Form

$$(2a)\qquad \frac{du'}{dz}=[u']_{m'}^{n'}$$

bringen. Die Formeln (2) und (2a) können ebensowohl in der Form

$$\frac{dz}{du}=[u-u_\lambda]_{m_\lambda}^{-n_\lambda}\,,$$

$$\frac{dz}{du'}=[u']_{m'}^{-n'}\,,$$

geschrieben werden und können übrigens durch diejenigen Ent-

wickelungen völlig ersetzt werden, welche die Integration dieser letzten Gleichungen ergiebt. Diese Integration ergiebt nun unter verschiedenen Voraussetzungen Entwickelungen verschiedener Form.

1:o. Ist erstens $n_\lambda < m_\lambda$, resp. $n' < m'$, so hat man, indem man mit z_λ, z_∞ Constanten bezeichnet:

$$z - z_\lambda = [u - u_\lambda]_{m_\lambda}^{m_\lambda - n_\lambda}, \tag{3}$$

$$z - z_\infty = [u']_{m'}^{m' - n'}. \tag{3a}$$

2:o. Ist zweitens $n_\lambda = m_\lambda$, resp. $n' = m'$, so erhält man:

$$z - z_\lambda = C_\lambda \log (u - u_\lambda) + \mathfrak{P}(u - u_\lambda)^{\frac{1}{m_\lambda}}, \tag{4}$$

$$z - z_\infty = C' \log u' + \mathfrak{P}(u')^{\frac{1}{m'}}, \tag{4a}$$

wo C_λ, C' von Null verschiedene endliche Constanten bedeuten, und $\mathfrak{P}$ eine gewöhnliche Potenzreiche bezeichnet.

3:o. Ist drittens $n_\lambda > m_\lambda$ und der Coefficient von

$$(u - u_\lambda)^{-1}$$

gleich Null, resp. $n' > m'$ und der Coefficient von

$$(u')^{-1}$$

gleich Null, so giebt die Integration

$$z - z_\lambda = [u - u_\lambda]_{m_\lambda}^{-(n_\lambda - m_\lambda)}, \tag{5}$$

$$z - z_\infty = [u']_{m'}^{-(n' - m')} \tag{5a}$$

4:o. Ist endlich viertens $n_\lambda > m_\lambda$ resp. $n' > m'$ und der Coefficient C_λ resp. C' von

$$(u - u_\lambda)^{-1} \quad \text{resp.} \quad (u')^{-1}$$

von Null verschieden, so nehmen unsere Entwickelungen die Gestalt an:

(6) $$z - z_\lambda = C_\lambda \log (u - u_\lambda) + [u - u_\lambda]_{m_\lambda}^{-(n_\lambda - m_\lambda)},$$

(6a) $$z - z_\infty = C' \log u' + [u']_{m'}^{-(n' - m')}.$$

Eine wichtige Eigenschaft der Function u können wir aus diesen Entwickelungen unmittelbar entnehmen. Mit Ausnahme derjenigen, immer nur in endlicher Anzahl vorhandenen Werthe, in deren Umgebung Entwickelungen von der Form (4), (5) oder (6) gelten, nimmt dieselbe jeden Werth für einen endlichen Werth von z wenigstens einmal an.

Was das Verhalten dieser Function im übrigen betrifft, wollen wir zunächst den folgenden Satz beweisen:

Ist ein ganz und gar im Endlichen gelegener Bereich Z gegeben, so entspricht demselben stets eine positive Grösse ϱ von der Beschaffenheit, dass wenn $\bar{z}$ innerhalb z, $\bar{u}$ vollkommen beliebig gewählt wird, man immer eine Grösse ζ und eine in der Umgebung derselben gültige Entwickelung nach positiven gebrochenen Potenzen von $z - \zeta$ finden kann, welche in der Umgebung ϱ von $\bar{z}$ convergirt, für $z = \bar{z}$ den Werth $u = \bar{u}$ annimmt, und für u eingesetzt die Differentialgleichung

$$F\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$$

befriedigt.

Hat man zwei Entwickelungen der genannten Art gefunden, so müssen dieselben in der Umgebung ϱ von z übereinstimmen.

Der wesentliche Inhalt des ersten Teils dieses Satzes könnte kürzer folgendermassen wiedergegeben werden:

Die durch eine Differentialgleichung der Form

$$F\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$$

als Function von z definirte Grösse u, hat in endlicher Entfernung nur algebraische Singularitäten.

Um diesen Satz zu beweisen, wollen wir zuerst zeigen dass man berechtigt ist anzunehmen, dass die Grössen z_λ, z_∞, welche auf der linken Seite der Gleichungen (3—6) vorkommen, sämmt-

lich ihrem absoluten Betrage nach unterhalb einer angebbaren Grösse liegen, welche nur von der Beschaffenheit des Gebietes Z abhängt.

In der That kann ja, wie wir oben auseinandergesetzt haben, der Inhalt der Gleichung

$$F\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$$

durch eine endliche Anzahl Entwickelungen von der Form (3—6) ausgedruckt werden, indem wir in jeder Entwickelung die Constanten z_λ, z_∞ unbestimmt lassen. Die Entwickelungen werden nur innerhalb Bereiche angewandt, welche ganz und gar im Innern ihrer Convergenzbereiche fallen.

Nun können wir aber natürlich von vorn herein einsehen, dass wir nur solche Werthe der Constanten z_λ, z_∞ zu berücksichtigen haben, welche den fraglichen Entwickelungen wenigstens irgend einen Werth geben, welcher innerhalb Z fällt. In den Entwicklungen der Form (3) oder (5) fallen also die zu berücksichtigenden Werthe von z_λ sämmtlich unter eine leicht anzugebende Grenze, da man sowohl für z als für die rechten Seiten der Gleichungen Grenzen kennt.

In den Entwickelungen der Form (3) oder (6) wollen wir uns z_λ aus zwei Componenten gebildet denken, parallel und orthogonal zur Richtung C_λ. Dann sieht man wie oben unmittelbar, dass die erstere Componente numerisch unterhalb einer angebbaren Grenze bleibt. Die zur Richtung C_λ orthogonale Componente kann man aber von vorn herein zwischen den Grenzen 0 und $2\pi i C_\lambda$ eingeschlossen annehmen, da ja zwei Werthe von z_λ welche sich nur durch ein ganzes Vielfaches von $2\pi i C_\lambda$ unterscheiden, zu identischen Entwickelungen Anlass geben. Folglich brauchen wir, um den Inhalt der Gleichung

$$F\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$$

vollständig wiederzugeben, in der endlichen Anzahl von Entwickelungen der Form (3—6), welche wir zu berücksichtigen haben,

den Constanten z_λ, z_∞ nur solche Werthe zu geben, welche einem gewissen endlichen Bereiche angehören.

Wir gehen jetzt darauf aus, zu zeigen, dass man für diejenigen Werthe u_λ, in deren Umgebung eine Entwickelung der Form (4), (5) oder (6) gilt, immer eine Umgebung von der Beschaffenheit angeben kann, dass die Funktion u keinen Werth innerhalb derselben annimmt, so lange z das Gebiet Z nicht verlässt.

In Betreff der Entwickelungen von der Form (4) und (5) ist dies unmittelbar klar, in Betreff der Entwickelungen von der Form (6) bedarf aber unsere Behauptung einer genaueren Begründung.

Indem wir der Kürze halber das erste Glied der Entwickelung

$$-\frac{n_\lambda - m_\lambda}{C_\lambda}[u - u_\lambda]_{m_\lambda}^{-(n_\lambda - m_\lambda)}$$

resp. der Entwickelung

$$-\frac{n' - m'}{C'}[u']_{m'}^{-(n'-m')}$$

mit x, die Summe der übrigen Glieder dividirt durch x mit ε, und die Grösse

$$-\frac{n_\lambda - m_\lambda}{C_\lambda}(z - z_\lambda) \quad \text{resp.} \quad -\frac{n' - m'}{C'}(z - z_\infty)$$

mit y bezeichnen, haben wir zwischen diesen Grössen die Gleichung

$$y = x(1 + \varepsilon) + \log x \,. \tag{7}$$

Ich schreibe ferner

$$x = re^{i\vartheta},$$
$$\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2,$$

indem r als positiv, ϑ, ε_1, ε_2 als reell angenommen werden sollen. Ist dann δ eine beliebig gegebene positive Grösse, so ist aus der Bedeutung der Buchstaben unmittelbar klar, dass die Grösse r_0 immer so gross gewählt werden kann, dass man

$$|\varepsilon_1| < \delta, \quad |\varepsilon_2| < \delta$$

hat, sobald

$$r > r_0 .$$

Da die Veränderliche z nach der Annahme das Gebiet Z nicht verlässt, so kann eine positive Grösse G so gewählt werden dass die Ungleichung

$$|y| < G$$

immer befriedigt bleibt. Diese Ungleichung können wir auch in der folgenden Form schreiben:

(8) $$\{(1+\varepsilon_1)r\cos\vartheta - \varepsilon_2 r\sin\vartheta + \log r\}^2 + \{(1+\varepsilon_1)r\sin\vartheta + \varepsilon_2 r\cos\vartheta + \vartheta\}^2 < G^2 .$$

Jetzt sei α eine Grösse welche den Ungleichungen

(9) $$0 < \alpha < 1$$

gemäss gewählt ist, und man nehme an, dass die soeben als willkürlich eingeführte Grösse δ die Ungleichungen

$$\delta < \frac{\alpha}{1+\alpha}, \quad \delta(\alpha + \sqrt{1-a^2}) < 1$$

befriedigt, von denen übrigens die letztere eine Folge der ersteren ist.

Ferner sei r_1 grösser als

(11) $$\frac{1}{\alpha - (1+\alpha)\delta}$$

und ausserdem so gross gewählt dass

(12) $$[\alpha - (1+\alpha)\delta]r_1 - \log r_1 > G .$$

Dann ist

(13) $$[\alpha - (1+\alpha)\delta]r - \log r > G$$

sobald

$$r > r_1 .$$

Endlich sei R eine Grösse, welche die Ungleichung

(14) $$R > \frac{2G + \pi + (1+\delta+\alpha\delta)r_1}{1 - \delta(\alpha + \sqrt{1-\alpha^2})}$$

erfüllt.

Dies vorausgesetzt, wollen wir eine stetige Folge von Werthen der Grösse x betrachten, unter denen sich auch solche befinden welche dem absoluten Betrage nach kleiner als r_1 sind. Es ist dann leicht zu sehen, dass diese Werthe sämmtlich, dem absoluten Betrage nach, kleiner als R sein müssen.

In der That erhält man aus (8)

$$|(1+\varepsilon_1)r\cos\vartheta - \varepsilon_2 r\sin\vartheta + \log r| < G,$$

also um so mehr

$$(1-\delta)r|\cos\vartheta| - \delta r - \log r < G.$$

Ist $r \geqq r_1$, so ergiebt der Vergleich mit (13), dass man

$$|\cos\vartheta| < \alpha \tag{15}$$

haben muss, also auch

$$|\sin\vartheta| > \sqrt{1-\alpha^2}. \tag{16}$$

Für $r = r_1$ muss man haben

$$|(1+\varepsilon_1)r_1\sin\vartheta + \varepsilon_2 r_1\cos\vartheta + \vartheta| < G$$

und um so mehr

$$|\vartheta| < G + (1+\varepsilon_1)r_1|\sin\vartheta| + |\varepsilon_2\cos\vartheta|r_1,$$

und noch mehr

$$|\vartheta| < G + (1+\delta+\alpha\delta)r_1.$$

För $r \geqq r_1$ kann, nach (15), ϑ höchstens innerhalb eines halben Umlaufs variiren; man hat also nothwendig

$$|\vartheta| < G + \pi + (1+\delta+\alpha\delta)r_1,$$

sobald $r \geqq r_1$.

Wir haben also

$$\begin{aligned} G &> |(1+\varepsilon_1)r\sin\vartheta + \varepsilon_2 r\cos\vartheta + \vartheta| \\ &> (1-\delta)r\sqrt{1-\alpha^2} - \alpha\delta r - |\vartheta| \\ &> [(1-\delta)\sqrt{1-\alpha^2} - \alpha\delta]r - [(1+\delta+\alpha\delta)r_1 + G + \pi] \end{aligned}$$

d. h.

$$r < \frac{2G+\pi+(1+\delta+\alpha\delta)r_1}{(1-\delta)\sqrt{1-\alpha^2}-\alpha\delta}$$

oder

$$r < R.$$

w. z. b. w.

Der oberen Grenze R für r entspricht aber eine leicht anzugebende untere Grenze für den absoluten Betrag von $(u - u_\lambda)$. So lange die Veränderliche z das Gebiet Z nicht verlässt, kann also der Werth der Function u sich denjenigen Werthen u_λ für welche unsere Entwickelungen die Form (4), (5) oder (6) haben, nur bis zu einer gewissen Grenze nähern. Es kann dieses Resultat, wie man leicht einsieht, auch in der folgenden Form ausgesprochen werden:

Der durch die Gleichung (1) gegebene Zusammenhang zwischen den Veränderlichen u und z, kann, sofern z das Gebiet Z nicht verlassen soll, durch eine endliche Anzahl von Entwickelungen der Form (3) oder (3a) dargestellt werden, indem z_λ, z_∞ unbestimmte Constanten bezeichnen. Jede Entwickelung braucht dabei nur in einem Gebiet angewandt zu werden, welches die Grenze des Convergenzgebietes der Entwickelung nirgends erreicht.

Eine einfache Überlegung lehrt ferner, dass wir das System unserer Entwickelungen auch so wählen können, dass *jede Entwickelung nur für solche Werthe von u gebraucht wird, dass die zugehörigen Werthe von z die Grenze des Convergenzgebietes für die Umkehrung der Entwickelung nirgends erreichen.* Denn da es nur eine endliche Anzahl von u-Werthen giebt, welche dem Werth $\frac{dz}{du} = 0$ entsprechen, so können wir uns sämmtliche diese Werthe unter den u_λ aufgenommen denken.

Betrachten wir dann eine Entwickelung

$$z - z_\lambda = [u - u_\lambda]_{m_\lambda}^{m_\lambda - n_\lambda} \tag{17}$$

und bezeichnen durch U_λ das Gebiet für welches wir diese Entwickelung anzuwenden haben, sowie durch Z_λ eine Umgebung von z_λ, welche im Innern des Convergenzgebietes der Umkehrung gewählt ist, so können wir ein neues Gebiet U'_λ finden, von der Beschaffenheit dass unsere Entwickelung für u innerhalb U'_λ

einen Werth von z innerhalb Z_λ giebt. Wenn U'_λ nicht sämmtliche Werthe von U_λ umfasst, so bezeichnen wir mit U''_λ das Gebiet der Werthe von u welche dem Gebiet U_λ aber nicht dem Gebiet U'_λ gehören.

Ist jetzt $\bar{u}$ ein beliebiger Werth in U''_λ, so gilt in der Umgebung von $\bar{u}$ eine Entwickelung

$$(18) \qquad z - \bar{z} = [u - \bar{u}]^{\frac{1}{\mu}}_{\frac{1}{\mu}} \quad (\mu \text{ ganz positiv})$$

und man kann nicht nur für den Convergenzradius dieser Entwickelung und für den absoluten Betrag von $\frac{dz}{du}$ zwei untere Grenzen r und g, sondern auch für den absoluten Betrag von $z - \bar{z}$ eine obere Grenze G, angeben.

Es hat dann die Umkehrung dieser Entwickelung einen Convergenzradius, welcher nicht kleiner ist als derjenige der Umkehrung von

$$z - \bar{z} = g(u - \bar{u}) - \frac{G\left(\frac{u-\bar{u}}{r}\right)^2}{1 - \frac{u-\bar{u}}{r}},$$

also jedenfalls grösser als

$$\frac{(gr)^2}{2(gr + 2G)} = s\,.$$

Und damit $z - \bar{z}$ diese Grenze nicht überschreite, ist es hinreichend die Entwickelung (18) nur für

$$|u - \bar{u}| < \frac{rs}{G + s}$$

anzuwenden. Es ist aber immer möglich das Gebiet U''_λ in eine endliche Anzahl von Gebieten der Art zu zerlegen, dass für jede von ihnen diese Ungleichung erfüllt ist, indem $\bar{u}$ ein fester Werth des Gebietes bezeichnet.

Die obige Zerlegung des Gebietes für u in Teilgebiete wollen wir noch ein wenig modificiren, indem wir annehmen, erstens dass Z_λ innerhalb eines Kreises fällt dessen Radius die Hälfte des Convergenzradius der Umkehrung von (17) nicht übersteigt,

und zweitens dass die Gebiete in welche wir das Gebiet U_λ'' zerlegt haben, die Ungleichung

$$|u - \bar{u}| < \frac{rs}{2G + s}$$

befriedigen, woraus folgt dass $z - \bar{z}$ innerhalb dieser Gebiete seinem absoluten Betrage nach nicht grösser als $\frac{s}{2}$ wird.

Jetzt sind wir im Stande völlig klar zu überschauen, wie u variirt, wenn man z längs einem beliebigen innerhalb Z gelegenen Wege variiren lässt. Es sei nämlich ϱ eine Grösse welche nicht grösser ist als irgend einer der halben Convergenzradien der Umkehrungen von (17) und auch nicht grösser als $\frac{s}{2}$. Ferner sei z_0 der Anfangswerth von z, u_0 der zugehörige Werth von u. Dann giebt es eine unserer Entwickelungen welche in der Umgebung von u_0 gilt, deren Constante durch die Bestimmung $z = z_0$ für $u = u_0$ bestimmt wird, und deren Umkehrung in einer Umgebung von $z = z_0$ deren Radius grösser als ϱ ist, convergirt. Unsere Function ist also wenigstens für diese Umgebung definirt. In dem Punkte wo der gegebene Weg diese Umgebung verlässt, hat u einen bestimmten Werth. Wir können also dieselbe Schlussfolgerung wiederholen, und erhalten so unsere Function wieder für eine Umgebung mit dem Radius ϱ definirt. In dieser Weise können wir aber offenbar jeden beliebigen Punkt des Gebietes Z erreichen.

Hierdurch ist also der auf S. 627 ausgesprochene Satz vollständig erwiesen.

Wenn man die Natur der Function u näher zu bestimmen sucht, so ist es bekanntlich leicht zu zeigen, dass dieselbe entweder eine algebraische Function von z ist, oder auch eine periodische Function. Wenn man nämlich u einen solchen geschlossenen Weg beschreiben lässt, dass der Weg von $\frac{du}{dz}$ auch geschlossen ist, kann z entweder auch einen geschlossenen Weg beschreiben oder auch nicht. Nun giebt es eine endliche Anzahl

solcher Wege für u, auf welche alle übrigen sich zurückführen lassen. Ist für sämmtliche diese Wege der Weg von z geschlossen, so ist z eine algebraische Function von u, und zwar als eine rationale Function von u und $\frac{du}{dz}$ darstellbar (Man vgl. z. B. BRIOT, Theorie des Fonctions abéliennes, Note B.). Giebt es einen dieser Wege für welchen die Differenz des Anfangs- und End-Werthes von z von Null verschieden, z. B. gleich 2ω ist, so verhält sich unsere Function u in der Umgebung von $z_0 + 2\omega$ ganz ebenso wie in der Umgebung von z_0. Die Function ist *periodisch* und 2ω ist eine Periode derselben.

Also können wir sagen:

Die Function u ist entweder algebraisch, oder sie besitzt eine endliche Anzahl von Perioden.

Einige specielle Fälle verdienen besondere Erwähnung. Haben sämmtliche Perioden unserer Function die Form

$$2m\omega, \quad m = \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ldots$$

so ist

$$e^{\frac{\pi i z}{\omega}}$$

eine eindeutige Function von u und $\frac{du}{dz}$, und man zeigt, dass sie als eine rationale Function dieser Grössen dargestellt werden kann. u ist also eine algebraische Function von

$$e^{\frac{\pi i z}{\omega}}.$$

Ebenso, können sämmtliche Perioden unserer Function durch den Ausdruck

$$2m\omega + 2m'\omega', \quad \left(\begin{matrix} m \\ m' \end{matrix}\right\} = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots \Big)$$

dargestellt werden und ist der Quotient $\frac{\omega'}{\omega}$ nicht reell so ist die Function

$$\wp(z \mid \omega, \omega')$$

eine eindeutige Function von u und $\frac{du}{dz}$ und als rationale

Function dieser Grössen darstellbar. Also ist umgekehrt u eine algebraische Function von $\wp(z \mid \omega, \omega')$.

Nachdem wir so die analytische Natur unserer Function im allgemeinen Falle klar gelegt haben, folgen die Resultate von Briot und Bouquet fast von selbst.

Da jede Entwickelung von der Form (3) oder (3a)

$$z - z_\lambda = [u - u_\lambda]_{m_\lambda}^{m_\lambda - n_\lambda} \qquad (m_\lambda > n_\lambda)$$

resp.

$$z - z_\infty = [u']_{m'}^{m' - n'} \qquad (m' > n')$$

durch Umkehrung eine Entwickelung der Form

$$u - u_\lambda = [z - z_\lambda]_{m_\lambda - n_\lambda}^{m_\lambda}$$

resp.

$$u' = [z - z_\infty]_{m' - n'}^{m'}$$

hervorbringt, so kann unsere Function natürlich nur dann eindeutig sein, wenn man in jeder Entwickelung der Form (3) oder (3a)

$$m_\lambda - n_\lambda = \frac{1}{\mu}, \quad m_\lambda = \frac{\nu}{\mu}$$

resp.

$$m' - n' = \frac{1}{\mu}, \quad m' = \frac{\nu}{\mu}$$

hat, indem μ, ν ganze Zahlen bezeichnen. Umgekehrt erlauben uns aber auch unsere vorhergehenden Ausführungen ohne Weiteres den Schluss zu ziehen, dass die Functionen, sobald diese Bedingung erfüllt ist, wirklich innerhalb jedes endlichen Bereiches Z eindeutig ist.

Wir haben also die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen der Eindeutigkeit gefunden.

Dieselben können so formulirt werden:

Damit u eine eindeutige Function von z sei, ist nothwendig und hinreichend, dass die Entwickelungen von $\frac{du}{dz}$ in der Umgebung der Werthe $u = u_\lambda$ für welche $\frac{du}{dz} = 0$ wird, die Form

$$\frac{du}{dz} = C(u - u_\lambda)^{1-\frac{1}{\mu}}\left\{1 + (u - u_\lambda)^{\frac{1}{\mu}}\mathfrak{P}(u - u_\lambda)^{\frac{1}{\mu}}\right\}$$

haben, und dass ebenso, falls

$$\frac{d}{dz}\frac{1}{u} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dz}$$

für $u = \infty$ *den Werth Null annimmt, die entsprechende Entwickelung von der Form*

$$\frac{1}{u^2}\frac{du}{dz} = C\left(\frac{1}{u}\right)^{1-\frac{1}{\mu}}\left\{1 + \left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{\mu}}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{\mu}}\right\},$$

also die Entwickelung von $\frac{du}{dz}$ *von der Form*

$$\frac{du}{dz} = C\left(\frac{1}{u}\right)^{1+\frac{1}{\mu}}\left\{1 + \left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{\mu}}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{\mu}}\right\}$$

ist.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist also u eine eindeutige Function von z von rationalem Charakter. Nach JACOBI[1]) weiss man aber, dass wenn eine solche Function periodisch ist, so sind ihre Perioden entweder sämmtliche ganze Mannigfache einer einzigen Periode 2ω oder sie können als Multipelsummen von zwei Perioden 2ω, $2\omega'$ dargestellt werden, deren Verhältniss nicht reell ist.

Also ist u entweder eine rationale Function von z, oder eine rationale Function von $e^{\frac{\pi i z}{\omega}}$, oder eine algebraische Function von $\wp(z \mid \omega, \omega')$, welche als Function von z eindeutig ist, d. h. eine rationale Function von $\wp(z \mid \omega, \omega')$ und $\wp'(z \mid \omega, \omega')$.

Da der JACOBI'sche Satz ebensowohl für eine endlich vieldeutige als für eine eindeutige Function gilt, so beweist man in derselben Weise dass eine m-deutige Function, welche eine Differentialgleichung von der Form

$$F\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$$

---

[1]) De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis etc., Gesammelte Werke, Bd 2, S. 23.

befriedigt, als die Wurzel einer algebraischen Gleichung m:ten Grades betrachtet werden kann, deren Coefficienten entweder rationale Functionen von z, oder rationale Functionen einer Exponentialfunktion $e^{\frac{\pi i z}{\omega}}$, oder endlich rationale Functionen einer elliptischen Function $\wp(z \mid \omega, \omega')$ und ihrer ersten Derivirten sind.

Die Kenntniss der einfachsten Eigenschaften dieser Art von Functionen genügt um diese drei Fälle sehr leicht unterscheiden zu können. Eine elliptische Function nämlich nimmt jeden Werth $u = u_\lambda$ oder $u = \infty$ wirklich an, d. h. es giebt immer einen Werth $z = z_\lambda$ in deren Umgebung eine Entwickelung

$$(19) \qquad u - u_\lambda = [z - z_\lambda]_{n_\lambda}^{m_\lambda}, \quad m_\lambda > 0, \quad n_\lambda > 0,$$

resp.

$$\frac{1}{u} = u' = [z - z_\infty]_{n'}^{m'}, \quad m' > 0, \quad n' > 0,$$

gilt. Hieraus erhält man, indem ich nur die erste Formel behandle,

$$(20) \qquad z - z_\lambda = [u - u_\lambda]_{m_\lambda}^{n_\lambda},$$

$$(21) \qquad \frac{dz}{du} = [u - u_\lambda]_{m_\lambda}^{n_\lambda - m_\lambda},$$

also

$$(22) \qquad \frac{du}{dz} = [u - u_\lambda]_{m_\lambda}^{m_\lambda - n_\lambda}, \quad n_\lambda > 0.$$

Ist dagegen u eine algebraische Function von $e^{\frac{2\pi i}{\omega}}$, so erhält man ausser Entwickelungen derselben Form wie oben, noch gewisse Entwickelungen der Form

$$(23) \qquad u - u_\lambda = \left[e^{\pm\frac{2\pi i}{\omega}}\right]_{n_\lambda}^{m_\lambda}, \quad m_\lambda > 0, \quad n_\lambda > 0,$$

wo in dem Exponenten Plus oder Minus steht, je nachdem der Werth $u = u_\lambda$ dem Werthe

$$e^{\frac{2\pi i}{\omega}} = 0 \quad \text{oder} \quad e^{\frac{2\pi i}{\omega}} = \infty$$

entspricht. Statt $u - u_\lambda$ kann natürlich $\frac{1}{u}$ treten.

Man erhält aus (23)

$$e^{\pm\frac{z\pi i}{\omega}} = [u - u_\lambda]_{m_\lambda}^{n_\lambda}, \tag{24}$$

$$\frac{dz}{du} = [u - u_\lambda]_{m_\lambda}^{-m_\lambda}, \tag{25}$$

also

$$\frac{du}{dz} = [u - u_\lambda]_{m_\lambda}^{m_\lambda}. \tag{26}$$

Der Coefficient des ersten Gliedes in dieser Entwickelung ist auch leicht zu bestimmen. Man schreibe nämlich

$$u - u_\lambda = Ce^{\pm\frac{m_\lambda}{n_\lambda}\frac{\pi iz}{\omega}}(1 + \ldots)$$

so wird

$$\frac{du}{dz} = \pm\frac{m_\lambda}{n_\lambda}\frac{\pi i}{\omega}Ce^{\pm\frac{m_\lambda}{n_\lambda}\frac{\pi iz}{\omega}}(1 + \ldots)$$

und also

$$\frac{du}{dz} = \pm\frac{m_\lambda}{n_\lambda}\frac{\pi i}{\omega}(u - u_\lambda)(1 + \ldots). \tag{27}$$

Ist endlich u eine algebraische Function von z, so erhält man teils Entwickelungen von derselben Form wie im ersten Fall, teils auch gewisse Entwickelungen von der Form

$$u - u_\lambda = \left[\frac{1}{z}\right]_{n_\lambda}^{m_\lambda}, \quad m_\lambda > 0, \quad n_\lambda > 0. \tag{28}$$

Die Umkehrung dieser Entwickelung hat die Form

$$z = [u - u_\lambda]_{m_\lambda}^{-n_\lambda} \tag{29}$$

und ergiebt durch Differentiation

$$\frac{dz}{du} = [u - u_\lambda]_{m_\lambda}^{-(m_\lambda + n_\lambda)}, \tag{30}$$

wobei der Coefficient von

$$(u - u_\lambda)^{-1}$$

gleich Null ist. Diese Entwickelung kann auch geschrieben werden

$$\frac{du}{dz} = [u - u_\lambda]_{m_\lambda}^{m_\lambda + n_\lambda} \,. \tag{31}$$

Diese Resultate ergeben teils die von BRIOT und BOUQUET gegebenen Criterien, um zu entscheiden welcher Art eine als eindeutig erkennte Lösung ist. Aber sie enthalten natürlich andererseits auch gewisse Bedingungen welche erfüllt sein müssen, damit u eine Function von endlicher Vieldeutigkeit sein könne.

Die Frage nach den hinreichenden Bedingungen ist dagegen in diesem Falle selbstverständlich nicht so einfach zu erledigen.

In dem Falle z. B. wo es eine Entwickelung der Form

$$\frac{du}{dz} = [u - u_\lambda]_{m_\lambda}^{m_\lambda + n_\lambda}, \quad n_\lambda > 0 \,,$$

giebt, ist man gar nicht sicher dass u eine algebraische Function von z ist, auch wenn man constatirt hat, dass der Coefficient von

$$(u - u_\lambda)^{-1}$$

jeder entsprechenden Entwickelung von $\frac{dz}{du}$ gleich Null ist, und dass ausser den Entwickelungen dieser Art nur Entwickelungen der Form

$$\frac{du}{dz} = [u - u_\lambda]_{m_\lambda}^{m_\lambda - n_\lambda}, \quad n_\lambda > 0 \,,$$

vorkommen. Aber soviel weiss man doch, dass die Function entweder algebraisch ist, oder auch unendlich vieldeutig. Man kann aber ausserdem sagen *wie vieldeutig* die Function ist, wenn sie algebraisch ist, und auch die Werthe von u angeben welche dem Werthe $z = \infty$ entsprechen. Es sind nämlich dies gerade die Werthe, in deren Umgebung die Entwickelungen (31) auftreten. Es sei ferner ν_λ die kleinste ganze Zahl für welche sowohl $\nu_\lambda \frac{m_\lambda}{n_\lambda}$ wie $\nu_\lambda \frac{1}{n_\lambda}$ ganze Zahlen sind; dann giebt $N = \Sigma \nu_\lambda$ die Anzahl der Werthe von u an, welche einem Werthe von z in der Umgebung von $z = \infty$ entsprechen, also die Vieldeutigkeit der Function u. Die algebraische Relation zwischen u und z muss

also, falls sie existirt, vom Grade N in Bezug auf u sein. In Bezug auf z muss sie aber von demselben Grade sein wie die Gleichung

$$F\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$$

in Bezug auf $\frac{du}{dz}$. Denn wir haben gesehen dass z als eine rationale Function von u und $\frac{du}{dz}$ dargestellt werden kann, also als Function von u betrachtet höchstens ebenso vieldeutig sein kann als $\frac{du}{dz}$. Andererseits kann aber umgekehrt immer $\frac{du}{dz}$ als eine rationale Function von u und z dargestellt werden, und die Functionen u und $\frac{du}{dz}$ müssen also als Functionen von u betrachtet gleicher Vieldeutigkeit sein.

Die hypothetische algebraische Relation zwischen u und z muss also die Form haben

$$(32) \qquad G_0(u)z^n + G_1(u)z^{n-1} + G_2(u)z^{n-2} + \ldots + G_n(u) = 0\,,$$

wo n der Grad von $F\left(u, \frac{du}{dz}\right)$ in Bezug auf $\frac{du}{dz}$ ist, und wo man die rationalen Functionen

$$\frac{G_1(u)}{G_0(u)}, \quad \frac{G_2(u)}{G_0(u)}, \ldots \quad \frac{G_n(u)}{G_0(u)}$$

welche höchstens vom Grade N sein können, bis auf gewisse Constanten kennt. Die Aufgabe zu untersuchen, ob diese Constanten so bestimmt werden können, dass die Gleichung (32) durch Differentiation und Elimination von z auf die Gleichung (1) zurückführt, ist natürlich rein algebraischer Natur. Auf diejenigen Algorithmen einzugehen, welche geeignet sind, diese algebraische Untersuchung formell möglichst zu vereinfachen, würde die Grenzen dieser Arbeit überschreiten. Es möge nur im Vorbeigehen bemerkt werden, dass die Zerlegung eines gegebenen algebraischen Differentials in Differentiale der verschiedenen Gattungen, wie sie z. B. in den Vorlesungen des Hrn. WEIERSTRASS

über ABEL'sche Functionen gelehrt wird, einen solchen Algorithmus von vorzüglicher Einfachheit liefert.

Kommt keine Entwickelung der Form (31) vor, wohl aber solche von der Form

$$\frac{du}{dz} = [u - u_\lambda]^{m_\lambda}_{m_\lambda}, \tag{33}$$

so kann die Frage nicht mehr auf so einfache Weise behandelt werden. Ehe wir aber auf die für diesen Fall eigenthümlichen wesentlichen Schwierigkeiten näher eingehen, wollen wir betreffs der algebraischen Functionen einer Exponentialfunction einige allgemeine Betrachtungen anstellen, welche mit der zu behandelnden Frage in einem gewissen Zusammenhang stehen. Es sei

$$G(u, x) = 0 \tag{34}$$

eine irreductible algebraische Gleichung, und es sei u als eine Function von z durch die Gleichung

$$G(u, e^{kz}) = 0 \tag{35}$$

bestimmt. Dann wird gefragt: welche ist die fundamentale Periode dieser Function? Eine einfache Überlegung zeigt, dass dieselbe nicht immer gleich

$$\frac{2\pi i}{k}$$

ist, wie man etwa bei oberflächlicher Betrachtung zu glauben geneigt sein könnte.

Z. B. wenn die gegebene algebraische Gleichung

$$u - x^2 = 0$$

ist, so ist

$$u = e^{2kz}$$

und die fundamentale Periode ist

$$\frac{\pi i}{k},$$

nicht $\frac{2\pi i}{k}$. Wäre die Gleichung zwischen u und v andererseits z. B.

$$u^2 - x = 0$$

so hätte man

$$u = e^{\frac{kz}{2}}$$

und die fundamentale Periode wäre

$$\frac{4\pi i}{k}.$$

Diese einfachen Beispiele zeigen, dass man die Frage nach der fundamentalen Periode mit einer gewissen Vorsicht zu beantworten hat. Die Ergebnisse derselben können aber leicht verallgemeinert werden. Beschreibt z einen geschlossenen Weg, so beschreibt

$$x = e^{kz}$$

einen geschlossenen Weg, der den Punkt $x = 0$ nicht einschliesst.[1]) Und umgekehrt, sobald x einen geschlossenen Weg beschreibt welcher den Punkt $x = 0$ nicht einschliesst, so beschreibt auch $x = e^{kz}$ einen geschlossenen Weg.

Ist u durch die irreductible Gleichung

$$G(u, x) = 0$$

als eine algebraische Function von x definirt, und sind

$$u_1, u_2, \ldots u_n$$

die verschiedenen Werthe welche u annehmen kann, so gehen diese Werthe in einander über wenn x gewisse Wege beschreibt. Jetzt müssen wir aber zwei Fälle unterscheiden. Entweder nämlich kann man von einem dieser Werthe zu allen übrigen gelangen, indem man x nur solche Wege beschreiben lässt, welche den Punkt $x = 0$ nicht einschliessen. Oder auch zerfallen diese Werthe in mehrere Gruppen, so dass man innerhalb jeder Gruppe mit solchen Wegen sämmtliche Werthe verbinden kann, nicht aber zwei Werthe welche zu verschiedenen Gruppen gehören. In diesem Falle muss es möglich sein von einem Werthe der ersten Gruppe zu einem einer anderen Gruppe gehörigen Werthe auf einem Weg zu gelangen welcher den Punkt $x = 0$ einschliesst. Auf diesem Wege müssen aber dann sämmtliche Werthe der ersteren Gruppe in sämmtliche Werthe der letzteren übergehen, und sämmtliche Gruppen enthalten also gleich viele Werthe.

[1]) Dieser Ausdruck im allgemeinsten Sinne verstanden.

Wenn man sich eines Weges bedient, welcher der Punkt $x=0$ nur einmal umkreist, und keinen anderen singulären Punkt einschliesst, so müssen wir sämmtliche Gruppen erhalten, wenn wir x diesen Weg wiederholt beschreiben lassen.

Ist die Anzahl der Gruppen gleich m, die Anzahl der Werthe in jeder Gruppe gleich r', also $r=mr'$, so führe man

$$\xi = x^{\frac{1}{m}}$$

ein. Dann gehen die Werthe einer jeden Gruppe nur in einander über, wenn ξ den Punkt $\xi=0$ umkreist. Als Function von ξ aufgefasst hat also die Function u nur r' Werthe, deren elementare symmetrische Functionen rationale Functionen in ξ sind. Man hat also

$$G_1(u,\xi)=0$$

wo G_1 in Bezug auf u vom Grade r' ist. Die Werthe von u welche zu den anderen Gruppen gehören, befriedigen Gleichungen der Form

$$G_1(u,\alpha\xi)=0$$

wo α eine Wurzel von

(36) $$\alpha^m = 1$$

ist. Man hat also, indem man den Coefficienten der höchsten Potenz von u überall gleich 1 annimmt,

(37) $$G(u,x)=\prod_{\nu=1}^{m} G_1(u,\alpha^\nu\xi)\,,$$

indem man jetzt für α eine primitive Wurzel der Gleichung (36) wählt. Man kann dieses Resultat so aussprechen:

Wenn die Werthe u_ν in der angegebenen Weise in mehrere Gruppen zerfallen, so wird die Gleichung

$$G(u,x)=0$$

durch Adjunction der entsprechenden Wurzel aus x reductibel.

Umgekehrt gilt auch:

Wird die Gleichung

$$G(u,x)=0$$

durch Adjunction der Wurzel $\xi = x^{\frac{1}{m}}$ *reductibel und kann die Gleichung zwischen* u *und* ξ *nicht mehr durch Adjunction einer ganzen Wurzel aus* ξ *reducirt werden, so zerfallen die Werthe* u_ν *in der oben angegebenen Weise in* m *Gruppen.*

Setzt man in einer solchen Gleichung

$$G(u, x) = 0$$

welche durch die Adjunction von $\xi = x^{\frac{1}{m}}$ in m verschiedene Gleichungen zerfällt,

$$x = e^{kz},$$

so wird dieselbe natürlich von m verschiedenen analytischen Functionen befriedigt, von denen jede eine andere derjenigen m Gleichungen befriedigt in welche die gegebene Gleichung zerfällt. Die elementaren symmetrischen Functionen der verschiedenen Werthe jeder dieser m Functionen sind rationale Functionen von

$$\xi = e^{\frac{kz}{m}},$$

und das kleinste Vielfache von

$$\frac{2\pi i}{k}$$

welches eine Periode dieser symmetrischen Functionen, und also der Function u selbst, ist, ist

$$m \, . \, \frac{2\pi i}{k}.$$

Ob dies die fundamentale Periode ist, oder ein Vielfaches derselben, muss aber noch untersucht werden.

Diese Untersuchung ist aber sehr einfach zu erledigen. Haben die elementaren symmetrischen Functionen von u die Periode

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{2\pi i}{k},$$

so bleiben sie, als rationale Functionen von ξ aufgefasst, ungeändert wenn ξ mit einer n:ten Wurzel der Einheit multiplicirt wird, d. h. sie sind rationale Functionen von ξ^n. Auch die ur-

sprüngliche Gleichung kann in diesem Falle nur ganze Potenzen von x^n enthalten; denn man hat

$$G(u, x) = \prod_{\nu=1}^{m} G_1\left(u, \alpha^\nu x^{\frac{n}{m}}\right).$$

Die Resultate dieser kleinen Untersuchung können wir auf die folgende Weise zusammenfassen. *Ist für eine r-deutige Function u des Arguments z, welche als eine algebraische Function einer Exponentialfunction definirt ist, 2ω die fundamentale Periode, so befriedigt u, wenn* $x = e^{\frac{\pi i z}{\omega}}$ *gesetzt wird, eine irreductible algebraische Gleichung vom r:ten Grade in u*

$$G(u, x) = 0$$

welche nicht durch Adjunction einer ganzzahligen Wurzel aus x reductibel gemacht werden kann, und wo die linke Seite nicht als eine ganze Function von u und einer ganzzahligen Potenz von x geschrieben werden kann.

Ist

$$F\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$$

die irreductible algebraische Gleichung, welche zwischen u und $\frac{du}{dz}$ *besteht, so ist die Gleichung*

$$G(u, x) = 0$$

von demselben Grad in x wie die obige Gleichung in $\frac{du}{dz}$.

Denn einerseits kann man aus der Gleichung

$$G(u, x) = 0$$

$\frac{du}{dz}$ als eine rationale Function von u und x ausdrücken, und andererseits kann auch x als rationale Function von u und $\frac{du}{dz}$ dargestellt werden.[1])

In den Entwickelungen von der Form

$$\frac{dz}{du} = [u - u_\lambda]_{m_\lambda}^{-m_\lambda}$$

[1]) Briot, Théorie der fonctions abéliennes, Note B.

zu welchen die Gleichung $F\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$ nothwendig Anlass geben muss, sei der Coefficient des ersten Gliedes k_λ. Ist μ_λ der Zähler der rationalen Zahl m_λ, und lässt man u einen kleinen Kreis um den Punkt $u = u_\lambda$ μ_λ mal beschreiben, so beschreibt auch $\frac{dz}{du}$ einen geschlossenen Weg und die Differenz der Anfangs- und End-Werthe von z ist also ein Vielfaches der Periode. Man erhält also

$$\mu_\lambda k_\lambda \pi i = \nu_\lambda \omega, \quad (\nu_\lambda \text{ eine ganze Zahl}).$$

Die Grössen $\mu_\lambda k_\lambda \pi i$ müssen also ein gemeinschaftliches Mass besitzen. Ist Ω ihr grösstes gemeinschaftliches Mass, so ist

$$(38) \qquad \omega = \frac{\Omega}{\nu}$$

indem ν eine ganze Zahl bedeutet.

Betrachten wir diese ganze Zahl ν als gegeben, so können wir also aus den Coefficienten des ersten Gliedes in den Entwickelungen (26) die Periode 2ω, sowohl als die rationalen Zahlen $\pm n_\lambda$, unmittelbar berechnen.

Was die Bedeutung der Zahlen m_λ und n_λ betrifft, so erinnern wir uns (vgl. S. 638) dass einer Entwickelung von der Form (26) immer eine Entwickelung von der Form (23)

$$(23a) \qquad u - u_\lambda = [x^{\pm 1}]_{n_\lambda}^{m_\lambda}, \quad (m_\lambda > 0)$$

entspricht. Hat ν'_λ analoge Bedeutung, wie ν_λ auf S. 640, so giebt also die Summe N der zu dem Pluszeichen gehörigen ν'_λ an, wie viele Werthe von u einem sehr kleinen Werthe von x entsprechen, d. h. den Grad der Gleichung

$$G(u, x) = 0$$

in Beziehung auf u. Die Summe der zu dem Minuszeichen gehörigen muss übrigens denselben Werth haben. Die in den Entwickelungen (23a) vorkommenden Grössen u_λ sind die Werthe von u, für welche x gleich Null oder unendlich wird, je nachdem auf der rechten Seite x^{+1} oder x^{-1} steht. Wenn wir

$$(39) \qquad G(u, x) = G_0(u)x^n + G_1(u)x^{n-1} + \ldots + G_n(u)$$

schreiben, so kennen wir also n, den höchsten Grad der Functionen $G_0(u) \ldots G_n(u)$, sowie die Functionen $G_0(u)$ und $G_n(u)$ abgesehen von einer multiplicativen Constante.

(Wenn wir dies mit den früheren Ausführungen über Gleichungen der Form $G(u, e^{kz}) = 0$ in Verbindung bringen, so ergiebt sich, wie wir im Vorübergehen bemerken, eine Methode zu untersuchen, ob eine Gleichung

$$G(u, x) = 0$$

durch Adjunction einer ganzen Wurzel aus x reductibel gemacht werden kann, oder nicht. Indem wir nämlich

$$x = e^z$$

setzen, und die entsprechende irreductible Gleichung

$$F\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$$

bilden, so tritt der letztere oder der erstere Fall ein, je nach dem die aus der letzteren Gleichung hergeleitete Zahl N mit dem Grad der ersteren Gleichung in u übereinstimmt, oder nicht.)

Die Untersuchung, ob die noch unbekannten Coefficienten in (39) sich so bestimmen lassen, dass die Gleichung

$$F\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$$

besteht, ist, wie im früher behandelten Falle, ganz algebraischer Natur.

Die einzige Schwierigkeit, welche hier neu auftritt, besteht also darin, dass wir den Werth der ganzen Zahl ν nicht bestimmen können. Wie wesentlich aber diese Schwierigkeit mit der Natur unserer Aufgabe verknüpft ist, sieht man durch die Betrachtung eines einfachen speciellen Falles am leichtesten ein.

Die gegebene Differentialgleichung sei z. B.

$$(40) \qquad (u - u_0)^2 \left(\frac{du}{dz}\right)^2 = u^4 + \alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta,$$

wo wir annehmen wollen dass sowohl die Grösse u_0 wie die Null-

stellen der rechten Seite reell sind. Diese Nullstellen wollen wir mit u_1, u_2, u_3, u_4 bezeichnen, und annehmen dass

$$u_1 < u_2 < u_3 < u_4$$

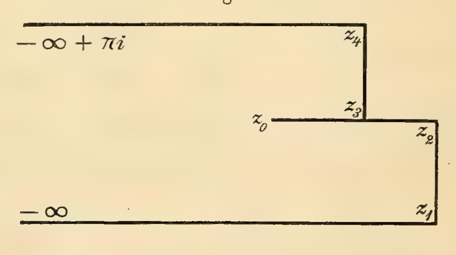
sei, mit Ausschliessung der Gleichheit zweier Grössen. Da die Differentialgleichung (40) bei der Substitution von $au+b$ an der Stelle von u ihre allgemeine Gestalt nicht ändert, so können wir annehmen, dass zwei der Grössen u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 gegebene endliche Werthe haben, z. B. $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, nach welcher Transformation unsere Gleichung also nur drei Parameter enthält. Die durch die Gleichung (40) definirte Relation zwischen u und z vermittelt eine conforme Abbildung der einfachsten Art, deren Betrachtung sehr geeignet ist, uns in die Natur der von uns besprochenen Aufgabe einen tieferen Einblick zu geben.

Wenn nämlich u die reelle Axe beschreibt, von $u = -\infty$ bis $u = u_1$, so beschreibt z eine der reellen Axe parallele Gerade, wir können annehmen, die reelle Axe selbst, von $z = -\infty$ bis zu einem gewissen endlichen Werthe $z = z_1$, und beschreibt diesen Weg ohne umzukehren, wenn wir $u_0 > u_1$ annehmen. Wir wollen annehmen dass u_0 die Ungleichung

$$u_2 < u_0 < u_3$$

befriedigt, was, wie wir sehen werden, der einzige Fall ist, wo u endlich vieldeutig sein kann. Wenn u den Werth u_1 auf einem unendlich kleinen in der oberen Halbebene gelegenen Halbkreis umgeht, so beschreibt z einen unendlich kleinen Viertelkreis. Indem dann u von u_1 bis u_2 auf der reellen Axe weiter geht, beschreibt z die zur reellen Axe senkrechte Gerade $z_1 \ldots z_2$. Wenn u von u_2 über u_0 bis u_3 geht, so geht z von z_2 bis z_0 (vgl. die Figur), kehrt da um, indem einem Halbkreise über u_0 ein ganzer Kreis um z_0 entspricht, und geht in der entgegengesetzten Richtung bis zu einem Werthe z_3. Endlich entspricht dem noch übrigen Teile der reellen Axe in der

Fig. 1.



u-Ebene, der Weg $z_3 \ldots z_4 \ldots (-\infty + \pi i)$ in der z-Ebene. Der Abstand der Geraden $-\infty \ldots z_1$ und $z_4 \ldots (-\infty + \pi i)$ ist gleich π, was wir schon durch die Bezeichnung $(-\infty + \pi i)$ angedeutet haben.

Hierdurch ist aber, da $\frac{dz}{du}$ in der oberen Halbebene nie Null wird, nach dem fundamentalen Satze der Theorie der conformen Abbildung, bewiesen, dass unsere Relation die conforme Abbildung der oberen Halbebene auf den links von der Begrenzungslinie $(-\infty) \ldots z_1 \ldots z_2 \ldots z_0 \ldots z_3 \ldots z_4 (-\infty + \pi i)$ gelegenen Bereich vermittelt.

Daraus folgt aber nach einem bekannten Satze, dass die Function u von z über die ganze Ebene fortgesetzt werden kann, der Art dass sie in Punkten welche in Bezug auf eine der Geraden $(-\infty) \ldots z_1$, $z_1 \ldots z_2$, $z_2 \ldots z_3 \ldots z_0$, $z_3 \ldots z_4$, $z_4 \ldots (-\infty + \pi i)$ symmetrisch liegen, conjugirt complexe Werthe annehmen.

Daraus folgt aber sogleich, dass unsere Function u die folgenden Perioden hat

$$2\pi i, \quad 2(z_2 - z_1), \quad 2(z_2 - z_3).$$

Von diesen ist

$$2(z_2 - z_1)$$

imaginär,

$$2(z_2 - z_3)$$

reell. Damit unsere Function u eine endlich vieldeutige Function mit nur einer Fundamentalperiode sei, muss man also haben

$$z_2 = z_3,$$

$\frac{z_2 - z_1}{\pi i}$ gleich einer rationalen Zahl.

Fig. 2.

z_4, z_3, z_0, z_2, z_1

Umgekehrt ist die Function, durch welche ein Bereich wie der in Fig. 2 gegebene, wo

$$z_4 - z_1 = \pi i$$

$$z_2 - z_1 = \mu \pi i,$$

und μ rational ist, auf die obere

Halbebene conform abgebildet wird, eine endlich vieldeutige Function, welche einer Differentialgleichung der Form

$$(u - u_0)^2\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = u^4 + \alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta$$

Genüge leistet.

Diese Gleichung enthält in diesem Fall nur zwei Parameter, von denen der erstere, $z_2 - z_0$, völlig arbiträr gewählt werden kann, der andere, $\frac{z_2 - z_1}{\pi i}$ $\left(\text{oder } \frac{z_4 - z_2}{z_2 - z_1}\right)$ nur alle reellen und rationalen Werthe annehmen kann. Ist $z_2 - z_1 = \frac{p}{q}\pi i$, wo p und q keinen gemeinschaftlichen Theiler besitzen sollen, so hat unsere Function die Periode

$$\frac{2\pi i}{q}.$$

Wenn wir die Differentialgleichung (40) nach den oben auseinandergesetzten allgemeinen Principien zu behandeln suchen, so erhalten wir zwei Entwickelungen der Form

$$\frac{du}{dz} = [u - u_\lambda]_{m_\lambda}^{m_\lambda}$$

nämlich in der Umgebung von $u = \infty$. Für

$$u' = \frac{1}{u}$$

ist nämlich

$$\left(\frac{du'}{dz}\right) = u'^2 \frac{1 + \alpha u' + \beta u'^2 + \gamma u'^3 + \delta u'^4}{(1 - u_0 u')^2}$$

also

$$\frac{du'}{dz} = \pm [u']_1^1 .$$

Der Coefficient des ersten Gliedes ist in der einen Entwickelung gleich $+1$, in der anderen gleich -1. μ_λ ist gleich 1. Also haben wir

$$\Omega = \pi i$$

und die fundamentale Periode muss von der Form

$$\frac{2\pi i}{\nu}$$

sein, indem ν eine ganze Zahl bedeutet. Wie wir aber soeben gesehen haben, kann auch jeder der unendlich vielen Fälle

$$\nu = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

wirklich eintreten.

Die bisherigen Ausführungen können in dem folgenden Satze zusammengefasst werden:

Wenn wir zwischen den drei Parametern u_0, u_3, u_4 der Differentialgleichung

$$(u - u_0)^2\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = u(u-1)(u-u_3)(u-u_4)$$

die Relation

$$\int_1^{u_3} \frac{(u-u_0)du}{\sqrt{u(u-1)(u-u_3)(u-u_4)}} = 0$$

als erfüllt annehmen, oder, um uns auf den einfachsten Fall zu beschränken, wenn wir u_3 und u_4 reell und

$$1 < u_3 < u_4$$

annehmen, und u_0 durch die Gleichung

$$u_0 \int_1^{u_3} \frac{du}{\sqrt{u(u-1)(u_3-u)(u_4-u)}} = \int_1^{u_3} \frac{udu}{\sqrt{u(u-1)(u_3-u)(u_4-u)}}$$

bestimmen, so giebt es in jeder Umgebung eines Werthepaares $u_3 u_4$ andere Werthepaare, für welche u eine algebraische Function einer Exponentialfunction wird.

Wir können hieraus schliessen, und zwar für den allgemeinen Fall, da derselbe natürlich jedenfalls nicht einfacher behandelt werden kann als der specielle, dass wenn es gelingen soll, die behandelte Aufgabe durch einen algebraisch-arithmetischen Algorithmus zu behandeln, so muss dieser Algorithmus ein solcher sein welcher auf die arithmetische Beschaffenheit der Parameter

Rücksicht nimmt. Und in der That ist es auch Hrn. TCHEBYCHEFF gelungen, die Aufgabe für den oben angegebenen speciellen Fall, d. h. für die Differentialgleichung

$$(u - u_0)^2\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = u^4 + \alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta$$

für den Fall vollständig zu behandeln, wo α, β, γ, δ reelle rationale Zahlen sind.[1]) Herr TCHEBYCHEFF hat seine Methode ohne Beweis publicirt. Dieser wurde später von Herrn ZOLOTAREFF geliefert. Herr ZOLOTAREFF hat überdies eine Verallgemeinerung der Methode gegeben; worin aber diese besteht, kann ich nicht genau angeben, da ich nicht Gelegenheit hatte, die bezügliche Arbeit des Herrn ZOLOTAREFF[4]) zu sehen, und die Angabe bei ENNEPER[4]) augenscheinlich fehlerhaft ist.

Ob man auf Grund dieser Arbeiten die Hoffnung zu hegen berechtigt ist, auch den allgemeinen Fall auf analoge Weise behandeln zu können, möge dahingestellt bleiben. Die bekannten Arbeiten des Herrn KÖNIGSBERGER nehmen auf arithmetische Gesichtspunkte keine Rücksicht, erledigen auch natürlich nicht die hier gestellte Aufgabe.

Durch das oben Gesagte ist natürlich nicht ausgeschlossen, dass man für ausgedehnte Classen von Differentialgleichungen der betrachteten Form beweisen kann, dass sie sich *nicht* durch algebraische Functionen einer Exponentialfunction integriren lassen.

In dem oben betrachteten speciellen Falle könnte ja diese Möglichkeit nur dann eintreten wenn u_0 zwischen u_2 und u_3 liegt, und auch wenn dieser Fall eintritt, genügt es, constatiren zu können, dass das Integral

---

[1]) Sur l'intégration de la différentielle $\frac{x+A}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}}\,dx$. Bulletin de l'Académie de S:t Pétersbourg, t. 3, 1860, und Liouville's Journal, 2:e série, t. 9, 1864.

[2]) Sur la méthode d'intégration de M. TCHÉBYCHEF. Math. Ann., Bd 5, 1872 und Liouville's Journal, 2:e série, t. 19, 1874.

[3]) Théorie des nombres entiers complexes, avec une application au calcul intégral. S:t Pétersbourg, 1874.

[4]) Elliptische Functionen, 2:e Auflage, Halle 1890, S. 512.

$$\int_{u_2}^{u_3} \frac{(u - u_0)du}{\sqrt{u^4 + \alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta}}$$

einen von Null verschiedenen Werth hat, um sicher zu sein, dass u nicht als eine algebraische Function einer Exponentialfunction aufgefasst werden kann.

Ehe wir diesen Gegenstand verlassen, will ich noch zeigen wie die Betrachtung einer Abbildungsaufgabe wie die obige mit der grössten Leichtigkeit zur wirklichen Aufstellung der reducirbaren Gleichungen von der Form

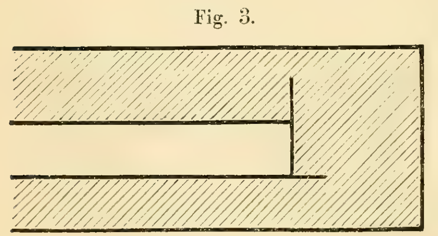
$$\frac{du}{dz} = R(u)\sqrt{F(u)}$$

führt, wo $R(u)$ eine rationale, $F(u)$ eine ganze Function bedeuten, deren sämmtliche Null- und Unendlichkeitstellen wir der Einfachheit halber reell annehmen wollen. Zuerst sieht man fast unmittelbar, dass die Function u nur dann endlicher Vieldeutigkeit sein kann, wenn nur in einem einzigen Punkte Entwickelungen der Form

$$\frac{du}{dz} = [u - u_\lambda]_{m_\lambda}^{m_\lambda}$$

vorkommt. Denn sobald u für mehr als einen Werth von u logarithmisch unendlich wird, so wird die obere Halbebene auf einen Bereich abgebildet, der im einfachsten Falle eine Gestalt etwa wie die in Fig. 3 angegebene hat. Man erhält also nothwendig, wie man sich leicht überzeugt, eine reelle Periode, da die Begrenzung, nach den einfachsten Principien der Theorie der conformen Abbildung, nicht sich selbst schneiden kann. Durch Ausführung einer linearen gebrochenen Substitution auf u können wir diesen ausgezeichneten Punkt unendlich fern verlegen, wodurch unsere Differentialgleichung offenbar die Gestalt annimmt

Fig. 3.



$$F_1(u)^2\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = F(u)$$

wo $F(u)$ eine ganze Function von einem geraden Grade $2m$, $F_1(u)$ eine ganze Function vom Grade $m-1$ ist. Die Lage der Nullstellen von $F(u)$ und $F_1(u)$ ist auch gewissen Beschränkungen unterworfen. In der That, wenn die Nullstellen der Function $F(u)$ in aufsteigender Folge geordnet

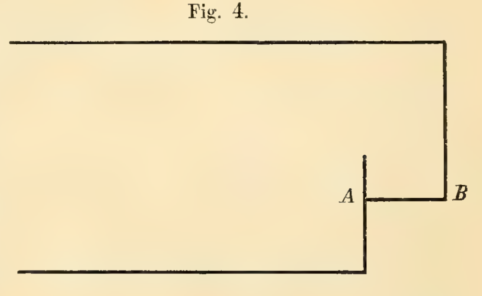
$$u_1, u_2, \ldots, \quad u_{2m-1}, u_{2m}$$

sind, und die Nullstellen von $F_1(u)$ in derselben Weise geordnet

$$u'_1, u'_2, \ldots, \quad u'_{m-1},$$

so kann u nur dann eine Function endlicher Vieldeutigkeit sein, wenn u'_r immer zwischen u_{2r} und u_{2r+1} liegt. Es treten nämlich in jedem anderen Falle nothwendig reelle Perioden auf. Man erhält nämlich die obere Halbebene auf einen Bereich abgebildet der etwa so aussieht wie die Fig. 4 zeigt, und die Function u hat dann die reelle Periode $2AB$.

Fig. 4.



Indem wir jetzt dazu übergehen, durch einige einfache Beispiele anzudeuten, welche Hülfe man aus der Betrachtung der Abbildungsaufgabe für die wirkliche Berechnung von reducirbaren Gleichungen ziehen kann, wollen wir uns wieder auf den einfachsten Fall $m=2$ beschränken.

Man gehe also von der Differentialgleichung

$$(41) \qquad (u-u_0)^2\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = (u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)(u-u_4)$$

aus, unter der Annahme dass u_0 zwischen u_2 und u_3 liegt $(u_1 < u_2 < u_3 < u_4)$ und dass man bei einer approximativen Berechnung nicht im Stande war zu constatiren, dass das Integral

$$\int_{u_2}^{u_3} \frac{(u - u_0)du}{\sqrt{(u - u_1)(u - u_2)(u_3 - u)(u_4 - u)}}$$

einen von Null verschiedenen Werth hat.

Ferner nehme man an, dass man auch das Integral

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{(u_0 - u)du}{\sqrt{(u - u_1)(u_2 - u)(u_3 - u)(u_4 - u)}}$$

approximativ berechnet hat, und dass sein Werth innerhalb der Approximationsgrenzen durch

$$\frac{p}{q}\pi$$

dargestellt werden kann, wo p und q relativ kleine ganze Zahlen sind. Es entsteht dann das Bedürfniss, ein einfaches Verfahren zu besitzen um zu untersuchen, ob die Annahme $r = q$ in der Gleichung (38) auch wirklich zur Reduction des gegebenen Integrals auf ein logarithmisches führt.

Es ist eben ein solches Verfahren, welches ich aus der mehrfach genannten Abbildungsaufgabe herzuleiten die Absicht habe.

Man betrachte z. B. den einfachsten Fall: $q = 2$, also $p = 1$. Die Figur auf welche die obere Halbebene abgebildet wird, unter der Voraussetzung, dass die Reduction auf ein logarithmisches Integral möglich ist, ist dann die hier abgebildete (Fig. 5). Der Abstand von z_1 bis $(z_2 = z_3)$, und ebenso derjenige von $(z_2 = z_3)$ bis z_4 ist gleich $\frac{\pi}{2}$.

Fig. 5.

Jetzt führen wir noch die Function v ein welche den Bereich $(-\infty)z_1 z_2 z_0 \left(-\infty + \frac{\pi i}{2}\right)$ auf die obere Halbebene abbildet. Diese Function befriedigt eine Differentialgleichung

$$\left(\frac{dv}{dz}\right)^2 = 4(v - v_1)(v - v_2), \tag{42}$$

indem $v = v_1$, $v = v_2$ diejenigen Punkte der reellen Axe sind, welche den Eckpunkten $z = z_1$, $z = z_2$ entsprechen. Man überzeugt sich leicht, dass v als eine ganze rationale Function zweiten Grades von u dargestellt werden kann, mit den ersten Coefficienten gleich 1.

Denn jedem Werthe von u entspricht ein Werth von z innerhalb eines Gebietes, welches aus dem in der Fig. 5 abgebildeten und einem symmetrischen Gebiete zusammengesetzt wird. In diesem Gebiete ist aber v eindeutig und nimmt jeden Werth zweimal an. Dem Werthe $u = \infty$ entspricht $v = \infty$. In der Umgebung von $u = \infty$ hat man

$$z = \log u + \ldots$$

und in der Umgebung von $v = \infty$

$$z = \frac{1}{2} \log v + \ldots ;$$

also in der Umgebung von $u = \infty$

$$v = u^2 + \ldots .$$

Reellen Werthen von u entsprechen reelle Werthe von v, und zwar hat man für

$$\begin{array}{llllll} u = u_1, & u_2, & u_0, & u_3, & u_4, \\ v = v_1, & v_2, & v_0, & v_2, & v_1 \end{array}$$

und in der Umgebung von $u = u_0$ augenscheinlich

$$v - v_0 = [u - u_0]_1^2 = (u - u_0)^2 ,$$

da v, ebensowohl als z, umkehren muss, wenn u den Werth u_0 passirt.

Man kann also schreiben:

$$(43) \quad \begin{aligned} v - v_1 &= (u - u_1)(u - u_4), \\ v - v_2 &= (u - u_2)(u - u_3), \\ v - v_0 &= (u - u_0)^2 , \\ \frac{dv}{du} &= 2(u - u_0) . \end{aligned}$$

Umgekehrt giebt natürlich die Substitution dieser Ausdrücke in

$$\left(\frac{dv}{dz}\right)^2 = 4(v - v_1)(v - v_2)$$

immer

$$(u - u_0)^2\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = (u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)(u - u_4) .$$

Es wäre übrigens nicht schwierig die Abbildungsaufgabe so zu verallgemeinern, dass die Beschränkung dass $u_0 u_1 \ldots u_4$ reell sein sollen, wegfällt. Thut man das, so wird also bewiesen, dass die Differentialgleichung (41) nur dann, und immer dann, durch eine zweideutige Function, welche eine algebraische Function einer Exponentialfunction ist, integrirt werden kann, wenn sie durch die Substitution (43) aus der Differentialgleichung (42) hervorgeht.

Die Gleichungen (43) geben zwischen $u_0 u_1 u_2 u_3 u_4$ zwei Relationen. Erstens nämlich muss

$$(u - u_1)(u - u_4) - (u - u_2)(u - u_3) = \text{Const.}$$

sein, d. h.

$$u_1 + u_4 = u_2 + u_3 ;$$

und zweitens ist u_0 als die Nullstelle von

$$\frac{d}{du}(u - u_1)(u - u_4) \quad \text{oder} \quad \frac{d}{du}(u - u_2)(u - u_3)$$

bestimmt. Man muss also haben

$$2u_0 = u_1 + u_4 = u_2 + u_3 .$$

In den Coefficienten α, β, γ, δ von

$$u^4 + \alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta = (u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)(u - u_4)$$

ausgedrückt, giebt dies

$$\text{(44)} \qquad \begin{aligned} \alpha^3 - 4\alpha\beta + 8\gamma &= 0 , \\ u_0 &= -\frac{\alpha}{4} . \end{aligned}$$

Für $\nu = 3$ erhält man in derselben Weise, indem u_{34}, $u_{4\infty}$ zwei Werthe von u bedeuten, welche unter der Voraussetzung dass $u_0, u_1, \ldots, u_4$ reell und

$$u_1 < u_2 < u_0 < u_3 < u_4$$

ist, und dass von den Integralen

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{(u_0 - u)du}{\sqrt{(u - u_1)(u_2 - u)(u_3 - u)(u_4 - u)}},$$

$$\int_{u_3}^{u_4} \frac{(u - u_0)}{\sqrt{(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)(u_4 - u)}}$$

die erstere die kleinere ist, die Ungleichungen

$$u_3 < u_{34} < u_4,$$
$$u_4 < u_{4\infty} < \infty$$

befriedigen,

(45)
$$\begin{aligned} v - v_1 &= (u - u_1)(u - u_{34})^2, \\ v - v_2 &= (u - u_2)(u - u_3)(u - u_4), \\ v - v_0 &= (u - u_0)^2(u - u_{4\infty}), \\ \frac{dv}{du} &= 3(u - u_0)(u - u_{34}), \\ \frac{dv}{dz} &= 9(v - v_1)(v - v_2). \end{aligned}$$

Man erhält hieraus leicht den folgenden Satz:

Damit die Differentialgleichung

$$(u - u_0)^2\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = u^4 + \alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta$$

u als eine dreideutige Function von z definire, ist hinreichend (und auch, wie man durch Betrachtung einer verallgemeinerten Abbildungsaufgabe leicht allgemein aufweist, nothwendig) dass die Gleichungen

(46)
$$\begin{aligned} u^4 + \alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta &= 0, \\ 2u^2 + \alpha u + \beta - \frac{\alpha^2}{4} &= 0 \end{aligned}$$

beide durch den Werth

$$u = 3u_0 - \frac{\alpha}{2} = u_1$$

befriedigt werden. Durch die Substitution

$$(47) \qquad v - v_1 = (u - u_1)\left(u + u_1 + \frac{\alpha}{2}\right)^2,$$

welche auch

$$(47a) \quad v - v_2 = u^3 + (u_1 + \alpha)u^2 + (u_1^2 + \alpha u_1 + \beta)u + u_1^3 + \alpha u_1^2 + \beta u_1 + \gamma$$

geschrieben werden kann, geht nämlich dann die Differentialgleichung

$$\left(\frac{dv}{dz}\right)^2 = 9(v - v_1)(v - v_2)$$

in

$$(u - u_0)^2\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = u^4 + \alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta$$

über.

Da diese Beispiele wohl genügen, um die Methode klar zu legen, gehen wir jetzt zum dritten Fall über, indem wir annehmen dass die Differentialgleichung

$$F\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$$

nur Entwickelungen der Form

$$\frac{du}{dz} = [u - u_\lambda]_{m_\lambda}^{m_\lambda - n_\lambda} \quad (u_\lambda > 0)$$

giebt.

Ist in diesem Fall u eine m-deutige Function von z mit dem fundamentalen Periodenpaare 2ω, $2\omega'$, so befriedigt u eine Gleichung

$$(48) \qquad u^m + R_1 u^{m-1} + R_2 u^{m-2} + \ldots + R_m = 0$$

wo $R_1, R_2, \ldots R_m$ rationale Functionen von

$$\wp(z \mid \omega, \omega') \quad \text{und} \quad \wp'(z \mid \omega, \omega')$$

sind. Von dieser Gleichung kann angenommen werden, einerseits, dass sie nicht durch Adjunction einer Function $\wp(z)$ mit kleinerem Periodenparallelogram und ihrer ersten Derivirten $\wp'(z$ reductibel gemacht werden kann, und andererseits, dass die Coefficienten $R_1, R_2, \ldots R_m$ nicht sämmtlich als rationale Functionen eines Functionenpaars $\wp(z)$, $\wp'(z)$ mit grösserem Periodenparal-

lelogram dargestellt werden können. Es können übrigens sowohl $\wp(z)$ wie $\wp'(z)$ rational in u und $\frac{du}{dz}$ ausgedruckt werden.

Sind diese Ausdrücke

(49) $$\wp z = R\left(u, \frac{du}{dz}\right),$$

(50) $$\wp'(z) = R_1\left(u, \frac{du}{dz}\right),$$

so muss natürlich die Gleichung

(51) $$\wp'(z)^2 = 4\wp z^3 - g_2\wp z - g_3$$

durch Einsetzung derselben auf Grund der Gleichung

$$F\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$$

zu einer Identität werden. Die ganze Zahl μ, welche die Anzahl der Werthepaare $u, \frac{du}{dz}$ angiebt welche gleichzeitig

$$\wp(z) = R\left(u, \frac{du}{dz}\right),$$

$$0 = F\left(u, \frac{du}{dz}\right)$$

machen, und ausserdem $\wp'(z)$ ein bestimmtes Vorzeichen geben, wird als der *Grad* der Transformation bezeichnet, durch welche die Differentialgleichung

$$F\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$$

auf die elliptische Differentialgleichung

$$\wp'(z)^2 = 4\wp z^3 - g_2\wp z - g_3$$

reducirt wird.

Wird dieser Grad als gegeben angesehen, so ist es eine rein algebraische Aufgabe, zu untersuchen, ob die Gleichung $F\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$ durch eine Transformation dieses Grades auf eine elliptische Differentialgleichung reducirt werden kann, oder nicht.

Die Gleichung (48) kann nämlich höchstens vom Grade μ sein, und wenn n der Grad der Function

$$F\left(u, \frac{du}{dz}\right)$$

in Beziehung auf $\frac{du}{dz}$ bedeutet, so sind $R_1, R_2, \ldots R_m$ elliptische Functionen von z vom Grade n höchstens, und enthalten also nur eine beschränkte Anzahl unbestimmter Constanten.

Auf diese allgemeinen Untersuchungen wollen wir aber hier nicht näher eingehen, sondern beschränken uns, um die Natur des Problems in gewisser Hinsicht besser erkennen zu können, auf den Fall der hyperelliptischen Differentialgleichungen. In diesem Falle sind wir berechtigt, die Coefficienten der Gleichung (48) als gerade Functionen von z anzunehmen, also als rationale Functionen von $\wp(z)$, und zwar lineare, da sie elliptische Functionen zweiten Grades sein sollen. Umgekehrt ist also $\wp(z)$ eine rationale Function von u, $\wp(z) = R(u)$, und zwar vom Grade μ, da man $\wp'(z) = R'(u)\frac{du}{dz}$ erhält und verschiedene Vorzeichen von $\frac{du}{dz}$ also verschiedene Vorzeichen von $\wp'(z)$ entsprechen.

Speciell wollen wir die Gleichung

$$(52) \qquad (u - u_0)^2\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = A(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3)(u-u_4)(u-u_5)(u-u_6)$$

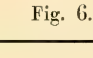
ein bischen näher studiren, unter der Voraussetzung dass u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 sämmtlich reell sind. Die Indices seien so gewählt, dass entweder

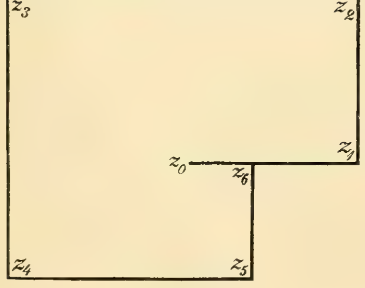
$$u_{\alpha+1} > u_\alpha$$

oder u_α die grösste, $u_{\alpha+1}$ die kleinste derselben ist. Die Constante A möge so angenommen werden, dass

$$A(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)(u - u_4)(u - u_5)(u - u_6)$$

für $u = u_0$ positiv wird. Der Bereich auf welchen die obere Halbebene durch die Gleichung (52) conform abgebildet wird, hat dann etwa die Gestalt welche die Fig. 6 aufweist. Die Buchstaben sind so gewählt, dass dem Werth $u = u_\alpha$ der Werth $z = z_\alpha$ entspricht. Man sieht hieraus


Fig. 6.



dass u die Perioden hat

$$2(z_2 - z_3)\,, \quad 2(z_5 - z_4)$$

welche reell sind, und

$$2(z_2 - z_1)\,, \quad 2(z_6 - z_5)$$

welche rein imaginär sind. Damit u eine Function endlicher Vieldeutigkeit sei, ist also nothwendig und hinreichend dass die Quotienten

$$\frac{z_5 - z_4}{z_2 - z_3} \quad \text{und} \quad \frac{z_6 - z_5}{z_2 - z_1}$$

beide rationale Werthe haben.

Hieraus kann man, da die betrachtete Abbildungsaufgabe mit der Integration der Differentialgleichung (52) sich völlig deckt, den Schluss ziehen, dass in jeder Umgebung eines Werthsystems

$$A,\ u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5,\ u_6$$

man andere Werthsysteme finden kann, für welche die Function u sich auf elliptische Functionen reducirt.

Hieraus kann man aber ferner schliessen, dass die Frage ob ein gegebenes Abelsches Integral erster Gattung überhaupt durch eine algebraische Transformation auf ein elliptisches Integral reducirbar ist, jedenfalls nur unter Berücksichtigung arithmetischer Gesichtspunkte erledigt werden kann. Soviel dem Verfasser bekannt, ist bisher in dieser Richtung gar nichts geleistet.

Es sei jetzt ω das grösste gemeinschaftliche Mass von $(z_1 - z_4)$ und $(z_2 - z_2)$ und man setze

$$z_2 - z_3 = m_1 \omega\,,$$
$$z_5 - z_4 = m_2 \omega\,;$$

ebenso sei ω' das grösste gemeinschaftliche Mass von $(z_2 - z_1)$ und $(z_6 - z_5)$ und zwar

$$z_2 - z_1 = m'_1 \omega'\,,$$
$$z_6 - z_5 = m'_2 \omega'\,.$$

Dann hat also unsere Function das fundamentale Periodenpaar

$$2\omega\,, \quad 2\omega'\,,$$

und zu jedem Werth

$$z \equiv \bar{z} \mod 2\omega, 2\omega'$$

gehören augenscheinlich

$$m = m_1 m'_1 + m_2 m'_2$$

verschiedene Werthe von u.

Bilden wir jetzt die zu diesem Periodenpaare gehörige Function

$$s = \wp(z - z_1 \mid \omega, \omega')$$

so ist dieselbe als eine rationale Function m:ten Grades von u darstellbar. Für reelle Werthe von u ist diese Function reell, und es ist leicht diejenigen Werthe von s anzugeben welche den ausgezeichneten Werthen von u, $u = u_1$, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, entsprechen. Um dies näher zu sehen, betrachten wir ein Paar der einfachsten Fällen mehr im Detail.

Man setze zuerst

$$m = 2$$

voraus.

Damit

$$m_1 m'_1 + m_2 m'_2 = 2$$

Fig. 7.



sei, für positive ganzzahlige Werthe von m_1, m'_1, m_2, m'_2, muss man haben

$$m_1 = m'_1 = m_2 = m'_2 = 1$$

Die Fig. 6 geht in diesem Fall in die hier abgebildete über. (Fig. 7).

Statt $\wp z$ wollen wir lieber eine Lösung der formell allgemeineren Differentialgleichung

$$(53) \qquad \left(\frac{ds}{dz}\right)^2 = C(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4)$$

nehmen, welche für $z = z_1$ den Werth

$$s = s_1$$

annimmt.

Die Grössen s_1, s_2, s_3, s_4 mögen sich in dieser Ordnung folgen, dieser Ausdruck in demselben Sinne verstanden wie betreffs der Grössen $u_1 \ldots u_6$.

Für

$$u = u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5,\ u_6$$

hat man

$$s = s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4,\ s_5,\ s_1\,.$$

Für einen Werth von u zwischen u_3 und u_4 welcher u_{34} heissen möge, hat man

$$s = s_4\,,\quad \frac{ds}{du} = 0\,.$$

Für $u = u_0$ ist auch

$$\frac{ds}{du} = 0\,;$$

den zugehörigen Werth von s bezeichnen wir mit s_0. Der Einfachheit halber wollen wir

$$u_3 = \infty\,,\quad u_4 = 0\,,\quad u_5 = 1$$
$$s_4 = \infty\,,\quad s_1 = 0\,,\quad s_2 = 1$$

annehmen, was ja immer durch eine lineare Transformation erreicht werden kann. Die Bedingungen dass s eine rationale Function von u sein soll, welche für $u = u_{34}$ unendlich zweiter Ordnung, für $u = u_1$ und $u = v_6$ gleich Null und für $u = \infty$ gleich s_3 sein soll, bestimmen s vollständig, und zwar kann man schreiben

(54) $$s = s_3\frac{(u - u_1)(u - u_5)}{(u - u_{34})^2}\,.$$

Man muss aber ausserdem haben

$$s = 1 \quad \text{für} \quad u = 1,\ u = u_2\,,$$
$$s = s_3 \quad \text{für} \quad u = 0\,.$$

Die dritte Bedingung giebt

$$u_{34}^2 = u_1 u_6\,.$$

Die beiden ersteren geben

(55) $$s - 1 = (s_3 - 1)\frac{(u - 1)(u - u_2)}{(u - u_{34})^2}\,,$$

also in Verbindung mit der dritten

$$u_{34}^2 = u_2\,.$$

Also muss man haben

(56) $$u_2 = u_6 u_1 .$$

Ist umgekehrt diese Identität erfüllt, und man bestimmt u_{34} durch die Gleichung

$$u_{34}^2 = u_2 = u_6 u_1 ,$$

$$u_{34} \text{ negativ (denn } u_3 = \infty ,\ u_4 = 0),$$

so kann die Substitution

$$s = s_3 \frac{(u - u_1)(u - u_6)}{(u - u_{34})^2}$$

ebensowohl in einer jeden der folgenden Formen geschrieben werden:

$$s - 1 = (s_3 - 1) \cdot \frac{(u - 1)(u - u_2)}{(u - u_{34})^2} ,$$

$$s - s_3 = -(s_3 - 1)(1 - u_{34})^2 \cdot \frac{u}{(u - u_{34})^2} ,$$

und man erhält

$$\frac{ds}{du} = (s_3 - 1)(1 - u_{34})^2 \frac{u + u_{34}}{(u - u_{34})^3} .$$

Schreiben wir

$$u_0 = - u_{34} ,$$

so geht die Differentialgleichung

$$\left(\frac{ds}{dz}\right)^2 = \frac{(1 + u_0)^2}{s_3} s(s - 1)(s_3 - s)$$

durch die obige Substitution in

$$(u - u_0)^2 \left(\frac{du}{dz}\right)^2 = u(u - 1)(u - u_6)(u - u_1)(u - u_2)$$

über.

Diese Transformation ist, wie man sieht, die bekannte JACOBIsche.[1])

Eben so leicht erhält man die Reductionsformeln welche einem grösseren Werthe von m entsprechen. Soll z. B. $m = 3$ sein, so giebt die Gleichung

$$m_1 m'_1 + m_2 m'_2 = 3$$

---

[1]) Anzeige von Legendre, Fonctions elliptiques, 3:e supplément, Nachschrift, Gesammelte Werke, Bd 1, S. 380.

entweder

$$m_1 = 2\,, \quad m'_1 = 1\,, \quad m_2 = 1\,, \quad m'_2 = 1$$

oder

$$m_1 = 1\,, \quad m'_1 = 2\,, \quad m_2 = 1\,, \quad m'_2 = 1$$

oder auch die Werthe, welche sich durch Vertäuschung der Indices 1 und 2 aus diesen Gleichungen ergeben, und welche als von den gegebenen nicht wesentlich verschieden angesehen werden können. Die entsprechenden Abbildungen sind durch die Fig. 8 und 9 versinnlicht. Wir begnügen uns, für den Fall der Fig. 9 die Reductionsformeln auszuschreiben. Diejenigen welche der Figur 8 entsprechen unterscheiden sich nur in Betreff der relativen Grösse der eingehenden Werthe von den hier gegebenen.

Fig. 8.

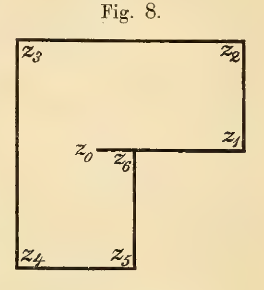


Fig. 9.

Wir erhalten für

$$\begin{array}{l} u = u_1\,,\ u_{12}\,,\ u_2\,,\ u_3\,,\ u_{34}\,,\ u'_{34}\,,\ u_4\,,\ u_5\,,\ u_6\,,\ u_0 \\ s = s_1\,,\ s_2\,,\ s_1\,,\ s_4\,,\ s_3\,,\ s_4\,,\ s_3\,,\ s_2\,,\ s_1\,,\ s_0 \end{array}$$

wobei die zu $u = u_{12}, u_{34}, u'_{34}, u_0$ gehörigen Werthe doppelt zu rechnen sind.

Wenn wir

$$\begin{array}{lll} u_3 = \infty\,, & u_4 = 0\,, & u_5 = 1 \\ s_2 = \infty\,, & s_3 = 0\,, & s_4 = 1 \end{array}$$

voraussetzen, so hat man also

$$s = \frac{u(u - u_{34})^2}{(u - 1)(u - u_{12})^2}$$

wozu man noch zu fügen hat

$$\begin{array}{l} s = s_1 \quad \text{für} \quad u = u_6\,,\ u_1\,,\ u_2 \\ s = 1 \ \text{(doppelt)} \quad \text{für} \quad u = u'_{34}\,. \end{array}$$

Die erste Bedingung giebt

$$\sqrt{s_1}(u_{12} - u_6) = \sqrt{\frac{u_6}{u_6 - 1}}(u_6 - u_{34}),$$

$$\sqrt{s_1}(u_{12} - u_1) = \sqrt{\frac{u_1}{u_1 - 1}}(u_1 - u_{34}),$$

$$-\sqrt{s_1}(u_{12} - u_2) = \sqrt{\frac{u_2}{u_2 - 1}}(u_2 - u_{34}),$$

ein System von linearen Gleichungen in $u_{12}\sqrt{s_1}$, $\sqrt{s_1}$, u_{34}, wodurch also

$$\sqrt{s_1},\ u_{12} \text{ und } u_{34}$$

eindeutig als Functionen von u_6, u_1, u_2 bestimmt werden. Die zweite Bedingung, nach welcher

$$u(u - u_{34})^2 - (u - 1)(u - u_{12})^2$$

ein Quadrat sein muss, ergiebt also eine Relation zwischen u_6, u_1, u_2. Wir nehmen davon Abstand, diese Relation durch die Coefficienten von

$$(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)(u - u_4)(u - u_5)(u - u_6)$$

auszudrücken.

Diese Transformation ist natürlich mit der von GOURSAT für $m = 3$ angegebenen [1]) identisch.

Durch eine Verallgemeinerung der hier betrachteten Abbildungsaufgabe wäre es leicht die Reduction allgemeinerer Abelschen Integrale auf elliptische in derselben Weise anschaulich zu machen. Wir müssen aber darauf verzichten, da der Umfang dieser Arbeit sonst zu viel heranwachsen würde.

---

[1]) Sur la réduction des intégrales hyperelliptiques, Bulletin de la société mathématique de France, t. 13, 1885.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1891. N:o 9.
Stockholm.

Sur un procédé d'obtention de microphotographies destinées à la projection.

Par Auguste et Louis Lumière.

[Note communiquée le 11 Novembre 1891 par H. Gyldén.]

Les images positives photographiques qui, jusqu'ici, ont été utilisées pour la projection présentent généralement les inconvénients suivants:

1:o) Elles manquent de transparence.

2:o) Elles sont monochromes noires ou bistre à moins que des couleurs n'y soient appliquées à la main, auquel cas elle perdent partiellement le caractère d'authenticité qui constitue le principal avantage des épreuves photographiques.

Lorsqu'il s'agit de positives représentant des préparations microscopiques, ce dernier inconvénient pend une grande importance.

Les photographies en noir ne donnent, en effet, qu'une idée bien imparfaite des dites préparations qui sont généralement teintées par des couleurs vives.

Il était interessant de chercher un procédé qui permît de les reproduire mécaniquement et plus fidèlement.

Nous avons pu atteindre le but et obtenir facilement les doubles colorations en combinant les procédés photographiques avec les méthodes de coloration des préparations microscopiques.

Les meilleures images ont été produites en opérant de la maniére suivante:

Nous avons choisi un papier dit au charbon dont la couche soit pauvre en matière colorante (il est indispensable en effet que les positives soient trés claires si l'on veut que leur teinte

n'agisse pas sensiblement sur la coloration que l'on doit leur donner définitivement), et sensibilisé ce papier dans une solution de bichromate de potassium contenant:

eau	650
bichromate de potassium	25
alcool	350.

En été la solution est refroidie: sa temperature ne doit pas dépasser 15°.

Après 5 minutes d'immersion le papier est suspendu pour secher à l'abri de la lumière et de la poussière.

Le papier est ensuite exposé sous le cliché dans le chassis presse, en se conformant aux regles qui se rapportent au procédé au charbon.

En un mot, la sensibilisation et l'impression s'effectuent avec les précautious que commande le dit procédé, precautions sur lesquelles nous ne reviendrons pas ici.

La durée de l'impression est déterminée à l'aide d'un photomètre.

Lorsque les indications du photomètre montrent que l'exposition est suffisante, l'image est développée, d'après les méthodes connues, sur un verre mince douci, préalablement décapé et parfaitement propre, l'épreuve étant appliquée sur le coté douci.

Le développement doit être bien complet. Aussitot terminée la positive est lavée à l'eau froide, immergée dans l'alcool pendant 10 minutes et enfin mise à sècher.

Le l'on a bien opéré l'épreuve est faible, quelquefois même peu visible.

Pour la colorer on prépare des solutions aqueuses des couleurs employées en micrographie ou de celles qui s'en rapprochent telles que le violet et le bleu de méthyle, le violet de gentiane, le bleu coton, le rouge de magenta, le nacarat, la safranine diméthylée, le vert malachite etc.

La concentration qui parait le plus convenable varie entre $^1/_{100}$ et $^1/_{500}$, suivant la solubilité et le pouvoir colorant de la substance.

L'orsque celle-ci n'est pas soluble, ou trop peu soluble dans l'eau, on la dissout dans une quantité d'alcool aussi faible que possible puis on étend ensuite la liqueur avec de l'eau.

On pourrait évidemment ajouter à la liste des colorants cités plus haut une grand nombre d'autres substances, mais il ne faut pas perdre de vue que certaines couleurs d'aniline sont rapidement altérées à la lumière. Celles qui présentent cette propriété doivent être rejetées.

La solution que l'on a choisie pour colorer la positive est versée sur l'image. En quelques secondes le liquide à pénétré la gélatine qui retient la couleur et qui prend une teinte vive, identique à celle de la préparation microscopique si l'on a bien fait le choix de la teinture.

Lorsque la coloration est trop intense on lave abondamment à l'eau. Généralement la décoloration s'effectue lentement et régulierement. On suit facilement l'effet du lavage que l'on cesse au moment opportun.

L'action décolorante de l'eau est le plus souvent suffisante dans le cas où l'on fait usage du vert malachite, du Nacarat ou du bleu de méthyle. Quand le lavage à l'eau est insuffisant on traite par l'alcool. La décoloration s'effectue beaucoup plus rapidement que dans le cas précédent aussi doit on suivre l'opération avec plus de soins.

Le traitement par l'alcool est toujours suivi d'un lavage sommaire à l'eau ordinaire. L'effet de l'alcool est rapide avec le violet de méthyle et le rouge de magenta. La décoloration est beaucoup plus difficile avec le bleu coton et la safranine.

Ces dernières teintures doivent, pour ce motif, être employées plus diluées afin que l'on puisse en suivre l'action de plus près et pour qu'il ne soit pas nécessaire de recourir aux decolorants. Il est facile à l'aide de ces indications sommaires d'obtenir les colorations doubles que l'ou remarque dans certaines préparations microscopiques; dans une préparation de microbes, par exemple, le microbe est frequemment coloré en rouge et le fond en bleu.

Pour que la positive photographique presente le même effet, on la traite d'abord par une teinture rouge intense mais qui ne

s'oppose pas à la décoloration partielle ultérieure de l'épreuve. La solution à $^1/_{100}$ de rouge de magenta se trouve dans ce cas.

A la suite de ce traitement l'èpreuve est colorée dans toutes ses parties; le microbe en rouge foncé et le fond en rouge clair.

C'est alors que l'on procède à la décoloration partielle, d'abord par l'eau, puis par l'alcool si cela est nécessaire. Lorsque le fond commence à perdre sa teinte, on traite de nouveau par la teinture qui doit colorer le fond.

Il faut alors une solution faible telle que la solution aqueuse de bleu coton a $^1/_{500}$.

Le grain du verre dipoli qui sert de support a l'épreuve nuit à la transparence de la positive.

Il est important, pour la projection, de vernir afin de faire disparaitre l'aspect grenu de la surface. Les images projetées sont alors beaucoup plus brillantes.

Le vernis suivant nous a paru convenir à l'usage qui nous occupe.

Benzine	300
Gomme Dammar	5.

Il s'applique à froid à la manière du collodion. On peut éviter le vernissage en remplaçant le verre douci par un verre poli mais, avec ce dernier, il peut survenir quelquefois des décollements de la gélatine pendant le developpement.

Projetées sur l'écran les spécimens qui accompagnent la présente note montreront combien ce positives produisent un effet superieur à celui des épreuves en noir obtenues à l'aide des procédés ordinaires.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. fr. sid. 622.)

Hamburg. *Deutsche Seewarte.*
Deutsches meteorologisches Jahrbuch. Jahrg. 12(1889). 4:o.
Aus dem Archiv der Deutschen Seewarte. Jahrg. 13(1890). 4:o.
Monatsbericht. Jahrg. 15(1890): 1—12 & Beiheft 1—3. 8:o.
Katalog der Bibliothek. 1890. 8:o.
Helsingfors. *Finska Vetenskapssocieteten.*
Meteorologiskt Veckoblad. Vol. 1(1889): N:o 42; 2(1890): 1—52. Fol.
Karlsruhe. *Centralbureau für Meteorologie und Hydrographie.*
Jahresbericht. Jahr 1890: Th. 2. 4:o.
Kiel. *Ministerial-Kommission zur Untersuchung der Deutschen Meere.*
Ergebnisse der Beobachtungsstationen an den Deutschen Küsten. Jahrg. 1889: H. 10—12; 1890: 1—12. Tv. 4:o.
Kjöbenhavn. *Dansk Meteorologisk Institut.*
Maanedsoversigt. Aar 1890: 1—12. Fol.
Bulletin météorologique du nord. Année 1890: 1—12. Tv. 4:o.
Klagenfurt. *Naturhistorisches Landes-Museum von Kärnten.*
Diagramme der magnetischen und meteorologischen Beobachtungen. Jahr 1890. Fol.
Krakau. *K. K. Sternwarte.*
Meteorologische Beobachtungen. Jahr 1890: 1—12. 8:o.
— *K. Vetenskaps-Akademiens meteorologiska section.*
Materijaty do klimatografii Galicyi. Rok 1890. 8:o.
London. *Meteorological office.*
Daily weather report. Year 1890: N:o 1—365; Additions and Corrections 1889: 12; 1890: 1—12. 4:o.
Weekly weather report. 7(1880): 1—53; Appendix 1—4. 4:o.
Summary of the observations made at the stations included in the Daily and Weekly weather reports. 1888: 10—12; 1890: 1—12. 4:o.
Official publications. N:o 50: P. 3—4; 77; 88; 90; 94—95. 1890—91. 4:o & st. Tv. fol.
Report of the Meteorological council to the Royal Society. 1890 $^{31}/_{3}$ & Appendix 18. 8:o.
— *R. Meteorological society.*
Quarterly journal. Vol. 16(1890). 8:o.
Meteorological record. Vol. 10(1890): N:o 37—40. 8:o.
Madrid. *R. Observatorio.*
Observaciones meteorológicas. Año 1886—1889. 8:o.
Magdeburg. *Wetterwarte der Magdeburgischen Zeitung.*
Jahrbuch der meteorologischen Beobachtungen. Bd. 9(1890). 4:o.
Manila. *Observatorio meteorológico bajo la direccion de los PP de la Compañia de Jesús.*
Observaciones. 1890: 1—12. 4:o.
Marseille. *Commission météorologique du dép. des Bouches-du-Rhône.*
Bulletin annuel. Année 8(1889). 4:o.

Mexico. *Observatorio meteorológico-magnético central.*
Boletin mensual. T. 2 (1889): Resumen del año; 3 (1890): N:o 1. 4:o.
ZENDEJAS, J., Tablas psychrométricas calculadas para la altura de México; tablas abreviadas generales. 1889. 8:o.

Melbourne. *Observatory.*
Monthly record of results of observations in meteorology, terrestrial magnetism, &c. &c. Year 1890: 1—7; 10—12. 8:o.

Milano. *Observatorio astronomico di Brera.*
Osservazioni meteorologiche. Anno 1890. 4:o.

Moskwa. *Meteorologisches Observatorium der Landwirthschaftlichen Akademie.*
Meteorologische Beobachtungen. (2) T. 3 (1889): H. 2; 4 (1890): 1—2. Tv. 4:o.

— *Observatoire magnétique et météorologique de l'Institut Constantin des arpenteurs.*
Tables des observations. Année 1890: 1—11. 4:o.

München. *K. Meteorologische Centralstation.*
Beobachtungen der meteorologischen Stationen im Königreiche Bayern. Jahrg. 12 (1890): H. 1—4. 4:o.
Übersicht der Witterungsverhältnisse im Königreiche Bayern. Jahr 1890: 1—12. Fol.
LANG, C., Die Bestrebungen Bayerns auf meteorologischem Gebiet im 18:ten Jahrhundert. Eine Studie. München 1890. 8:o.
Småskrifter. 6 häften. 4:o.

— *K. Sternwarte.*
Meteorologische Beobachtungen der K. Sternwarte bei München. 1887—1889. 4:o.

New York, U. S. *Meteorological observatory of the department of public parks.*
Report. Vol. 45 (1890). 4:o.

Nizza. *Société de médécine et de climatologie médicale.*
Nice-médical. Année 14 (1889/90): 2—8; 10—12; 15 (1890/91): 1—3; 8—11. 8:o.

Oxford. *Radcliffe Observatory.*
Results of meteorological observations. Year 1886. 8:o.

Paris. *Bureau central météorologique.*
Bulletin international. Année 34 (1890): N:o 1—243; 245—365. 4:o.
Bulletin mensuel. Année 1890: N:o 1—12. 4:o.
Annales. Année 1885, 2: P. 2; 1886: 2; 1887: 1—3; 1888: 1—3. 4:o.
Rapport du Comité météorologique international. — Réunion de Zurich 1888. Paris 1889. 8:o.

— *Observatoire municipal de Montsouris.*
Annuaire. 1891. 16:o.

— *Société météorologique de France.*
Annuaire. Année 38 (1890). 8:o.

Perpignan. *Commission météorologique du dép. des Pyrénées-Orientales.*
Bulletin. 18 (1889). 4:o.

Revue climatologique, météorologique, agricole & sanitaire à Perpignan. Par le dr. Fines. Année 1889. 4:o.

FINES, Dr., 1. Des variations de l'électricité atmosphérique à Perpignan. 2. Influence de l'humidité sur le bifilaire magnétique et moyen de la corriger. Lille 1890. 8:o.

Pola. *Hydrographisches Amt der K. K. Kriegsmarine.*

Meteorologische und magnetische Beobachtungen. Jahr 1890: 1—12 & Jahresübersicht. Tvfol.

Prag. *K. K. Sternwarte.*

Magnetische und meteorologische Beobachtungen. Jahrg. 51(1890). 4:o.

Puebla. *Observatorio meteorologico del estado.*

Résumen de observaciones. 1889: 7; 9; 11—12; 1890: 1—12. Fol.

Prognostico dado para al año de 1890. Fol.

Rio de Janeiro. *Observatorio.*

Boletins mensaes. Vol. 1(1886)—3(1888). 8:o.

MORIZE, H., Esboço de uma climatologia do Brazil. — Ébauche d'une climatologie du Brésil. Rio de Janeiro 1891. 4:o.

Riposto. *Osservatorio meteorologico.*

Bollettino mensile. Anno 16(1890): N:o 1—12. 8:o.

D'AMICO, G., Sulla tromba terrestre del 1884 $^{7}/_{10}$. Lettera di G. d'A. ed osservazioni di F. Cafiero. Giarre 1884. 8:o.

Roma. *Ufficio centrale di meteorologia e di geodynamica.*

Bollettino meteorico giornaliero. Anno 12(1890): 1—365; Suppl. 1—9. 4:o.

Annali. (2) Vol. 8(1886): P. 2—3. 4:o.

— *Pontif. Università Gregoriana.*

Continuazione del Bullettino meteorologico dell' osservatorio del Collegio Romano. Vol. 28(1889): N:o 1. 4:o.

San José. *Instituto fisico-geografico nacional de Costa Rica.*

Anales. Año 1889: T. 2: P. 1. 4:o.

San Salvador. *Instituto Nacional.*

Observaciones meteorológicas. 1890: 1—6. Fol.

S:t Petersburg. *Physikalisches Centralobservatorium.*

Bulletin météorologique. Année 1890: $^{1}/_{1}$—$^{5}/_{9}$; $^{13}/_{9}$—$^{30}/_{12}$. Fol.

» » Supplement: Année 1890: 1—12. Fol.

Annalen. Jahrg. 1889: Th. 2; 1890: 1. 4:o.

Repertorium für Meteorologie, redigirt von H. Wild. Bd 13. 1890. 4:o.

Siracusa. *Osservatorio centrale.*

Osservazioni meteorologiche. Anno 14(1890): N:o 1—12. 8:o.

Stonyhurst. *Observatory.*

Results of meteorological and magnetical observations. 1889—1890. 8:o.

Stuttgart. *K. Meteorologische Centralstation.*

Meteorologische Beobachtungen. Jahrg. 1889. 4:o.

Tiflis. *Physikalisches Observatorium.*

Meteorologische Beobachtungen. 1889. 8:o.

Torino. *Osservatorio della R. Università.*

Osservazioni meteorologiche. 1888—1889. 8:o.

— *Società meteorologica Italiana.*
Bollettino mensuale. (2) Vol. 10(1890): N:o 1—12. 4:o.
Annuario meteorologico Italiano. Anno 6(1891). 16:o.

Toronto. *Meteorological service of the Dominion of Canada.*
Monthly weather rewiew. Year 1890: N:o 1—12. 4:o.
Report. Year 1887. 8:o.
General meteorological register. Year 1889. 8:o.

Trieste. *Osservatorio marittimo della I. R. Accademia di nautica.*
Rapporto annuale. Vol. 5(1888). 4:o.

Utrecht. *K. Nederlandsch meteorologisch Instituut.*
Nederlandsch meteorologisch Jaarboek. Jaarg. 42(1890). Tv. 4:o.

Washington. *Signal office, U. S. Army.*
Daily international chart. Year 1884 $^1/_7$—$^{31}/_{12}$. Tvfol.
Daily [Tridaily American] bulletin of weather-reports. 1877: N:o 6—8. 4:o.
Twodaily [American] weather maps. 8 A. M. 8 P. M. Year 1890: $^1/_1$—$^{28}/_2$; $^1/_4$—$^{30}/_6$; $^1/_8$—$^{31}/_{12}$. Fol.
Monthly [American] weather review. Year 1888: Suppl.; 1889: Suppl.; 1890: N:o 1—4; 6—12 & Suppl. 4:o.
Meteorological data. 1887: N:o 3. Tvfol.
Report. Year 1890. 8:o.
Report of Rainfall in Washington territory . . . for from 2 to 40 years. 1889. 4:o.
Fassig, O. L., Bibliography of meteorology. A classed catalogue of the printed literature of meteorology from the origin of printing to the close of 1881; with a supplement to the close of 1889, and an author index. P. 3—4. Washingt. 1891. 4:o.
Mc Adie, A., Mean temperatures and their corrections in the United States. 1881. 4:o.

— *Hydrographic office, U. S. Navy.*
Pilot chart of the North Atlantic ocean. 1889: 1—2; Suppl.: 3—5. Fol.
Simpson, E., Report of ice and ice movements in Bering sea and the arctic basin. 1890. 8:o.

Wien. *K. K. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus.*
Jahrbücher. Bd. 34(1889). 4:o.

Zürich. *Schweizerische meteorologische Central-Anstalt.*
Annalen. Jahrg. 24(1888). 4:o.
Meteorologische Beobachtungen an 15 Stationen der Schweiz. Jahr 1890: 1—9. 4:o.

Utgifvarne.
Månadsöfversigt af väderleken i Sverige . . . utg. af H. E. Hamberg. Årg. 10(1890): 1—12. Fol.
Symons's Meteorological magazine. Vol. 25(1890). London. 8:o.

Författarne.
Hagström, K. L., & Falk, A., Mesures de nuages faites dans les montagnes de Jemtland pendant l'été de 1887. Sthm 1891. 8:o.
Olsson, P., Om klimatet i Jämtlands län. Östersund 1891. 8:o.

BUCHAN, A., The meteorological results of the »Challenger» expedition in relation to physical geography. London 1891. 8:o.

GONZÁLEZ, B. G., Ensayo de meteorognosia de la ciudad de Puebla. Puebla 1889. 8:o.

HANN, J., Studien über die Luftdruck- und Temperaturverhältnisse auf dem Sonnblickgipfel, nebst Bemerkungen über deren Bedeutung für die Theorie der Cyclonen und Anticyclonen. Wien 1891. 8:o.

MANSILL, R., Almanac of meteorology and planetary phenomena, for the year 1890, and new system of science. Rock Island, Illinois 1889. 8:o.

MEYER, H., Die Gewitter zu Göttingen in den Jahren 1857—1880. Götting. 1887. 8:o.

SCHÖNROCK, A., Specielle Untersuchung der Gewitter in Russland im Jahre 1888. S:t Petersb. 1890. 4:o.

Stockholm 1892. Kongl. Boktryckeriet.

ÖFVERSIGT

AF

KONGL. VETENSKAPS-AKADEMIENS FÖRHANDLINGAR.

Årg. 48. 1891. № 10.

Onsdagen den 9 December.

INNEHÅLL:

På tillstyrkan af utsedde komiterade antogos följande afhandlingar till införande i Akademiens Handlingar: 1:o) »Studien über Xyrideen», af Lektorn ALB. NILSSON; 2:o) »Anatomische Studien über skandinavische Cestoden II. Zwei Parasiten aus Wallfischen und zwei aus Lamna cornubica», af Docenten E. LÖNNBERG; 3:o) »The Crinoidea of Gotland. P. I», af Assistenten vid British Museum F. A. BATHER.

Hr Friherre NORDENSKIÖLD lemnade meddelande om förekomsten af uran i anthracit- och bergbeckartade mineral från svenska grufvor.

Hr Lindström redogjorde för innehållet af ofvannämnda afhandling af Hr Bather.

Amanuensen Dr H. E. Hamberg förevisade och beskref en mängd af honom uppgjorda kartor och diagram öfver temperatur, nederbörd och nattfroster i Sverige under de sista årtiondena.

Hr Nathorst meddelade en af honom sjelf författad uppsats: »Ueber den gegenwärtigen Standpunkt unserer Kentniss des Vorkommens fossiler Glacialpflanzen». (Se Bihang till K. Vet. Akad. Handl.).

Sekreteraren öfverlemnade för intagande i Akademiens skrifter följande insända uppsatser: 1:o) »Öfver Echinorhyncus turbinella Diesing, brevicollis Malm, och porrigens Rudolphi», af Filos. Kandidaten E. Borgström (Se Bihang etc.); 2) »En algebraisk generalisation af några aritmetiska satser», af Docenten A. Berger*; 3) »Ueber die Berechnung der einzelnen Glieder der Riemann'schen Primzahlformel», af Doktor E. Phragmén*; 4) »Sur le principe de Dirichlet», af densamme*; 5) »Om etylendiamins inverkan på rubeanväte», af Filos. Kandidaten G. Forssell*; 6) »Om azthin-derivat», af Filos. Kandidaten N. A. Langlet*; 7) »Phlanzenphysiologische Mittheilungen. I.», af Filos. Doktor J. af Klercker*.

Det *Letterstedtska* resestipendium, som Akademien denna gång egde att bortgifva för theoretiskt studium af naturvetenskaperna, beslöt Akademien tilldela Intendenten vid det Naturhistoriska Riksmuseum Professor Christofer Aurivillius för utförande under utländska resor af vissa entomologiska forskningar dels i naturen och dels i Museer.

Det *Beskowska* stipendium för år 1892 tilldelades Filos. Kandidaten Sven Forsling, med uppgift att vid Akademiens Fysiska kabinet utföra undersökningar öfver sällsynta jordarters absorptionsspectra.

Följande skänker anmäldes:

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

H. MAJ:T KONUNGEN.

Martius, C. F., Eichler, A. W., Urban, I., Flora Brasiliensis. Fasc. 110. Lips. 1891. F.

Kristiania. *K. Norske Frederiks Universitet.*
Universitetsbibliothekets Aarbog. 1890. 8:o.

Amsterdam. *Gemeentebestuur.*
Ter Gouw, J., Geschiedenis van Amsterdam. D. 6—7. Amsterd. 1889—91. 8:o.

Baltimore. *Johns Hopkins University.*
Circulars. Vol. 10: N:o 83—91; 11: 92—93. 1890—91. 4:o.
American chemical journal. Vol. 13: N:o 2—6. 1891. 8:o.
» journal of mathematics. Vol. 13: N:o 3—4. 1891. 4:o.
» » » philology. Vol. 11: N:o 4; 12: 1. 1890—91. 8:o.
Studies in the biological laboratory. Vol. 5: N:o 1. 1891. 8:o.
» » historical and political science. Ser. 9: 1—8. 1891. 8:o.

Breslau. *Verein für Schlesische Insektenkunde.*
Zeitschrift für Entomologie (2). H. 16. 1891. 8:o.

Brisbane. *R. Geographical society of Australasia, Queensland branch.*
Proceedings and transactions. Vol. 6: P. 2. 1891. 8:o.

Buitenzorg. *s'Lands Plantentuin.*
Verslag omtrent den Staat. Jaar 1890. st. 8:o.

Boston. *Boston society of natural history.*
Proceedings. Vol. 25: P. 2. 1891. 8:o.

Calcutta. *Indian museum.*
Distant, W. L., A monograph of Oriental Cicadidæ. P. 4. London 1891. 4:o.
Scientific results of the second Yarkand mission, based upon the collections and notes of the late F. Stoliczka: Aves by B. Sharpe; Introductory note. London 1891. 4:o.

Cambridge. *Cambridge philosophical society.*
Proceedings. Vol. 7: P. 4; 1891. 8:o.
» » 7: Foundation of the society. 1891. 8:o.

— *U. S. Museum of comparative zoology.*
Bulletin. Vol. 16: N:o 10. 1891. 8:o.

— *Astronomical observatory of Harvard college.*
Annals. Vol. 18: N:o 10. 26: P. 1; 30: 2.
Annual report of the photographic study of stellar spectra. 1890. 4:o.
Variable stars of long period. 1891. 4:o.

Dublin. *R. Irish academy.*
Proceedings. (3) Vol. 2: N:o 1. 1891. 8:o.

Freiburg i/B. *Naturforschende Gesellschaft.*
Berichte. Bd. 5: H. 1—2. 1890—91. 8:o.

Haag. *K. Nederländska regeringen.*
Flora Batava. Afl. 291—294. Leiden 1890—91. 4:o.

Hamburg. *Naturwissenschaftlicher Verein.*
Abhandlungen aus dem Gebiete der Naturwissenschaften. Bd. 11: H. 2—3. 1891. 4:o.
Helsingfors. *Finska Vetenskaps-Societeten.*
Acta. Vol. 17. 1891. 4:o.
Öfversigt. 32(1889/90.)
Bidrag till kännedom af Finlands natur och folk. H. 49—50. 1890—91. 8:o.
— *Societas pro fauna & flora Fennica.*
Acta. Vol. 6—7. 1889—90. 8:o.
Meddelanden. H. 16. 1888—91. 8:o.
Jena. *Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft.*
Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Bd. 25: H. 1—4; 26: 1—2. 1890—91. 8:o.
Kiel. *Naturwissenschaftlicher Verein für Schleswig-Holstein.*
Schriften. Bd. 9: H. 1. 1891. 8:o.
Leipzig. *K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften.*
Abhandlungen. Bd. 28: N:o 3; 29: 5—6; 30: 1—2. 1891. 4:o.
» Math.-phys. Kl. Bd. 17: N:o 5—6.
» Philol.-hist. » Bd. 12: 3; 13: 1—2.

— *Verein für Erdkunde.*
Wissenschaftliche Veröffentlichungen. Bd. 1. Beiträge zur Geographie des festen Wassers. 1891. 8:o.
London. *Geological society.*
Quarterly journal. Vol. 47: N:o 185—188. 8:o.
List of the Geological society. 1891 $^2/_{11}$. 8:o.
— *Zoological society.*
Transactions. Vol. 13: P. 3. 1891. 4:o.
Proceedings of the general meetings for scientific business. Year 1891: P. 2—3. 8:o.
Melbourne. *Government of the colony of Victoria.*
Müller, F. v., Iconography of Australian salsolaceous plants. Dec. 7. 1891. 4:o.
— *R. Geographical society of Australasia, Victorian branch.*
Transactions. Vol. 9: P. 1. 1891. 8:o.
Luxembourg. *Fauna.*
Mittheilungen. — Comptes rendus. Année 1891: N:o 2—3. st. 8:o.
Mexico. *Sociedad cientifica »Antonio Alzate».*
Memorias y revista. T. 4(1890/91): Cuad. 1—2; 7—12. 8:o.
Milano. *R. Istituto Lombardo di scienze e lettere.*
Memorie. Classe di lettere e scienze historiche e morali. Vol. 18: Fasc. 3—5. 1891. 4:o.
Rendiconti. (2) Vol. 23. 1890.
Atti della fondazione scientifica Cagnola. Vol. 10(1890). 8:o.

(Forts. å sid. 752.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1891. N:o 10.
Stockholm.

En algebraisk generalisation af några aritmetiska satser.

Af Alexander Berger.

[Meddeladt den 9 December 1891 genom D. G. Lindhagen.]

Ändamålet med denna uppsats är att bevisa några teorem med algebraiskt innehåll, ur hvilka man omedelbart kan deducera åtskilliga aritmetiska satser, tillhörande teorien för de qvadratiska resterna, den Legendre'ska symbolen och de Gauss'ska summorna. Hvad dessa algebraiska teorem beträffar, så synas de mig vara af intresse redan i och för sig själfva; men äfven om så icke vore förhållandet, så anser jag ändock deras uppställande vara berättigadt, emedan de otvifvelaktigt bidraga till att gifva en djupare insigt i de ur dem härledda aritmetiska satsernas verkliga natur än den, som erhålles, då dessa satser bevisas på vanligt aritmetiskt sätt.

De arbeten, som jag begagnat vid nedskrifvandet af denna afhandling, äro:

A. M. Legendre, Théorie des nombres. Troisième édition, Paris 1830.

C. F. Gauss Werke, Göttingen, Band I 1870, Band II 1876.

P. G. Lejeune-Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben von R. Dedekind. Dritte Auflage, Braunschweig 1879.

L. Kronecker, Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste (Sitzungsberichte der königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1884).

L. KRONECKER, Über den dritten Gauss'schen Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste (Sitzungsberichte der königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1884).

L. KRONECKER, Die absolut kleinsten Reste reeller Grössen (Sitzungsberichte der königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1885).

P. BACHMANN, Die Lehre von der Kreistheilung und ihre Beziehungen zur Zahlentheorie. Leipzig 1872.

J. A. SERRET, Cours d'Algèbre supérieure, Quatrième édition, Paris, Tome I 1877, Tome II 1879.

Dessutom har jag härvid användt anteckningar från Prof. KRONECKERS föreläsningar öfver högre aritmetik vid Berlins universitet vintersemestern 1885—1886.

§ 1.

Om hela heltaliga funktioners delbarhet och kongruens.

I den elementära talteorien förekomma följande två definitioner på hela tals delbarhet och kongruens.

Om a och m äro hela tal (positiva, negativa eller noll), så säges a vara delbart med m, om det finnes ett tredje helt tal n sådant, att

$$a = mn.$$

Om a, b och m äro hela tal, så sägas a och b vara kongruenta, modulo m, om differensen $a - b$ är delbar med m, och detta förhållande mellan dessa tre tal tecknas på följande sätt:

$$a \equiv b, \text{ mod } m.$$

Dessa definitioner på aritmetisk delbarhet och kongruens skola vi här utsträcka till algebraisk delbarhet och kongruens. Om i en rationel hel funktion af en oberoende variabel x

$$g_0 x^r + g_1 x^{r-1} + g_2 x^{r-2} + \dots + g_{r-1} x + g_r$$

samtliga koefficienterna $g_0, g_1, \dots g_r$ äro hela tal, så säges denna funktion vara heltalig; af denna definition framgår omedel-

bart, att summan, differensen och produkten af hela heltaliga funktioner själfva äro hela heltaliga funktioner. Vi skola i det följande beteckna dylika funktioner med

$$G(x),\ G_0(x),\ G_1(x),\ G_2(x),\ \ldots$$

Sedan begreppet hel heltalig funktion således är faststäldt, uppställa vi följande två definitioner.

Definition 1. Om $G_1(x)$ och $G(x)$ äro hela heltaliga funktioner af x, så säges funktionen $G_1(x)$ vara delbar med $G(x)$, om det finnes en tredje hel heltalig funktion $G_0(x)$ sådan, att identiskt

(1) $$G_1(x) = G(x)\ G_0(x).$$

Definition 2. Om $G_1(x)$, $G_2(x)$ och $G(x)$ äro hela heltaliga funktioner af x, så sägas $G_1(x)$ och $G_2(x)$ vara kongruenta, modulo $G(x)$, om differensen $G_1(x) - G_2(x)$ är delbar med $G(x)$, och detta förhållande tecknas på följande sätt:

(2) $$G_1(x) \equiv G_2(x),\ \text{mod}\ G(x).$$

Den qvantitet x, som ingår i dylika kongruenser, betraktas som en oberoende variabel och icke som en obekant qvantitet. Vi kalla dessa kongruenser för algebraiska kongruenser, derföre att en sådan kongruens tydligen uttrycker en algebraisk egenskap hos de hela heltaliga funktioner, som ingå i densamma, nämligen att differensen mellan kongruensens båda membra är algebraiskt delbar med modylen och det så, att den vid denna division erhållna qvoten äfven är en hel heltalig funktion af x.

Ur kongruensbegreppet härledas lätt följande satser.

Teorem I. Om $G_1(x)$, $G_2(x)$, $G(x)$ äro hela heltaliga funktioner, och om

$$G_1(x) = G_2(x),$$

så är

$$G_1(x) \equiv G_2(x),\ \text{mod}\ G(x).$$

Ty differensen mellan båda membra är noll och således delbar med $G(x)$.

Teorem II. Om

$$G_1(x) \equiv G_2(x), \text{ mod } G(x); \quad G_2(x) \equiv G_3(x), \text{ mod } G(x),$$

så är

$$G_1(x) \equiv G_3(x), \text{ mod } G(x).$$

Ty emedan enligt antagandet

(3) $$G_1(x) - G_2(x) = G(x)\ G_4(x)$$

och

(4) $$G_2(x) - G_3(x) = G(x)\ G_5(x),$$

så följer genom addition

(5) $$G_1(x) - G_3(x) = G(x)\ G_6(x).$$

Emedan venstra membrum således är delbart med $G(x)$, så är enligt definitionen på kongruens

(6) $$G_1(x) \equiv G_3(x), \text{ mod } G(x),$$

hvarmed satsen är bevisad.

Teorem III. Om

$$G_1(x) \equiv G_2(x), \text{ mod } G(x); \quad G_3(x) \equiv G_4(x), \text{ mod } G(x),$$

så är

$$G_1(x) + G_3(x) \equiv G_2(x) + G_4(x), \text{ mod } G(x).$$

Ty enligt antagandet är

(7) $$G_1(x) - G_2(x) = G(x)\ G_5(x)$$

och

(8) $$G_3(x) - G_4(x) = G(x)\ G_6(x),$$

och häraf följer genom addition

(9) $$G_1(x) + G_3(x) - (G_2(x) + G_4(x)) = G(x)\ G_7(x)$$

och således

(10) $$G_1(x) + G_3(x) \equiv G_2(x) + G_4(x), \text{ mod } G(x),$$

hvarmed teoremet är bevisadt.

För $G_3(x) = G_4(x)$ erhålles följande korollarium.

Korollarium. Om

$$G_1(x) \equiv G_2(x), \text{ mod } G(x),$$

så är

$$G_1(x) + G_3(x) \equiv G_2(x) + G_3(x), \text{ mod } G(x).$$

Teorem IV. Om

$$G_1(x) \equiv G_2(x), \text{ mod } G(x); \; G_3(x) \equiv G_4(x), \text{ mod } G(x),$$

så är

$$G_1(x)\, G_3(x) \equiv G_2(x)\, G_4(x), \text{ mod } G(x).$$

Ty enligt antagandet är

(11) $$G_1(x) - G_2(x) = G(x)\, G_5(x)$$

och

(12) $$G_3(x) - G_4(x) = G(x)\, G_6(x).$$

Om den förra af dessa likheter förlänges med $G_3(x)$ och den andra med $G_2(x)$, och de sålunda erhållna likheterna adderas, så erhålla vi

(13) $$G_1(x)\, G_3(x) - G_2(x)\, G_4(x) = G(x)\, G_7(x)$$

och alltså

(14) $$G_1(x)\, G_3(x) \equiv G_2(x)\, G_4(x), \text{ mod } G(x),$$

hvarmed teoremet är bevisadt.

För $G_3(x) = G_4(x)$ erhålles följande korollarium.

Korollarium. Om

$$G_1(x) \equiv G_2(x), \text{ mod } G(x),$$

så är

$$G_1(x)\, G_3(x) \equiv G_2(x)\, G_3(x), \text{ mod } G(x).$$

Om vi med $G_0\,(y, z, u, \ldots)$ beteckna en hel heltalig funktion af variablerna $y, z, u, \ldots$ d. v. s. en rationel hel funktion af $y, z, u, \ldots$, hvilkens alla koefficienter äro hela tal, så följer lätt genom upprepadt användande af de föregående satserna följande allmänna teorem.

Teorem V. Om

$$G_1(x) \equiv G'_1(x), \text{ mod } G(x); \; G_2(x) \equiv G'_2(x), \text{ mod } G(x);$$
$$G_3(x) \equiv G'_3(x), \text{ mod } G(x); \; \ldots .$$

så är

$$G_0\,\{G_1(x),\; G_2(x),\; G_3(x),\; \ldots\} \equiv G_0\,\{G'_1(x),\; G'_2(x),\; G'_3(x),\; \ldots\},$$
$$\text{mod } G(x).$$

Teorem VI. Om

$$G_1(x)\, G_3(x) \equiv G_2(x)\, G_3(x), \text{ mod } G(x),$$

och om de hela funktionerna $G(x)$, $G_3(x)$ icke hafva någon gemensam rot, och om vidare koefficienten för den högsta digniteten af x i funktionen $G(x)$ är 1, så är

$$G_1(x) \equiv G_2(x), \text{ mod } G(x).$$

Ty enligt antagandet är produkten

$$\{G_1(x) - G_2(x)\}\, G_3(x)$$

delbar med $G(x)$; emedan vidare $G_3(x)$ ej har någon gemensam rot med $G(x)$, så måste qvoten, som erhålles, då $G_1(x) - G_2(x)$ divideras med $G(x)$ vara en hel funktion af x; om man utför denna division samt iakttager, att koefficienten för den högsta digniteten af x i divisorn $G(x)$ är lika med enheten, så inses lätt, att alla koefficienterna i qvoten blifva hela tal; denna qvot är alltså en hel heltalig funktion af x, och härmed är satsen bevisad.

Teorem VII. Om

$$G_1(x) \equiv G_2(x), \text{ mod } G(x),$$

och om $G_0(x)$ är en divisor till $G(x)$, så är

$$G_1(x) \equiv G_2(x), \text{ mod } G_0(x).$$

Ty enligt antagandet är

(15) $$G_1(x) - G_2(x) = G(x)\, G_3(x)$$

och

(16) $$G(x) = G_0(x)\, G_4(x),$$

och af dessa två likheter följer

(17) $$G_1(x) - G_2(x) = G_0(x)\, G_3(x)\, G_4(x),$$

och således

(18) $$G_1(x) \equiv G_2(x), \text{ mod } G_0(x).$$

Teorem VIII. Om

$$G_1(x) \equiv G_2(x), \text{ mod } G(x),$$

och om $x = R$ är en rot till eqvationen

$$G(x) = 0,$$

så är

$$G_1(R) = G_2(R).$$

Ty enligt antagandet är identiskt d. v. s. för alla värden på x

(19) $$G_1(x) = G_2(x) + G(x)\,G_3(x)\,,$$

och om man här inför $x = R$ samt iakttager, att $x = R$ är en rot till eqvationen

(20) $$G(x) = 0\,,$$

så erhålles

(21) $$G_1(R) = G_2(R).$$

§ 2.

Om algebraiska kongruenser med speciela modyler.

Vi skola i denna paragraf taga i betraktande kongruenser af formen

(22) $$G_1(x) \equiv G_2(x),\ \text{mod}\ G(x)\,,$$

der modylen $G(x)$ är lika med någon af funktionerna

$$x^p - 1\,,\ \frac{x^p - 1}{x - 1}\,,$$

i hvilka p betyder ett helt positivt tal. Emedan den andra af dessa funktioner är en divisor till den första, så erhålla vi omedelbart af teorem VII följande sats.

Teorem IX. Om p är ett helt positivt tal, och om

$$G_1(x) \equiv G_2(x)\,,\ \text{mod}\ (x^p - 1)\,,$$

så är

$$G_1(x) \equiv G_2(x)\,,\ \text{mod}\ \frac{x^p - 1}{x - 1}\,.$$

Vi skola nu bevisa några andra teorem om dylika kongruenser.

Teorem X. Om p är ett helt positivt tal, samt r ett helt positivt tal eller noll, och om vidare

$$G_1(x) \equiv G_2(x)\,,\ \text{mod}\ (x^p - 1)\,,$$

så är

$$G_1(x^r) \equiv G_2(x^r)\,,\ \text{mod}\ (x^p - 1).$$

Ty enligt antagandet är

(23) $$G_1(x) - G_2(x) = (x^p - 1)\, G_3(x);$$

om vi i denna identitet ersätta x med x^r, så finna vi

(24) $$G_1(x^r) - G_2(x^r) = (x^{pr} - 1)\, G_3(x^r)$$

och således, emedan $G_3(x^r)$ är en hel heltalig funktion af x,

(25) $$G_1(x^r) \equiv G_2(x^r)\,, \bmod (x^{pr} - 1)\,.$$

Emedan $x^p - 1$ är en divisor till $x^{pr} - 1$, så följer häraf enligt teorem VII

(26) $$G_1(x^r) \equiv G_2(x^r), \bmod (x^p - 1)\,.$$

Teorem XI. Om p är ett helt positivt tal, och om s är ett helt positivt tal, som är relativt primtal till p, och om vidare

$$G_1(x) \equiv G_2(x), \bmod \frac{x^p - 1}{x - 1}\,,$$

så är

$$G_1(x^s) \equiv G_2(x^s), \bmod \frac{x^p - 1}{x - 1}\,.$$

Ty enligt antagandet är

(27) $$G_1(x) - G_2(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1}\, G_3(x)\,;$$

om vi i denna identitet ersätta x med x^s, så erhålles

(28) $$G_1(x^s) - G_2(x^s) = \frac{x^{ps} - 1}{x^s - 1}\, G_3(x^s)$$

och således, emedan $G_3(x^s)$ är en hel heltalig funktion af x,

(29) $$G_1(x^s) \equiv G_2(x^s), \bmod \frac{x^{ps} - 1}{x^s - 1}\,.$$

Emedan talen s och p äro relativa primtal, så är det möjligt att bestämma två hela positiva tal g och h så, att

(30) $$gs - hp = 1\,,$$

och då är identiskt

(31) $$\frac{x^{ps} - 1}{x^s - 1} \cdot \frac{x - 1}{x^p - 1} = \frac{x^{ps} - 1}{x^p - 1} \cdot \frac{x^{gs} - 1}{x^s - 1} - x \cdot \frac{x^{ps} - 1}{x^s - 1} \cdot \frac{x^{hp} - 1}{x^p - 1}\,.$$

Emedan högra membrum i denna likhet tydligen är en hel heltalig funktion af x, så följer häraf, om vi beteckna denna funktion med $G_4(x)$,

(32) $$\frac{x^{ps}-1}{x^s-1}=\frac{x^p-1}{x-1}G_4(x),$$

och således är funktionen $\frac{x^p-1}{x-1}$ en divisor till $\frac{x^{ps}-1}{x^s-1}$. Om vi nu använda teorem VII på kongruensen (29), så finna vi

(33) $$G_1(x^s)\equiv G_2(x^s),\ \mathrm{mod}\ \frac{x^p-1}{x-1},$$

hvarmed satsen är bevisad.

Teorem XII. Om p är ett helt positivt tal, och om

$$G_1(x)\equiv G_2(x),\ \mathrm{mod}\,(x^p-1),$$

så fortfar denna kongruens att äga bestånd, om man ökar eller minskar exponenterna till x i densamma med multipler af p, förutsatt blott, att de nya exponenterna icke blifva negativa.

Ty om a och b äro hela positiva tal eller noll, och om

(34) $$a\equiv b,\ \mathrm{mod}\,p,$$

och om vi med a beteckna det större af dessa tal, så är

(35) $$a=b+mp,$$

der m är ett helt positivt tal, och alltså är

(36) $$x^a-x^b=x^b(x^{mp}-1),$$

och emedan x^p-1 är en divisor till $x^{mp}-1$, så följer häraf

(37) $$x^a\equiv x^b,\ \mathrm{mod}\,(x^p-1),$$

och denna kongruens gäller tydligen, äfven om a är mindre än eller lika med b. Om vi nu använda teoremen II och V samt kongruensen (37) på den gifna kongruensen

(38) $$G_1(x)\equiv G_2(x),\ \mathrm{mod}\,(x^p-1),$$

så finna vi, att exponenterna till x i denna kunna ökas eller minskas med multipler af p, om blott de nya exponenterna icke blifva negativa, och härmed är satsen bevisad.

Teorem XIII. Om p är ett helt positivt tal, och om

$$g_0, g_1, g_2, g_3, \ldots$$

är en oändlig grupp af hela tal, som ha den egenskapen, att för $h \geqq 0$

$$g_{h+p} = g_h,$$

och om vidare r är ett helt positivt tal, som är relativt primtal till p, så är

$$\sum_{h=0}^{h=p-1} g_{hr} x^{hr} \equiv \sum_{h=0}^{h=p-1} g_h x^h, \text{ mod } (x^p - 1).$$

För beviset af denna sats antaga vi, såsom förut, att a, b äro hela pos. tal eller noll, som uppfylla vilkoret

(39) $$a \equiv b, \text{ mod } p,$$

och då är, såsom nyss visades,

(40) $$x^a \equiv x^b, \text{ mod } (x^p - 1);$$

af talens g_h egenskaper följer vidare, att

(41) $$g_a = g_b,$$

och af kongruensen (40) och likheten (41) erhålles

(42) $$g_a x^a \equiv g_b x^b, \text{ mod } (x^p - 1).$$

Sedan vi uppvisat denna kongruens, skola vi undersöka summan

$$\sum_{h=0}^{h=p-1} g_{hr} x^{hr},$$

der r är ett helt positivt tal, som är relativt primtal till p. Om vi i produkten hr låta h genomlöpa talen

$$0, 1, 2, 3, \ldots p-1,$$

så bilda de sålunda erhållna talen hr ett fullständigt restsystem, mod p, och dessa tal blifva alltså i någon viss ordning kongruenta, mod p, med talen h, och således blifva enligt kongruensen (42) funktionerna $g_{hr} x^{hr}$ i någon viss ordning kongruenta, mod $(x^p - 1)$, med funktionerna $g_h x^h$, hvaraf följer, att

$$(43) \qquad \sum_{h=0}^{h=p-1} g_{hr} x^{hr} \equiv \sum_{h=0}^{h=p-1} g_h x^h, \ \text{mod}\,(x^p - 1),$$

hvarmed satsen är bevisad.

De i denna paragraf bevisade teoremen gälla för alla hela positiva tal p; i det följande skola vi dock använda dessa teorem endast i de fall, då p är ett udda positivt primtal.

§ 3.

Användning af de qvadratiska resternas och icke-resternas egenskaper till härledning af några algebraiska kongruenser.

I denna paragraf skall jag använda de i det föregående bevisade satserna på teorien för qvadratiska rester och icke-rester, och för den skull anför jag här först några formler ur den elementära talteorien. Om p betecknar ett positivt primtal, så är enligt WILSONS teorem

$$(44) \qquad 1.2.3....(p-2)(p-1) \equiv -1, \ \text{mod}\,p,$$

och om r är ett helt tal, som ej är delbart med p, så är enligt FERMATS teorem

$$(45) \qquad r^{p-1} \equiv 1, \ \text{mod}\,p.$$

Om p är ett positivt udda primtal, och om r icke är delbart med p, så är enligt EULERS kriterium den aritmetiska kongruensen

$$(46) \qquad x^2 \equiv r, \ \text{mod}\,p$$

möjlig eller icke möjlig, allteftersom

$$(47) \qquad r^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1, \ \text{mod}\,p \ \text{eller} \ r^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1, \ \text{mod}\,p;$$

i det förra fallet kallas r en qvadratisk rest af primtalet p, och i det senare fallet en qvadratisk icke-rest. Emedan den LEGENDRE'ska symbolen $\left(\frac{r}{p}\right)$ betecknar den positiva eller negativa

enheten, allteftersom r är en qvadratisk rest eller icke-rest af p, så följer af kongruenserna (47), att

$$r^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{r}{p}\right), \ \mathrm{mod}\, p, \tag{48}$$

för hvarje helt tal r, som ej är delbart med p. Om man nu fastställer, att den Legendre'ska symbolen $\left(\frac{r}{p}\right)$ skall betyda 0, om r är delbart med p, så finna vi, att kongruensen (48) gäller för alla hela tal r.

Emedan det udda primtalet p har lika många qvadratiska rester som icke-rester bland talen

$$1, 2, 3, \ldots p-1,$$

så är tydligen

$$\sum_{r=1}^{r=p-1} \left(\frac{r}{p}\right) = 0. \tag{49}$$

Om vi med a, b, c, ... beteckna hela tal, så erhållas af kongruensen (48) följande formler

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right), \ \text{om } a \equiv b, \ \mathrm{mod}\, p, \tag{50}$$

$$\left(\frac{abc\ldots}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)\left(\frac{c}{p}\right)\ldots \tag{51}$$

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}. \tag{52}$$

Om vi sätta

$$S = \sum_{h=0}^{h=p-1} x^{h^2}, \tag{53}$$

der p är ett positivt udda primtal, så är S tydligen en hel heltalig funktion af x, och vi erhålla af eqv. (53)

$$S = 1 + \sum_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} x^{h^2} + \sum_{h=\frac{p+1}{2}}^{h=p-1} x^{h^2}. \tag{54}$$

Om vi i den sista summan i högra membrum af denna likhet införa $p - h$ i stället för h, så finna vi

(55) $$S = 1 + \sum_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} x^{h^2} + \sum_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} x^{p^2 - 2ph + h^2}$$

och således enligt teorem I

(56) $$S \equiv 1 + \sum_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} (x^{h^2} + x^{p^2 - 2ph + h^2}), \text{ mod } (x^p - 1)$$

eller, om vi använda teorem XII,

(57) $$S \equiv 1 + 2\sum_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} x^{h^2}, \text{ mod } (x^p - 1).$$

Om vi nu med α beteckna primtalets p qvadratiska rester, som ligga mellan 0 och p, och med β talets p qvadratiska icke-rester mellan 0 och p, så äro qvadraterna

$$1^2, \ 2^2, \ 3^2, \ \ldots \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$$

kongruenta med talen α, mod p, och om vi åter använda teorem XII, så erhålla vi af kongruensen (57)

(58) $$S \equiv 1 + 2\sum_{\alpha} x^{\alpha}, \text{ mod } (x^p - 1)$$

och således enligt teorem IX

(59) $$S \equiv 1 + 2\sum_{\alpha} x^{\alpha}, \text{ mod } \frac{x^p - 1}{x - 1}.$$

Emedan talen α, β tillsammans äro desamma som talen

$$1, \ 2, \ 3, \ \ldots \ p - 1,$$

så är

(60) $$1 + \sum_{\alpha} x^{\alpha} + \sum_{\beta} x^{\beta} = \frac{x^p - 1}{x - 1}$$

och således

(61) $$1 + \sum_{\alpha} x^{\alpha} + \sum_{\beta} x^{\beta} \equiv 0, \text{ mod } \frac{x^p - 1}{x - 1}.$$

Af kongruenserna (59) och (61) erhålles genom addition

(62) $$S \equiv \sum_{\alpha} x^{\alpha} - \sum_{\beta} x^{\beta}\,, \ \text{mod}\ \frac{x^p - 1}{x - 1}$$

eller enligt eqv. (53), om vi använda den LEGENDRE'ska symbolen,

(63) $$\sum_{h=0}^{h=p-1} x^{h^2} \equiv \sum_{h=1}^{h=p-1} \left(\frac{h}{p}\right) x^h\,, \ \text{mod}\ \frac{x^p - 1}{x - 1}\,.$$

Beteckna vi nu med s ett helt positivt tal, som ej är delbart med primtalet p, samt använda teorem XI på kongruensen (63), så erhålla vi

(64) $$\sum_{h=0}^{h=p-1} x^{h^2 s} \equiv \sum_{h=1}^{h=p-1} \left(\frac{h}{p}\right) x^{hs}\,, \ \text{mod}\ \frac{x^p - 1}{x - 1}\,,$$

hvarmed följande teorem är bevisadt.

Teorem XIV. Om p är ett positivt udda primtal, och s ett helt positivt tal, som ej är delbart med p, så är

$$\sum_{h=0}^{h=p-1} x^{h^2 s} \equiv \sum_{h=1}^{h=p-1} \left(\frac{h}{p}\right) x^{hs}\,, \ \text{mod}\ \frac{x^p - 1}{x - 1}\,.$$

Om vi med r beteckna ett helt positivt tal, som icke är delbart med primtalet p, samt i teorem XIII införa

$$g_h = \left(\frac{h}{p}\right),$$

så erhålles

(65) $$\sum_{h=0}^{h=p-1} \left(\frac{hr}{p}\right) x^{hr} \equiv \sum_{h=0}^{h=p-1} \left(\frac{h}{p}\right) x^h\,, \ \text{mod}\ (x^p - 1)$$

och således, emedan $\left(\frac{r}{p}\right) = \pm 1\,,\ \left(\frac{0}{p}\right) = 0\,,$

(66) $$\sum_{h=1}^{h=p-1} \left(\frac{h}{p}\right) x^{hr} \equiv \left(\frac{r}{p}\right) \sum_{h=1}^{h=p-1} \left(\frac{h}{p}\right) x^h\,, \ \text{mod}\ (x^p - 1)\,,$$

hvilken formel tydligen gäller, äfven om r är delbart med p. Om vi på kongruensen (64) använda kongruensen (66), så finna vi, alldenstund kongruensen (66) gäller för modylen $\frac{x^p-1}{x-1}$,

$$\sum_{h=0}^{h=p-1} x^{h^2 s} \equiv \left(\frac{s}{p}\right) \sum_{h=1}^{h=p-1} \left(\frac{h}{p}\right) x^h, \text{ mod } \frac{x^p-1}{x-1}. \tag{67}$$

Härmed är följande teorem bevisadt.

Teorem XV. Om p är ett positivt udda primtal, och om r är ett helt positivt tal hvilket som hälst eller noll, så är

$$\sum_{h=1}^{h=p-1} \left(\frac{h}{p}\right) x^{hr} \equiv \left(\frac{r}{p}\right) \sum_{h=1}^{h=p-1} \left(\frac{h}{p}\right) x^h, \text{ mod } (x^p-1);$$

och om s är ett helt positivt tal, som icke är delbart med p, så är

$$\sum_{h=0}^{h=p-1} x^{h^2 s} \equiv \left(\frac{s}{p}\right) \sum_{h=1}^{h=p-1} \left(\frac{h}{p}\right) x^h, \text{ mod } \frac{x^p-1}{x-1}.$$

Härmed ha de två summorna

$$\sum_{h=1}^{h=p-1} \left(\frac{h}{p}\right) x^{hr}, \sum_{h=0}^{h=p-1} x^{h^2 s}$$

blifvit återförda till den enklare summan

$$S = \sum_{h=1}^{h=p-1} \left(\frac{h}{p}\right) x^h, \tag{68}$$

med hvilken vi nu skola sysselsätta oss. Om r är ett helt positivt tal eller noll, så är enligt teorem XV och eqv. (68)

$$\left(\frac{r}{p}\right) S \equiv \sum_{h=1}^{h=p-1} \left(\frac{h}{p}\right) x^{hr}, \text{ mod } (x^p-1). \tag{69}$$

Förlänga vi denna kongruens med x^r och sedan sätta r successive lika med $0, 1, 2, \ldots p-1$ samt addera de sålunda erhållna kongruenserna, så finna vi

$$(70)\qquad S\sum_{r=0}^{r=p-1}\left(\frac{r}{p}\right)x^r \equiv \sum_{r=0}^{r=p-1}\sum_{h=1}^{h=p-1}\left(\frac{h}{p}\right)x^{r(h+1)}, \text{ mod } (x^p-1)$$

och således enligt eqv. (68)

$$(71)\qquad S^2 \equiv \sum_{h=1}^{h=p-1}\left(\frac{h}{p}\right)\sum_{r=0}^{r=p-1}x^{r(h+1)}, \text{ mod } (x^p-1),$$

hvaraf följer

$$(72)\qquad S^2 \equiv \sum_{h=1}^{h=p-2}\left(\frac{h}{p}\right)\sum_{r=0}^{r=p-1}x^{r(h+1)} + \left(\frac{p-1}{p}\right)\sum_{r=0}^{r=p-1}x^{pr}, \text{ mod } (x^p-1).$$

Emedan vid den första summan h antager värdena 1, 2, 3, ... $p-2$, så är $h+1$ icke delbart med p. Vi kunna alltså i teorem XIII ersätta r med $h+1$, h med r samt g_h med 1, och vi erhålla då

$$(73)\qquad \sum_{r=0}^{r=p-1}x^{r(h+1)} \equiv \sum_{r=0}^{r=p-1}x^r, \text{ mod } (x^p-1)$$

eller

$$(74)\qquad \sum_{r=0}^{r=p-1}x^{r(h+1)} \equiv \frac{x^p-1}{x-1}, \text{ mod } (x^p-1).$$

Om vi nu använda denna formel på kongruensen (72), så finna vi enligt teorem XII

$$(75)\qquad S^2 \equiv \frac{x^p-1}{x-1}\sum_{h=1}^{h=p-2}\left(\frac{h}{p}\right) + \left(\frac{p-1}{p}\right)\sum_{r=0}^{r=p-1}1, \text{ mod } (x^p-1).$$

Men enligt eqv. (49), (50), (52) är

$$(76)\qquad \sum_{h=1}^{h=p-2}\left(\frac{h}{p}\right) = -\left(\frac{p-1}{p}\right), \quad \left(\frac{p-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}},$$

och alltså erhålles af kongruensen (75)

(77) $$S^2 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(p - \frac{x^p - 1}{x - 1}\right), \text{ mod } (x^p - 1)$$

och alltså enligt teorem IX

(78) $$S^2 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} p, \text{ mod } \frac{x^p - 1}{x - 1}$$

eller enligt eqv. (68)

(79) $$\left\{\sum_{h=1}^{h=p-1}\left(\frac{h}{p}\right)x^h\right\}^2 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} p, \text{ mod } \frac{x^p - 1}{x - 1},$$

hvarmed följande teorem är bevisadt.

Teorem XVI. Om p är ett positivt udda primtal, så är

$$\left\{\sum_{h=1}^{h=p-1}\left(\frac{h}{p}\right)x^h\right\}^2 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} p, \text{ mod } \frac{x^p - 1}{x - 1}.$$

Om vi med s beteckna ett helt positivt tal, som icke är delbart med det udda positiva primtalet p, så är $2s$ icke delbart med p, och om vi sätta

(80) $$\varrho = e^{\frac{2s\pi i}{p}},$$

så är alltså ϱ^2 en primitiv rot till den binomiska eqvationen

(81) $$x^p - 1 = 0,$$

och denna eqvations samtliga rötter äro

$$\varrho^2, \quad \varrho^4, \quad \varrho^6, \ldots \varrho^{2p-2}, \quad 1,$$

och alltså är identiskt

(82) $$\prod_{h=1}^{h=p-1}(x - \varrho^{2h}) = \frac{x^p - 1}{x - 1}$$

eller enligt eqv. (80)

(83) $$\prod_{h=1}^{h=p-1}\varrho^h \cdot \prod_{h=1}^{h=p-1}(x\varrho^{p-h} - \varrho^h) = \frac{x^p - 1}{x - 1}.$$

Men nu är

(84) $$\prod_{h=1}^{h=p-1}\varrho^h = \varrho^{1+2+3+\ldots+(p-1)} = \varrho^{\frac{p(p-1)}{2}}$$

och alltså enligt eqv. (80), emedan p är ett udda tal,

$$\prod_{h=1}^{h=p-1} \varrho^h = 1, \tag{85}$$

och af eqv. (83) erhålles alltså identiteten

$$\prod_{h=1}^{h=p-1} (\varrho^h - x\varrho^{p-h}) = \frac{x^p - 1}{x - 1}, \tag{86}$$

och för $x = 1$ följer häraf

$$\prod_{h=1}^{h=p-1} (\varrho^h - \varrho^{p-h}) - p = 0. \tag{87}$$

Af eqv. (87) och (80) kunna vi sluta, att eqvationen

$$\prod_{h=1}^{h=p-1} (x^h - x^{p-h}) - p = 0 \tag{88}$$

satisfieras af

$$x = e^{\frac{2s\pi i}{p}}, \tag{89}$$

om blott s betyder ett helt positivt tal, som ej är delbart med p. Sätta vi

$$s = 1, \ 2, \ 3, \dots p - 1,$$

så är detta vilkor uppfyldt, och alltså satisfieras eqv. (88) af eqvationens

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = 0 \tag{90}$$

samtliga rötter, och följaktligen måste eqvationens (88) venstra membrum vara delbart med eqvationens (90) venstra membrum. Vi erhålla alltså kongruensen

$$\prod_{h=1}^{h=p-1} (x^h - x^{p-h}) \equiv p, \ \text{mod} \frac{x^p - 1}{x - 1}, \tag{91}$$

hvarmed följande teorem är bevisadt.

Teorem XVII. Om p är ett positivt udda primtal, så är

$$\prod_{h=1}^{h=p-1} (x^h - x^{p-h}) \equiv p, \ \text{mod} \frac{x^p - 1}{x - 1}.$$

Om vi sätta den nu bevisade kongruensen under formen

$$(92) \quad \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} (x^h - x^{p-h}) \cdot \prod_{h=\frac{p+1}{2}}^{h=p-1} (x - x^{p-h}) \equiv p\,, \bmod \frac{x^p-1}{x-1}$$

och införa $p-h$ i stället för h i den andra produkten, så finna vi

$$(93) \quad \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} (x^h - x^{p-h}) \cdot \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} (x^{p-h} - x^h) \equiv p\,, \bmod \frac{x^p-1}{x-1}$$

eller

$$(94) \quad \left\{ \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} (x^h - x^{p-h}) \right\}^2 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} p\,, \bmod \frac{x^p-1}{x-1}\,.$$

Vi kunna äfven på ett annat sätt transformera kongruensen (91). Om vi i de två uttrycken

$$2h-1\,,\ p-2h+1$$

låta h genomlöpa talen

$$1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ \ldots \frac{p-1}{2}\,,$$

så erhålla vi af dessa uttryck tillsammans alla de hela talen

$$1\,,\ 2\,,\ 3\,,\ \ldots p-1\,,$$

och alltså kan kongruensen (91) sättas under formen

$$(95) \quad \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} (x^{2h-1} - x^{p-2h+1}) \cdot \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} (x^{p-2h+1} - x^{2h-1}) \equiv p\,, \bmod \frac{x^p-1}{x-1}$$

eller

$$(96) \left\{ \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} (x^{2h-1} - x^{p-2h+1}) \right\}^2 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} p\,, \bmod \frac{x^p-1}{x-1}\,.$$

Vi sammanföra formlerna (94) och (96) i följande teorem.

Teorem XVIII. Om p är ett positivt udda primtal, så är

$$\left\{ \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} (x^h - x^{p-h}) \right\}^2 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} p\,, \bmod \frac{x^p-1}{x-1}$$

och

$$\left\{\prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}}(x^{2h-1}-x^{p-2h+1})\right\}^2 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} p\,, \ \bmod \frac{x^p-1}{x-1}\,.$$

Af teoremen XVI och XVIII följer nu

$$(97)\quad \left\{\sum_{h=1}^{h=p-1}\left(\frac{h}{p}\right)x^h\right\}^2 - \left\{\prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}}(x^{2h-1}-x^{p-2h+1})\right\}^2 \equiv 0\,, \ \bmod \frac{x^p-1}{x-1}\,.$$

Denna kongruens uttrycker, att den hela funktionen i venstra membrum är delbar med den hela funktionen $\frac{x^p-1}{x-1}$. Men emedan funktionen i venstra membrum är produkten af de två faktorerna med hela koefficienter

$$\sum_{h=1}^{h=p-1}\left(\frac{h}{p}\right)x^h - \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}}(x^{2h-1}-x^{p-2h+1})$$

och

$$\sum_{h=1}^{h=p-1}\left(\frac{h}{p}\right)x^h + \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}}(x^{2h-1}-x^{p-2h+1}),$$

och emedan vidare den hela funktionen $\frac{x^p-1}{x-1}$ är irreducibel, så måste en af dessa två faktorer vara delbar med $\frac{x^p-1}{x-1}$. Således måste det finnas ett tal ε, som är lika med $+1$ eller -1, och som har den egenskapen, att den hela heltaliga funktionen

$$\sum_{h=1}^{h=p-1}\left(\frac{h}{p}\right)x^h - \varepsilon\prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}}(x^{2h-1}-x^{p-2h+1})$$

är delbar med $\frac{x^p-1}{x-1}$. Men denna funktion är tydligen delbar med $x-1$ och måste sålunda vara delbar med x^p-1. Vi erhålla alltså en kongruens af formen

$$(98)\quad \sum_{h=1}^{h=p-1}\left(\frac{h}{p}\right)x^h - \varepsilon\prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}}(x^{2h-1}-x^{p-2h+1}) \equiv 0,\ \bmod (x^p-1).$$

Vi skola nu afgöra, om det i denna kongruens ingående talet ε är lika med $+1$ eller -1. Talet ε är tydligen beroende blott af p, och det skulle kunna inträffa, att ε för vissa värden på p vore $+1$ och för andra värden på p vore -1, men den följande undersökningen[1]) skall visa, att ε är lika med $+1$ för alla värden på p.

Emedan venstra membrum af kongruensen (98) är en hel heltalig funktion af x, som är delbar med $x^p - 1$, så måste qvoten vara en hel heltalig funktion af x, och vi erhålla alltså en identitet af formen

$$(99) \quad \sum_{h=1}^{h=p-1} \left(\frac{h}{p}\right) x^h - \varepsilon \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} (x^{2h-1} - x^{p-2h+1})$$

$$= (x^p - 1)(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_m x^m),$$

der m är ett helt positivt tal eller noll, och der $c_0, c_1, c_2, \ldots c_m$ äro rationela hela tal. Om vi i denna identitet sätta

$$x = e^z,$$

så erhålla vi den för alla värden på z gällande likheten

$$(100) \quad \sum_{h=1}^{h=p-1} \left(\frac{h}{p}\right) e^{hz} - \varepsilon \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} (e^{(2h-1)z} - e^{(p-2h+1)z})$$

$$= (e^{pz} - 1)(c_0 + c_1 e^z + c_2 e^{2z} + c_3 e^{3z} + \ldots + c_m e^{mz}).$$

Vi skola nu utveckla qvantiteterna i båda membra i potensserier af z samt sedan sätta koefficienterna för

$$z^{\frac{p-1}{2}}$$

i båda membra lika med hvarandra. Det venstra membrum är lika med

$$\sum_{h=1}^{h=p-1} \left(\frac{h}{p}\right) \left(1 + \frac{hz}{1} + \frac{h^2 z^2}{1.\,2} + \ldots + \frac{h^{\frac{p-1}{2}} z^{\frac{p-1}{2}}}{1.\,2.\,3 \ldots \frac{p-1}{2}} + \ldots\right)$$

$$- \varepsilon \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \left\{(4h - p - 2)z + p(4h - p - 2)\frac{z^2}{2} + \ldots\right\},$$

[1]) Denna metod att bestämma talet ε är gifven af Professor KRONECKER.

och koefficienten för $z^{\frac{p-1}{2}}$ i venstra membrum af eqv. (100) är alltså

$$(101) \qquad \frac{1}{1.\,2.\,3\ldots\frac{p-1}{2}} \sum_{h=1}^{h=p-1} \left(\frac{h}{p}\right) h^{\frac{p-1}{2}} - \varepsilon \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} (4h-p-2)\,.$$

Det högra membrum af eqv. (100) är lika med produkten af serien

$$(102) \qquad \frac{pz}{1} + \frac{p^2z^2}{1.\,2} + \frac{p^3z^3}{1.\,2.\,3} + \ldots$$

och serien

$$(103) \qquad C_0 + \frac{C_1 z}{1} + \frac{C_2 z^2}{1.\,2} + \frac{C_3 z^3}{1.\,2.\,3} + \ldots$$

der koefficienterna C_0, C_1, C_2, ... äro bestämda af likheterna

$$\begin{aligned}
C_0 &= c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_m\,,\\
C_1 &= c_1 + 2c_2 + 3c_3 + \ldots + mc_m\,,\\
C_2 &= c_1 + 2^2c_2 + 3^2c_3 + \ldots + m^2c_m\,,\\
C_3 &= c_1 + 2^3c_2 + 3^3c_3 + \ldots + m^3c_m\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

och följaktligen äro C_0, C_1, C_2, C_3 ... rationela hela tal.

Om vi nu multiplicera tillsammans serierna (102) och (103), så finna vi, att koefficienten för $z^{\frac{p-1}{2}}$ i högra membrum af eqv. (100) är lika med

$$\frac{C_0 p^{\frac{p-1}{2}}}{1.\,2.\,3\ldots\frac{p-1}{2}} + \frac{C_1 p^{\frac{p-3}{2}}}{1\cdot 1.\,2.\,3\ldots\frac{p-3}{2}} + \frac{C_2 p^{\frac{p-5}{2}}}{1.\,2\cdot 1.\,2\ldots\frac{p-5}{2}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{C_{\frac{p-5}{2}} p^2}{1.\,2.\,3\ldots\frac{p-5}{2}\cdot 1.\,2} + \frac{C_{\frac{p-3}{2}} p}{1.\,2.\,3\ldots\frac{p-3}{2}\cdot 1}\,,$$

och emedan alla nämnarne i dessa bråk äro divisorer till talet $1.\,2.\,3\ldots\frac{p-1}{2}$, så är koefficienten till $z^{\frac{p-1}{2}}$ i högra membrum af eqv. (100) lika med

$$(104)\qquad \frac{Np}{1.2.3\ldots\frac{p-1}{2}},$$

der N betyder ett helt tal.

Om vi nu sätta uttrycken (101) och (104) lika med hvarandra samt förlänga den sålunda erhållna likheten med produkten

$$1.2.3\ldots\frac{p-1}{2},$$

så erhålla vi

$$(105)\quad \sum_{h=1}^{h=p-1}\left(\frac{h}{p}\right)h^{\frac{p-1}{2}} - \varepsilon\cdot 1.2.3\ldots\frac{p-1}{2}\prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}}(4h-2)\equiv 0, \bmod p.$$

Emedan vid den här förekommande summan h icke är delbart med p, så är enligt kongruensen (48)

$$(106)\qquad \left(\frac{h}{p}\right)h^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1, \bmod p,$$

och således följer af kongruensen (105)

$$(107)\quad p-1-\varepsilon\cdot 2.4.6\ldots(p-1)\prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}}(2h-1)\equiv 0, \bmod p$$

eller

$$(108)\quad 1+\varepsilon\cdot 1.2.3\ldots(p-2)(p-1)\equiv 0, \bmod p$$

och alltså enligt WILSON's formel

$$(109)\qquad \varepsilon\equiv 1, \bmod p.$$

Emedan $p \geqq 3$, och emedan ε ej kan ha några andra värden än den positiva eller negativa enheten, så följer häraf

$$(110)\qquad \varepsilon = 1.$$

Om vi införa detta värde på ε i kongruensen (98), så erhålles

$$(111)\quad \sum_{h=1}^{h=p-1}\left(\frac{h}{p}\right)x^h \equiv \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}}\left(x^{2h-1}-x^{p-2h+1}\right), \bmod (x^p-1).$$

Om vi med r beteckna ett helt positivt tal eller noll samt använda teorem X på kongruensen (111), så erhålla vi följande allmännare kongruens

$$(112)\quad \sum_{h=1}^{h=p-1} \left(\frac{h}{p}\right) x^{hr} \equiv \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \left(x^{(2h-1)r} - x^{(p-2h+1)r}\right), \text{ mod } (x^p - 1).$$

Använda vi nu teorem XV på kongruenserna (111) och (112), så erhålles

$$(113)\quad \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \left(x^{(2h-1)r} - x^{(p-2h+1)r}\right)$$

$$\equiv \left(\frac{r}{p}\right) \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \left(x^{2h-1} - x^{p-2h+1}\right), \text{ mod } (x^p - 1),$$

och af kongruenserna (112) och (113) följer

$$(114)\quad \sum_{h=1}^{h=p-1} \left(\frac{h}{p}\right) x^{hr} \equiv \left(\frac{r}{p}\right) \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \left(x^{2h-1} - x^{p-2h+1}\right), \text{ mod } (x^p - 1),$$

hvarmed följande teorem är bevisadt.

Teorem XIX. Om p är ett positivt udda primtal, och r ett helt positivt tal eller noll, så är

$$\prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \left(x^{(2h-1)r} - x^{(p-2h+1)r}\right)$$

$$\equiv \left(\frac{r}{p}\right) \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \left(x^{2h-1} - x^{p-2h+1}\right), \text{ mod } (x^p - 1)$$

och

$$\sum_{h=1}^{h=p-1} \left(\frac{h}{p}\right) x^{hr} \equiv \left(\frac{r}{p}\right) \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \left(x^{2h-1} - x^{p-2h+1}\right), \text{ mod } (x^p - 1).$$

Vi skola transformera de nu bevisade kongruenserna, och för den skull skilja vi följande två fall.

1) Om $p \equiv 1$, mod 4, så är

$$(115) \quad \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} (x^{2h-1} - x^{p-2h+1})$$

$$= \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{4}} (x^{2h-1} - x^{p-2h+1}) \cdot \prod_{h=\frac{p+3}{4}}^{h=\frac{p-1}{2}} (x^{2h-1} - x^{p-2h+1}),$$

och om vi i den sista produkten ersätta h med $\frac{p+1}{2} - h$, så finna vi

$$(116) \quad \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} (x^{2h-1} - x^{p-2h+1})$$

$$= (-1)^{\frac{p-1}{4}} \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{4}} (x^{2h-1} - x^{p-2h+1}) \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{4}} (x^{2h} - x^{p-2h}) .$$

Men då h genomlöper talen

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots \frac{p-1}{4},$$

så genomlöper $2h - 1$ dem bland talen

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots \frac{p-1}{2},$$

som äro udda, och $2h$ genomlöper dem bland dessa tal, som äro jämna, och följaktligen kan likheten (116) skrifvas

$$(117) \quad \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} (x^{2h-1} - x^{p-2h+1}) = (-1)^{\frac{p-1}{4}} \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} (x^{h} - x^{p-h}) .$$

2) Är åter $p \equiv 3$, mod 4, så är

$$(118) \quad \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} (x^{2h-1} - x^{p-2h+1})$$

$$= \prod_{h=1}^{h=\frac{p+1}{4}} (x^{2h-1} - x^{p-2h+1}) \cdot \prod_{h=\frac{p+5}{4}}^{h=\frac{p-1}{2}} (x^{2h-1} - x^{p-2h+1}),$$

och om vi i den sista produkten ersätta h med $\frac{p+1}{2} - h$, så erhålles

$$(119) \quad \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} (x^{2h-1} - x^{p-2h+1})$$

$$= (-1)^{\frac{p-3}{4}} \prod_{h=1}^{h=\frac{p+1}{4}} (x^{2h-1} - x^{p-2h+1}) \cdot \prod_{h=1}^{h=\frac{p-3}{4}} (x^{2h} - x^{p-2h}).$$

Men då h genomlöper talen

$$1, 2, 3, \ldots \frac{p+1}{4},$$

så genomlöper $2h - 1$ dem bland talen

$$1, 2, 3, \ldots \frac{p-1}{2},$$

som äro udda, och då h genomlöper talen

$$1, 2, 3, \ldots \frac{p-3}{4},$$

så genomlöper $2h$ dem bland talen

$$1, 2, 3, \ldots \frac{p-1}{2},$$

som äro jämna, och följaktligen kan likheten (119) sättas under formen

$$(120) \quad \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} (x^{2h-1} - x^{p-2h+1}) = (-1)^{\frac{p-3}{4}} \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} (x^h - x^{p-h}).$$

Likheterna (117) och (120) kunna sammanfattas i en enda formel, nämligen

$$(121) \quad \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} (x^{2h-1} - x^{p-2h+1}) = (-1)^{\frac{(p-1)(p-3)}{8}} \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} (x^h - x^{p-h}),$$

hvilken gäller för alla udda positiva tal p, och medelst denna formel kan teorem XIX sättas under följande form.

Teorem XX. Om p är ett positivt udda primtal, och om r är ett helt positivt tal eller noll, så är

$$\prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} (x^{hr} - x^{(p-h)r}) \equiv \left(\frac{r}{p}\right) \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} (x^h - x^{p-h}), \bmod (x^p - 1)$$

och

$$\sum_{h=1}^{h=p-1} \left(\frac{h}{p}\right) x^{hr} \equiv \left(\frac{r}{p}\right) (-1)^{\frac{(p-1)(p-3)}{8}} \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} (x^h - x^{p-h}), \bmod (x^p - 1).$$

Af den första af dessa kongruenser följer

$$(122) \quad \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} (x^{hr} - x^{(p-h)r}) \equiv \left(\frac{r}{p}\right) \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} (x^h - x^{p-h}), \bmod \frac{x^p - 1}{x - 1},$$

och emedan båda membra i denna kongruens äro delbara med den hela heltaliga funktionen

$$\prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} (x^h - x^{p-h}),$$

hvilken icke har någon gemensam rot med modylen

$$\frac{x^p - 1}{x - 1},$$

så kunna vi enligt teorem VI förkorta kongruensen (122) med denna funktion, och vi erhålla då

$$(123) \quad \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \frac{x^{hr} - x^{(p-h)r}}{x^h - x^{p-h}} \equiv \left(\frac{r}{p}\right), \bmod \frac{x^p - 1}{x - 1}.$$

Beteckna vi nu med s ett helt positivt tal, som icke är delbart med p, samt använda teorem XI på kongruensen (123), så erhålles

$$(124) \quad \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \frac{x^{hrs} - x^{(p-h)rs}}{x^{hs} - x^{(p-h)s}} \equiv \left(\frac{r}{p}\right), \bmod \frac{x^p - 1}{x - 1},$$

och vi kunna alltså uppställa följande teorem.

Teorem XXI. Om p är ett positivt udda primtal, och r ett helt positivt tal eller noll, och om vidare s är ett helt positivt tal, som icke är delbart med p, så är

$$\prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \frac{x^{hrs} - x^{(p-h)rs}}{x^{hs} - x^{(p-h)s}} \equiv \left(\frac{r}{p}\right), \text{ mod } \frac{x^p - 1}{x - 1}.$$

§ 4.

Om de Gauss'ska summorna och den Legendre'ska symbolen.

I de i den föregående paragrafen bevisade algebraiska kongruenserna är modylen lika med någon af funktionerna

$$x^p - 1, \quad \frac{x^p - 1}{x - 1},$$

och emedan hvar och en af eqvationerna

(125) $$x^p - 1 = 0, \quad \frac{x^p - 1}{x - 1} = 0$$

har till rot

$$x = e^{\frac{2\pi i}{p}},$$

så kunna vi enligt teorem VIII i samtliga dessa kongruenser införa

(126) $$x = e^{\frac{2\pi i}{p}},$$

om vi på samma gång ersätta kongruenstecknen med likhetstecken. Af teorem XIV erhålla vi på detta sätt, om s är ett helt positivt tal, som ej är delbart med p,

(127) $$\sum_{h=0}^{h=p-1} e^{\frac{2h^2 s\pi i}{p}} = \sum_{h=1}^{h=p-1} \left(\frac{h}{p}\right) e^{\frac{2hs\pi i}{p}}.$$

Denna formel är visserligen nu blott bevisad för hela positiva tal s, som icke äro delbara med p. Men emedan båda membra förblifva oförändrade, om man ökar eller minskar s

med multipler af p, så gäller likheten för alla hela tal s, som icke äro delbara med p.

Om vi på den första formeln i teorem XVIII använda substitutionen (126), så erhålla vi likheten

$$(128)\qquad \left\{\prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}}\left(e^{\frac{2h\pi i}{p}}-e^{-\frac{2h\pi i}{p}}\right)\right\}^2=(-1)^{\frac{p-1}{2}}p,$$

hvaraf följer

$$(129)\qquad \left\{\prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} 2\sin\frac{2h\pi}{p}\right\}^2=p$$

och således, emedan alla de här ingående sinus äro positiva,

$$(130)\qquad \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} 2\sin\frac{2h\pi}{p}=\sqrt{p},$$

der $\sqrt{p}$ betyder den positiva qvadratroten ur p.

Om vi använda substitutionen (126) på den andra formeln i teorem XX, så erhålles

$$(131)\qquad \sum_{h=1}^{h=p-1}\left(\frac{h}{p}\right)e^{\frac{2hr\pi i}{p}}=\left(\frac{r}{p}\right)(-1)^{\frac{(p-1)(p-3)}{8}}i^{\frac{p-1}{2}}\prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} 2\sin\frac{2h\pi}{p}$$

och således med användning af eqv. (130)

$$(132)\qquad \sum_{h=1}^{h=p-1}\left(\frac{h}{p}\right)e^{\frac{2hr\pi i}{p}}=\left(\frac{r}{p}\right)i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}\sqrt{p}.$$

Denna formel är bevisad, då r är ett helt positivt tal eller noll, men gäller tydligen för alla hela tal r, alldenstund likheten blir oförändrad, om man ökar eller minskar r med multipler af p.

Om vi använda eqv. (132) på eqv. (127), så erhålla vi

$$(133)\qquad \sum_{h=0}^{h=p-1}e^{\frac{2h^2s\pi i}{p}}=\left(\frac{s}{p}\right)i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}\sqrt{p},$$

der s betyder ett helt tal, som icke är delbart med p. Vi sammanfatta nu formlerna (132) och (133) i följande teorem.

Teorem XXII. Om p är ett positivt udda primtal, och om r är ett helt tal hvilket som hälst, så är

$$\sum_{h=1}^{h=p-1}\left(\frac{h}{p}\right)e^{\frac{2hr\pi i}{p}}=\left(\frac{r}{p}\right)i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}\sqrt{p},$$

och om s är ett helt tal, som icke är delbart med p, så är

$$\sum_{h=0}^{h=p-1}e^{\frac{2h^2s\pi i}{p}}=\left(\frac{s}{p}\right)i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}\sqrt{p},$$

om $\sqrt{p}$ i båda formlerna betyder den positiva qvadratroten ur p.

Vi skola nu använda teorem XXI till att härleda uttryck för den LEGENDRE'ska symbolen. Om vi på detta teorem använda substitutionen (126), så finna vi

(134) $$\left(\frac{r}{p}\right)=\prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}}\frac{\sin\frac{2hrs\pi}{p}}{\sin\frac{2hs\pi}{p}},$$

hvilken formel nu är bevisad gälla, om r är ett helt positivt tal eller noll samt s ett helt positivt tal, som ej är delbart med p. Emedan båda membra blifva oförändrade, om r ökas eller minskas med multipler af p, och äfven om s ersättes med $-s$, så gäller formeln tydligen för alla hela tal r och för alla hela tal s, som icke äro delbara med p, hvarmed följande teorem är bevisadt.

Teorem XXIII. Om p är ett positivt udda primtal, r ett helt tal hvilket som hälst samt s ett helt tal, som ej är delbart med p, så är

$$\left(\frac{r}{p}\right)=\prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}}\frac{\sin\frac{2hrs\pi}{p}}{\sin\frac{2hs\pi}{p}}.$$

För speciela värden på s erhållas häraf olika uttryck för den LEGENDRE'ska symbolen. För $s=1$ erhålles

(135) $$\left(\frac{r}{p}\right)=\prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}}\frac{\sin\frac{2hr\pi}{p}}{\sin\frac{2h\pi}{p}}.$$

Om vi åter sätta $s = \frac{p-1}{2}$, så finna vi

$$(136)\qquad \left(\frac{r}{p}\right) = \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \frac{\sin\left(hr\pi - \frac{hr\pi}{p}\right)}{\sin\left(h\pi - \frac{h\pi}{p}\right)} = \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \frac{\cos hr\pi \cdot \sin\frac{hr\pi}{p}}{\cos h\pi \cdot \sin\frac{h\pi}{p}},$$

och emedan

$$\cos m\pi = (-1)^m,$$

om m är ett helt tal, så erhålles af eqv. (136)

$$(137)\qquad \left(\frac{r}{p}\right) = \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} (-1)^{h(r-1)} \cdot \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \frac{\sin\frac{hr\pi}{p}}{\sin\frac{h\pi}{p}}.$$

Men nu är

$$(138)\qquad \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} (-1)^{h(r-1)} = (-1)^{(r-1)\sum_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} h} = (-1)^{\frac{(r-1)(p^2-1)}{8}},$$

och alltså erhålles af eqv. (137)

$$(139)\qquad \left(\frac{r}{p}\right) = (-1)^{\frac{(r-1)(p^2-1)}{8}} \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \frac{\sin\frac{hr\pi}{p}}{\sin\frac{h\pi}{p}},$$

hvilken formel gäller för alla hela tal r.

Om vi sätta eqv. (135) under formen

$$(140)\qquad \left(\frac{r}{p}\right) = \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \frac{\sin\frac{hr\pi}{p}}{\sin\frac{h\pi}{p}} \cdot \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \frac{\cos\frac{hr\pi}{p}}{\cos\frac{h\pi}{p}}$$

samt på denna likhet använda eqv. (139), så finna vi

$$(141)\qquad \left(\frac{r}{p}\right) = \left(\frac{r}{p}\right)(-1)^{\frac{(r-1)(p^2-1)}{8}} \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \frac{\cos\frac{hr\pi}{p}}{\cos\frac{h\pi}{p}}.$$

Antaga vi nu, att r ej är delbart med p, så är symbolen $\left(\frac{r}{p}\right)$ ej lika med noll, och då erhålles af denna likhet

$$(142) \qquad \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \frac{\cos\frac{hr\pi}{p}}{\cos\frac{h\pi}{p}} = (-1)^{\frac{(r-1)(p^2-1)}{8}}$$

och således, om vi upphöja till qvadrat,

$$(143) \qquad \left\{ \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \frac{\cos\frac{hr\pi}{p}}{\cos\frac{h\pi}{p}} \right\}^2 = 1 .$$

Om vi sätta eqv. (140) under formen

$$(144) \qquad \left(\frac{r}{p}\right) = \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \frac{\operatorname{tg}\frac{hr\pi}{p}}{\operatorname{tg}\frac{h\pi}{p}} \cdot \left\{ \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \frac{\cos\frac{hr\pi}{p}}{\cos\frac{h\pi}{p}} \right\}^2$$

samt använda eqv. (143), så erhålles

$$(145) \qquad \left(\frac{r}{p}\right) = \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \frac{\operatorname{tg}\frac{hr\pi}{p}}{\operatorname{tg}\frac{h\pi}{p}},$$

hvilken likhet nu är bevisad för alla hela tal r, som ej äro delbara med p. Men emedan båda membra äro noll, om r är delbart med p, så gäller eqv. (145) för alla hela tal r. Vi sammanfatta formlerna (135), (139), (145) i följande teorem.

Teorem XXIV. Om p är ett positivt udda primtal, och r ett helt tal hvilket som hälst, så är

$$\left(\frac{r}{p}\right) = \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \frac{\sin\frac{2hr\pi}{p}}{\sin\frac{2h\pi}{p}},$$

$$\left(\frac{r}{p}\right) = (-1)^{\frac{(r-1)(p^2-1)}{8}} \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \frac{\sin\frac{hr\pi}{p}}{\sin\frac{h\pi}{p}},$$

$$\left(\frac{r}{p}\right) = \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \frac{\operatorname{tg}\frac{hr\pi}{p}}{\operatorname{tg}\frac{h\pi}{p}}.$$

För $r = -1$ erhålles af hvilken som hälst af dessa tre formler

(146) $$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}},$$

och för $r = 2$ erhålles af den andra formeln

(147) $$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} P,$$

der P är en positiv qvantitet. Men emedan $\left(\frac{2}{p}\right)$ måste vara antingen $+1$ eller -1, så följer häraf, att $P = 1$, samt att

(148) $$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

I de tre formlerna i det föregående teoremet betyder r ett helt tal hvilket som hälst. Vi skola nu härleda andra uttryck för symbolen $\left(\frac{q}{p}\right)$ under förutsättning, att q är ett positivt udda tal, och för den skull skola vi först bevisa några formler, tillhörande de cirkulära funktionernas teori.

Emedan q är ett positivt udda tal, så erhåller man samtliga rötterna till eqvationen

(149) $$x^q - 1 = 0$$

på det sättet, att man i uttrycket

$$e^{-\frac{2k\pi i}{q}}$$

inför successive i stället för k alla hela tal från och med $-\frac{q-1}{2}$ till och med $\frac{q-1}{2}$. Följaktligen är identiskt

(150) $$x^q - 1 = \prod_{k=-\frac{q-1}{2}}^{k=\frac{q-1}{2}} \left(x - e^{-\frac{2k\pi i}{q}}\right),$$

hvaraf följer

(151) $$x^q - 1 = \prod_{k=-\frac{q-1}{2}}^{k=\frac{q-1}{2}} e^{-\frac{k\pi i}{q}} \cdot \prod_{k=-\frac{q-1}{2}}^{k=\frac{q-1}{2}} \left(xe^{\frac{k\pi i}{q}} - e^{-\frac{k\pi i}{q}}\right).$$

Om vi iakttaga, att den första produkten i högra membrum är lika med 1, och om vi i denna likhet sätta

$$x = e^{2v\pi i},$$

der v är en godtycklig qvantitet, så finna vi

$$(152) \qquad e^{2qv\pi i} - 1 = \prod_{k=-\frac{q-1}{2}}^{k=\frac{q-1}{2}} \left(e^{2v\pi i + \frac{k\pi i}{q}} - e^{-\frac{k\pi i}{q}}\right)$$

eller, efter förlängning med $e^{-qv\pi i}$,

$$(153) \qquad e^{qv\pi i} - e^{-qv\pi i} = \prod_{k=-\frac{q-1}{2}}^{k=\frac{q-1}{2}} \left\{e^{\left(v+\frac{k}{q}\right)\pi i} - e^{-\left(v+\frac{k}{q}\right)\pi i}\right\}$$

och alltså

$$(154) \qquad \sin qv\pi = (-1)^{\frac{q-1}{2}}\, 2^{q-1} \prod_{k=-\frac{q-1}{2}}^{k=\frac{q-1}{2}} \sin\left(v + \frac{k}{q}\right).$$

Om vi sätta denna likhet under formen

$$(155) \qquad \frac{\sin qv\pi}{\sin v\pi} = (-1)^{\frac{q-1}{2}}\, 2^{q-1} \prod_{k=-\frac{q-1}{2}}^{k=-1} \sin\left(v + \frac{k}{q}\right)\pi \cdot \prod_{k=1}^{k=\frac{q-1}{2}} \sin\left(v + \frac{k}{q}\right)\pi$$

samt införa $-k$ i stället för k i den första produkten i högra membrum, så erhålles

$$(156) \qquad \frac{\sin qv\pi}{\sin v\pi} = 2^{q-1} \prod_{k=1}^{k=\frac{q-1}{2}} \sin\left(\frac{k}{q} + v\right)\pi \cdot \sin\left(\frac{k}{q} - v\right)\pi$$

Om vi i eqv. (156) ersätta v med $v + \frac{1}{2}$, så erhålles

$$(157) \qquad \frac{\cos qv\pi}{\cos v\pi} = 2^{q-1} \prod_{k=1}^{k=\frac{q-1}{2}} \cos\left(\frac{k}{q} + v\right)\pi \cdot \cos\left(\frac{k}{q} - v\right)\pi$$

Af eqv. (156) och (157) erhålles genom multiplikation

$$(158) \qquad \frac{\sin 2qv\pi}{\sin 2v\pi} = 2^{q-1} \prod_{k=1}^{k=\frac{q-1}{2}} \sin\left(\frac{2k}{q} + 2v\right)\pi \cdot \sin\left(\frac{2k}{q} - 2v\right)\pi.$$

och af samma formler erhålles genom division

$$(159)\qquad \frac{\operatorname{tg} q v\pi}{\operatorname{tg} v\pi} = \prod_{k=1}^{k=\frac{q-1}{2}} \operatorname{tg}\left(\frac{k}{q}+v\right)\pi \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{k}{q}-v\right)\pi .$$

Om vi nu i formlerna (158), (156), (159) sätta

$$v = \frac{h}{p},$$

och om vi sedan använda de sålunda erhållna likheterna i ordning på de tre formlerna i teorem XXIV, sedan vi i dessa ersatt r med q, så erhålla vi följande teorem.

Teorem XXV. Om p är ett positivt udda primtal, och q ett positivt udda tal hvilket som hälst, så är

$$\left(\frac{q}{p}\right) = 2^{\frac{(p-1)(q-1)}{2}} \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \prod_{k=1}^{k=\frac{q-1}{2}} \sin\left(\frac{2k}{q}+\frac{2h}{p}\right)\pi \cdot \sin\left(\frac{2k}{q}-\frac{2h}{p}\right)\pi ,$$

$$\left(\frac{q}{p}\right) = 2^{\frac{(p-1)(q-1)}{2}} \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \prod_{k=1}^{k=\frac{q-1}{2}} \sin\left(\frac{k}{q}+\frac{h}{p}\right)\pi \cdot \sin\left(\frac{k}{q}-\frac{h}{p}\right)\pi$$

och

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \prod_{k=1}^{k=\frac{q-1}{2}} \operatorname{tg}\left(\frac{k}{q}+\frac{h}{p}\right)\pi \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{k}{q}-\frac{h}{p}\right)\pi .$$

Medelst hvilken som hälst af dessa tre formler kan reciprocitetssatsen för den LEGENDRE'ska symbolen bevisas. Om vi antaga, att både p och q äro positiva udda primtal, så är enligt den sista formeln

$$(160)\qquad \left(\frac{q}{p}\right) = \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \prod_{k=1}^{k=\frac{q-1}{2}} \operatorname{tg}\left(\frac{k}{q}+\frac{h}{p}\right)\pi \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{k}{q}-\frac{h}{p}\right)\pi .$$

Om vi i denna formel permutera p och q, så erhålles

$$(161)\qquad \left(\frac{p}{q}\right) = \prod_{h=1}^{h=\frac{q-1}{2}} \prod_{k=1}^{k=\frac{p-1}{2}} \operatorname{tg}\left(\frac{k}{p}+\frac{h}{q}\right)\pi \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{k}{p}-\frac{h}{q}\right)\pi ,$$

hvaraf följer, om vi skrifva h i stället för k och k i stället för h,

$$(162)\qquad \left(\frac{p}{q}\right) = \prod_{k=1}^{k=\frac{q-1}{2}} \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \operatorname{tg}\left(\frac{h}{p}+\frac{k}{q}\right)\pi \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{h}{p}-\frac{k}{q}\right)\pi$$

och således

$$(163)\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \prod_{k=1}^{k=\frac{q-1}{2}} \operatorname{tg}\left(\frac{k}{q}+\frac{h}{p}\right)\pi \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{k}{q}-\frac{h}{p}\right)\tau,$$

och af eqv. (160) och (163) följer

$$(164)\qquad \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} \left(\frac{q}{p}\right).$$

I de tre föregående teoremen ha vi erhållit uttryck för den LEGENDRE'ska symbolen medelst funktionerna $\sin x$ och $\operatorname{tg} x$. Vi skola nu ur dessa uttryck härleda rent aritmetiska uttryck för denna symbol, och vi använda för den skull den numeriska funktionen $E(x)$, som definieras på följande sätt. Om x är en reel qvantitet, så betyder $E(x)$ det hela tal, som är närmast lägre än eller lika med x, så att alltid

$$(165)\qquad 0 \leqq x - E(x) < 1.$$

Om x icke är ett helt tal, så följer af denna definition, att

$$(166)\qquad \sin \pi x = P(-1)^{E(x)},$$

der P betyder en positiv qvantitet. Om r är ett helt tal, så är enligt den första formeln i teorem XXIV

$$(167)\qquad \left(\frac{r}{p}\right) = \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \frac{\sin\frac{2hr\pi}{p}}{\sin\frac{2h\pi}{p}}.$$

Antaga vi nu, att r ej är delbart med p, samt använda eqv. (166) på högra membrum af eqv. (167), så erhålles

$$(168)\qquad \left(\frac{r}{p}\right) = \prod_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} P_1(-1)^{E\left(\frac{2hr}{p}\right)},$$

der P_1 är en positiv qvantitet. Emedan $\left(\frac{r}{p}\right)$ ej kan ha andra värden än $+1$ och -1, så följer häraf

$$(169)\qquad \left(\frac{r}{p}\right) = (-1)^{\sum\limits_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} E\left(\frac{2hr}{p}\right)}.$$

Om vi på samma sätt använda eqv. (166) på den andra formeln i teorem XXIV, så erhålles

$$(170)\qquad \left(\frac{r}{p}\right) = (-1)^{\frac{(r-1)(p^2-1)}{8} + \sum\limits_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} E\left(\frac{hr}{p}\right)}.$$

Härmed är följande teorem bevisadt.

Teorem XXVI. Om p är ett positivt udda primtal, och om r är ett helt tal, som icke är delbart med p, så är

$$\left(\frac{r}{p}\right) = (-1)^{\sum\limits_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} E\left(\frac{2hr}{p}\right)}$$

och

$$\left(\frac{r}{p}\right) = (-1)^{\frac{(r-1)(p^2-1)}{8} + \sum\limits_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} E\left(\frac{hr}{p}\right)}.$$

Om vi på samma sätt använda formeln (166) på de två första formlerna i teorem XXV, så erhålla vi följande teorem.

Teorem XXVII. Om p är ett positivt udda primtal, och q ett positivt udda tal, som icke är delbart med p, så är

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\sum\limits_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \sum\limits_{k=1}^{k=\frac{q-1}{2}} \left\{E\left(\frac{2k}{q}+\frac{2h}{p}\right) + E\left(\frac{2k}{q}-\frac{2h}{p}\right)\right\}}$$

och

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\sum\limits_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \sum\limits_{k=1}^{k=\frac{q-1}{2}} E\left(\frac{k}{q}-\frac{h}{p}\right)}.$$

Reciprocitetsformeln för den LEGENDRE'ska symbolen kan omedelbart härledas ur hvilken som hälst af dessa två likheter, om man iakttager, att

$$(171)\qquad E(x) + E(-x) = -1$$

för alla reela värden på x, som ej äro hela tal. Ty om p och q äro positiva udda och sins emellan olika primtal, och om vi i den sista formeln

$$(172) \qquad \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\sum\limits_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \sum\limits_{k=1}^{k=\frac{q-1}{2}} E\left(\frac{k}{q} - \frac{h}{p}\right)}$$

permutera p och q, så erhålles

$$(173) \qquad \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\sum\limits_{h=1}^{h=\frac{q-1}{2}} \sum\limits_{k=1}^{k=\frac{p-1}{2}} E\left(\frac{k}{p} - \frac{h}{q}\right)}.$$

Skrifva vi i denna formel h i stället för k och k i stället för h, så finna vi

$$(174) \qquad \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\sum\limits_{h=1}^{h=\frac{p-1}{2}} \sum\limits_{k=1}^{k=\frac{q-1}{2}} E\left(\frac{h}{p} - \frac{k}{q}\right)}.$$

Om vi multiplicera eqvationerna (172) och (174) med hvarandra samt använda formeln (171), så finna vi

$$(175) \qquad \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}.$$

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1891. N:o 10.
Stockholm.

Meddelanden från Stockholms Högskola. N:o 123.

Über die Berechnung der einzelnen Glieder der RIEMANN'schen Primzahlformel.

Von E. PHRAGMÉN.

[Mitgetheilt den 9 December 1891 durch D. G. LINDHAGEN.]

Die Forderungen, welche man auf eine mathematische Tafel stellt, wechseln natürlich bedeutend je nach dem Zweck der Tafel. Einige dieser Forderungen sind jedoch so allgemeiner Natur, dass sie für die meisten Fälle auf fast dieselbe Weise formulirt werden können. Wenn nämlich die Tafel nicht nur eine zufällige Zusammenstellung einer Anzahl von numerischen Resultaten sein will, sondern die Mittel darbieten soll, die Werthe der tabulirten Function für beliebige Werthe des Argumentes zu bestimmen, so ergeben sich fast unmittelbar einige Gesichtspunkte, von welchen aus man ihre grössere oder kleinere Brauchbarkeit beurteilen kann. Erstens nämlich ist von Gewicht die Genauigkeit, mit welcher die Functionswerthe aus der Tafel erhalten werden können. Diese Genauigkeit kann, je nach dem Zweck der Tafel, auf verschiedene Weise definirt werden. Man kann dieselbe z. B. nach dem absoluten Betrag des zu befürchtenden Fehlers beurteilen, oder man kann das Verhältniss dieses Fehlers zum Functionswerth selbst in Betracht ziehen. Jedenfalls darf man fordern, dass die Genauigkeit, in zweckentsprechender Weise definirt, durch die ganze Tafel ungefähr dieselbe bleibt. Und zwar wird sich in den meisten Fällen die letztere der oben formulirten Auffassungen der Genauigkeit sehr zweckentsprechend erweisen.

An zweiter Stelle kommt die Umfassung des Gebietes in Betracht, über welches die Tafel ausgedehnt ist, die Grenzen des Argumentes zwischen denen die Tafel zur Bestimmung des Werthes der Function die Mittel giebt. In dieser Beziehung kann die Tafel natürlich erst dann als vollständig gelten, wenn dem Argumente keine anderen Grenzen gesetzt werden, als diejenigen ausserhalb welchen die Function selbst nicht mehr definirt ist. Drittens hat man noch auf das Mass von Arbeit Rücksicht zu nehmen, welches gefordert wird um aus den Angaben der Tafel den Functionswerth herzuleiten. Es ist natürlich eine solche Anordnung der Tafel empfehlenswerth, dass diese Arbeit die ganze Tafel hindurch ungefähr constant bleibt.

Es ist auffallend wie wenig man oft bemüht ist, diesen Forderungen zu entsprechen.

Es sind die bis jetzt vorliegenden Tafeln über den Integrallogarithmus welche uns zu diesen Betrachtungen veranlassen. Die vollständigsten unter diesen sind ohne Vergleich die Tafeln von STENBERG.[1]) Der Verfasser dieser Tafel scheint während der Arbeit den Plan derselben geändert zu haben, und zwar kann diese Änderung als einen Übergang von der ersteren zur letzteren der beiden oben formulirten Definitionen der Genauigkeit charakterisirt werden. Der Verfasser giebt nämlich im ersten Teil die Werthe der Function $\mathrm{Li}\,10^{\alpha}$ von $\alpha = -15{,}00$ bis $\alpha = -0{,}50$ mit 18 Decimalstellen, von $\alpha = -0{,}50$ bis $\alpha = 0{,}00$ die Werthe von

$$\mathrm{Li}\,10^{\alpha} - \log\log 10^{-\alpha}$$

wo »log» den natürlichen Logarithmus bezeichnet, ebenso mit 18 Decimalstellen. Im zweiten Teil dagegen giebt er die Werthe von

$$\mathrm{Li}\,10^{\alpha} - \log\log 10^{\alpha}$$

von $\alpha = 0{,}00$ bis $\alpha = 1{,}00$, und die Werthe von $\mathrm{Li}\,10^{\alpha}$ von $\alpha = 1{,}00$ bis $\alpha = 3{,}50$ mit 16 à 17 Ziffern, d. h. mit einem absoluten Fehler welcher ungefähr in Proportion mit dem Func-

[1]) L. STENBERG, *Tabulæ logarithmi integralis*, Malmö, Pars I 1861, Pars II 1867, Pars III 1871.

tionswerth selbst wächst. Im dritten Teil welcher von $\alpha = 3{,}50$ bis $\alpha = 10{,}00$ geht, sind dieselben Principien befolgt, nur ist hier die Anzahl der Ziffern auf 14 à 15 reducirt. Bei $\alpha = 10$ bricht die Tafel ab. Es ist wahr dass Herr STIELTJES schon für diesen Werth von α den Werth von $\mathrm{Li}\,10^\alpha$ mit Hülfe der asymtotischen Formel

$$\mathrm{Li}\, e^x = e^x \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{\lfloor 2}{x^3} + \ldots + \frac{\lfloor n-1}{x^n} + \ldots\right]$$

und unter Benutzung einiger Kunstgriffe mit 13 richtigen Ziffern berechnet hat.[1]) Man muss aber dann nicht nur 23 Glieder dieser Reiche berechnen, sondern ausserdem noch den Rest durch ein Verfahren bestimmen, dessen Legitimität wenigstens nicht vollständig erwiesen ist. Da diese Arbeit wohl doch als zu bedeutend anzusehen ist, können wir also die Tafel von STENBERG nicht als abgeschlossen betrachten.

Von den kleineren Tafeln sind wohl die wichtigsten: die von BRETSCHNEIDER, in Schlömilchs Zeitschrift, Jahrg. 6, 1861, und die von GRAM, in der Abhandlung *Undersögelser angaaende Mængden af Primtal under en given Grænse* (Schriften der dänischen Akademie der Wissenschaften, 6:e Reihe, 2:er Bd., 1884).[2])

BRETSCHNEIDER giebt die Werthe von $\mathrm{Li}\, e^x$ und $\mathrm{Li}\, e^{-x}$ mit 10 Decimalstellen für jedes Hundertstel von $x = 0$ bis $x = 1$, und für jedes Zehntel von $x = 1$ bis $x = 7{,}5$, und für dieselben Argumentwerthe ausserdem die Werthe von zwei anderen Functionen $\mathrm{ci}\, x$ und $\mathrm{si}\, x$, von welchen weiter unten die Rede sein wird.

---

[1]) *Thèse*, Paris 1886.

[2]) Andere finden sich in:

SOLDNER, Théorie et tables d'une nouvelle fonction transcendante, München 1809.

LEGENDRE, Exercises de calcul intégral, t. 3, 1816, p. 448.

GLAISHER, Tables of the numerical values of the Sine-integral, Cosine-integral and Exponential-integral. Philosophical transactions, vol. 160, 1870.

BELLAVITIS, Tavole numeriche etc., Memorie dell'Istituto Veneto, t. 18, 1874.

GRAM giebt die Werthe von $\mathrm{Li}\, e^x$ für jedes Fünftel von $x = 5$ bis $x = 20$ mit 10 Decimalstellen bis $x = 13$, dann mit immer weniger Decimalstellen (für $x = 19{,}8$ mit 7). Die Anzahl der Ziffern dagegen wächst von 12 bei $x = 5$ bis 15 bei $x = 19{,}8$.

Man sieht leicht, dass auch diese Tafeln in ihrer vorliegenden Gestalt den anfangs formulirten Forderungen nicht entsprechen.

Ich habe diese kritischen Bemerkungen nur deshalb vorausgeschickt, um die Veröffentlichung der folgenden Seiten zu motiviren, auf denen der Versuch gemacht ist, einen Weg anzugeben auf welchem man in der einfachsten Weise zu einer völlig befriedigenden Tafel über den Integrallogarithmus und einige verwandte Transcendenten gelangen kann.

Unter denjenigen Combinationen der Function $\mathrm{Li}\, x$ mit bekannten Functionen welche sich unmittelbar darbieten, scheint weder $\mathrm{Li}\, e^x$ noch die von GRAM vorgeschlagene $\log \mathrm{Li}\, e^x$ so grosse Vorteile mitzuführen wie die Function

$$e^{-x}\, \mathrm{Li}\, e^x.$$

Dieselbe befriedigt, wie man sogleich findet, die einfache Differentialgleichung

$$\text{(1)} \qquad \frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{x}.$$

Setzt man der Kürze halber

$$y_n = (-1)^n \frac{d^n y}{dx^n},$$

so hat man also allgemein

$$\text{(2)} \qquad y_{n+1} = y_n - \frac{\underline{|n}}{x^{n+1}},$$

eine Formel durch welche die successiven Derivirten mit der grössten Leichtigkeit berechnet werden können.

Sämmtliche Functionen y_n sind negativ für kleine positive Werthe von x. Ferner ist die Function $y_n e^x$ beständig wachsend, denn man hat

$$\frac{d}{dx} y_n e^x = \frac{\underline{|n} \, e^x}{x^{n+1}} .$$

Also verschwindet die Function y_n für einen und nur einen Werth von x, welcher x_n heissen möge, und ist positiv für $x > x_n$.

Aus (2) folgt dass für $y_{n+1} = 0$ y_n positiv ist, d. h. dass

$$x_{n+1} > x_n .$$

Die Gleichung

$$\frac{dy_n}{dx} = - y_{n+1}$$

sagt uns also, dass die Function y_n für $x = x_{n+1}$ ihren grössten Werth erreicht, und für grössere Werthe von x beständig abnimmt.

Wenn man die von Herrn STIELTJES in seiner *Thèse* benutzten Integraltransformationen einer genaueren Discussion unterwärfe, so wäre es nicht schwer strenge zu beweisen dass man für alle n

$$n < x_n < n + 1$$

hat. Da aber die Kentniss dieser Thatsache für unseren Zweck nicht notwendig ist, begnügen wie uns mit dieser Andeutung.

Dagegen ist für uns von Interesse, dass nicht nur y_n, sondern auch xy_n von einem gewissen Werthe von x an beständig abnimmt. Um dies auf einfachste Weise zu zeigen, führen wir die Grösse

$$[n] = xy_n - ny_{n-1}$$

ein. Man hat dann die Gleichungen

$$[n] = y_n + [n + 1] ,$$

$$\frac{d}{dx} [n] = - [n + 1] ,$$

$$\frac{d}{dx} [n] e^x = y_n e^x .$$

Die letzte derselben zeigt, dass die Function $[n] e^x$ beständig wächst, sobald $x > x_n$ ist. Für $x = x_n$ ist $[n] = - ny_{n-1}(x_n)$, also negativ.

Unter denjenigen Werthen von x, welche grösser als x_n sind, giebt es also einen, und nur einen, für welchen die Funktion $[n]$ verschwindet. Bezeichnen wie diesen Werth mit x'_n, so ist also

$$x'_n > x_n ,$$

und

$$[n] > 0, \text{ sobald } x > x'_n .$$

Für $x = x'_n$ ist

$$[n+1] = -y_n$$

d. h. negativ, und man hat also

$$x'_{n+1} > x'_n .$$

Für $x = x'_{n+1}$ hat also die Function $[n]$ ein Maximum und nimmt von diesem Werthe an beständig ab. Es liegen: x'_1 zwischen 3 und 4, x'_2 zwischen 4 und 5, x'_3 zwischen 5 und 6, x'_4 zwischen 7 und 8, x'_5 zwischen 8 und 9, x'_6 zwischen 9 und 10, u. s. w.

Für unseren Zweck können wie dieses Resultat in dem folgenden Satze zusammenfassen:

Ist für einen gewissen Werth von x

$$y_{n+1} \textit{ positiv},$$

$$xy_{n+1} - (n+1)y_n \textit{ auch positiv},$$

$$xy_n < \delta,$$

so bleibt die letzte Ungleichung auch für alle grössere Werthe von x *gültig.*

Denn man schliesst aus der ersten Annahme, dass $x > x_{n+1}$, und aus der zweiten dass auch $x > x'_{n+1}$. Es ist also

$$\frac{d}{dx}(xy_n) = -([n+1] + ny_n)$$

sicher negativ für alle grössere Werthe von x.

Von dem betrachteten Werthe von x an stellt also der Ausdruck

$$(3) \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{\lfloor 2}{x^3} + \ldots + \frac{\lfloor n-1}{x^n}$$

den Werth der Function $y = e^{-x}\mathrm{Li}\, e^x$ mit einem Fehler dar, welcher nicht grösser ist als

$$\delta \cdot y\,.$$

Der Fehler ist nämlich y_n, und y ist grösser als $\frac{1}{x}$.

Also brauchen wie die Tafel der Function $e^{-x}\mathrm{Li}\, e^x$ nur bis zu einer gewissen Grenze fortsetzen. Oberhalb dieser Grenze kann man sie durch die Formel (3) direct berechnen.

Ebenso können wie eine untere Grenze für x angeben, unterhalb welcher es bequemer wird die Function

$$\mathrm{Li}\, e^x - \log x = C + \frac{x}{1|\underline{1}} + \frac{x^2}{2|\underline{2}} + \frac{x^3}{3|\underline{3}} \cdots$$

zu tabuliren, als die Function y.

Zwischen diesen Grenzen könnte man die Rechnung so führen, dass man immer $y(x+h)$ aus $y(x)$ durch die Formel

$$y(x+h) = y - hy_1 + \frac{h^2}{|\underline{2}}y_2 - \frac{h^3}{|\underline{3}}y_3 + \cdots$$

berechnet, eine Methode welche den Vorteil mitführt, dass man gleichzeitig $y(x-h)$ berechnen kann, was eine gute Controlle giebt. Findet man eine so häufige Controlle entbehrlich, so kann man die Berechnung nicht unbedeutend bequemer anordnen, indem man eine von Herrn DARBOUX gegebene Entwickelung benutzt.[1]) Man erhält diese Entwickelung aus der Identität

$$\int_0^h \Big[\overset{2n}{\varphi}(z)f(z) - \overset{2n-1}{\varphi}(z)f'(z) + \overset{2n-2}{\varphi}(z)f''(z) - \ldots + \varphi(z)\overset{2n}{f}(z)\Big] =$$

$$= \int_0^h \Big[\overset{2n+1}{\varphi}(z)f(z) + \varphi(z)\overset{2n+1}{f}(z)\Big]\,dx$$

welche für $\varphi(z) = \frac{z^n(z-h)^n}{|\underline{2n}}$ die Formel

[1]) Liouvilles Journal, 1876.

$$(4)\ f(h)-f(0)-\frac{n}{2n}\cdot\frac{h}{\underline{|1}}[f'(h)+f'(0)]+\frac{n(n-1)}{2n(2n-1)}\cdot\frac{h^2}{\underline{|2}}[f''(h)-f''(0)]-\ldots$$

$$+(-1)^n\frac{n(n-1)\ldots 1}{2n(2n-1)\ldots(n+1)}\cdot\frac{h^n}{\underline{|n}}[f^n(h)+(-1)^n f^n(0)]$$

$$=\frac{(-1)^n}{\underline{|2n}}\int_0^h x^n(h-x)^n f^{2n+1}(x)\,dx$$

giebt.

Setzen wir $f(z)=e^{-(x+z)}\operatorname{Li} e^{(x+z)}=y(x+z)$, und schreiben wir der Kürze halber

$$y=y(x)\,,$$
$$y'=y(x+h)\,,$$
$$\eta_n=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{\underline{|2}}{x^3}+\ldots+\frac{\underline{|n-1}}{x^n}\,,$$
$$\eta'_n=\frac{1}{x+h}+\frac{1}{(x+h)^2}+\frac{\underline{|2}}{(x+h)^3}+\ldots+\frac{\underline{|n-1}}{(x+h)^n}\,;$$
$$Y_n=\eta'_n+(-1)^n(y-\eta_n)\,,$$

so geht (4) in die Gleichung

$$(5)\quad y'=\frac{y+\frac{h}{2}Y_1+\frac{n-1}{2n-1}\frac{h^2}{2\underline{|2}}Y_2+\ldots+\frac{(n-1)\ldots 1}{(2n-1)\ldots(n+1)}\frac{h^n}{2\underline{|n}}Y_n+(-1)^{n+1}R_n}{1+\frac{h}{2}+\frac{n-1}{2n-1}\frac{h^2}{2\underline{|2}}+\ldots+\frac{(n-1)\ldots 1}{(2n-1)\ldots(n+1)}\frac{h^n}{2\underline{|n}}}\,,$$

$$R_n=\frac{1}{\underline{|2n}}\int_0^h x^n(h-x)^n y_{2n+1}dx\,,\quad 0<R_n<\frac{\underline{|n}}{\underline{|2n}}\cdot\frac{\underline{|n}}{\underline{|2n+1}}\cdot\max.\,y_{2n+1}\,,$$

über, deren Berechnung so bequem ist wie man nur wünschen kann.

Trägt man in der Tafel auch die Werthe der Derivirten

$$(-1)^n(y-\eta_n)\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ldots)$$

ein, was sich aus mehreren Gesichtspunkten empfiehlt, so kann die obige Formel auch bei Benutzung der Tafel statt gewöhnlicher Interpolation gebraucht werden, indem die Grössen η'_1, η'_2 u. s. w. leicht direct berechnet werden.

Mit $\mathrm{Li}\, e^{-x}$, x positiv, pflegt man gewöhnlich nicht diejenige Function bezeichnen, welche mit $\mathrm{Li}\, e^{x}$ durch analytische Fortsetzung zusammenhängt, sondern nur den reellen Teil dieser Function. Indem wir diese Bezeichnung beibehalten, wollen wir jetzt über die einfachste Weise diese Function $\mathrm{Li}\, e^{-x}$ zu tabuliren einige Bemerkungen entwickeln.

Für kleine x-Werthe berechnet man sie natürlich durch die Formel

$$\mathrm{Li}\, e^{-x} - \log x = C - \frac{x}{1\underline{|1}} + \frac{x^2}{2\underline{|2}} - \frac{x^3}{3\underline{|3}} + \dots$$

Aber sobald x ein bischen grössere Werthe erhält, ist es vorteilhafter, die Function

$$y = - e^{x}\, \mathrm{Li}\, e^{-x}$$

zu betrachten. Diese Function kann bekanntlich durch ein definites Integral in einfacher Weise dargestellt werden, nämlich

$$(6) \qquad y = \int_0^\infty \frac{e^{-xz}\, dz}{1+z}.$$

Übrigens befriedigt sie die Differentialgleichung

$$(7) \qquad \frac{dy}{dx} = y - \frac{1}{x}.$$

Schreiben wir

$$y_n = (-1)^n \frac{d^n y}{dx^n} = \int_0^\infty \frac{e^{-xz} z^n dz}{1+z}$$

so ist y_n beständig positiv und abnehmend, und kleiner als

$$\int_0^\infty e^{-xz}\, z^n\, dz = \frac{\underline{|n}}{x^{n+1}}.$$

Da man

$$(8) \qquad y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{\underline{|2}}{x^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{\underline{|n-1}}{x^n} + (-1)^n y_n$$

hat, so kann y durch die Formel

$$y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{\underline{|2}}{x^2} - \ldots \pm \frac{\underline{|n-1}}{x^n}$$

mit einem Fehler kleiner als

$$\delta \cdot y$$

dargestellt werden, sobald x so gross genommen wird, dass

$$\frac{x}{x-1} \frac{\underline{|n}}{x^n} < \delta .$$

Für die Berechnung des mittleren Teils der Tafel kann man wieder die Entwickelung von DARBOUX benutzen. Dieselbe ergiebt hier

$$(9)\quad y' = \frac{y - \frac{h}{2} Y_1 + \frac{n-1}{2n-1} \frac{h^2}{2\underline{|2}} Y_2 - \ldots + (-1)^n \frac{(n-1)\ldots 1}{(2n-1)\ldots(n+1)} \frac{h^n}{2\underline{|n}} Y_n + (-1)^{n+1} R_n}{1 - \frac{h}{2} + \frac{n-1}{2n-1} \frac{h^2}{2\underline{|2}} - \ldots + (-1)^n \frac{(n-1)\ldots 1}{(2n-1)\ldots(n+1)} \frac{h^n}{2\underline{|n}}}$$

$$R_n = \frac{1}{\underline{|2n}} \int_0^h x^n (h-x)^n y_{2n+1}\, dx, \qquad 0 < R_n < \frac{\underline{|n} \cdot \underline{|n}}{\underline{|2n}\ \underline{|2n+1}} y_{2n+1} .$$

Diese Formel unterscheidet sich formell nur dadurch von der Formel (5), dass h das entgegengesetzte Vorzeichen erhalten hat. Es bedeutet hier

$$\eta_n = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{\underline{|2}}{x^3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{\underline{|n-1}}{x^n},$$

$$\eta'_n = \frac{1}{x+h} - \frac{1}{(x+h)^2} + \frac{\underline{|2}}{(x+h)^3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{\underline{|n-1}}{(x+h)^n},$$

$$Y_n = \eta'_n + (-1)^n (y - \eta_n) .$$

In Zusammenhang mit den Functionen $\mathrm{Li}\, e^x$, $\mathrm{Li}\, e^{-x}$ pflegt man auch einige anderen Functionen behandeln. BRETSCHNEIDER z. B. führt für die folgenden Functionen specielle Bezeichnungen ein

$$\mathfrak{Ci}\, x = \frac{\mathrm{Li}\, e^x + \mathrm{Li}\, e^{-x}}{2},$$

$$\mathfrak{Si}\, x = \frac{\mathrm{Li}\, e^x - \mathrm{Li}\, e^{-x}}{2},$$

$$\mathrm{ci}\, x = \int \frac{\cos x}{x}\, dx,$$

$$\mathrm{si}\, x = \int \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

wobei die Integrations-Constanten in den beiden letzten Formeln so bestimmt werden dass

$$\mathrm{ci}\, x - \log x = C,$$

$$\mathrm{si}\, x = 0$$

für $x = 0$ wird. Die beiden ersten dieser Functionen erfordern keine neue Behandlung.

Da die beiden letzteren Functionen unendlich viele Maxima und Minima haben, erscheint es auf den ersten Blick schwierig, dieselben so zu tabuliren, dass man ihre Werthe für beliebig grosse Argumentwerthe erhalten kann, und in der That ist wohl diese Aufgabe unlösbar, wenn man die Forderung festhält, dass das Verhältniss des Fehlers zum Functionswerth eine gegebene Grösse nicht übersteigen soll. Wenn man sich aber damit begnügt, dass der Fehler im Verhältniss zum nächsten Maximalwerth der Function nicht wächst, so kann dies durch eine einfache Umformung erlangt werden. Statt der Functionen $\mathrm{ci}\, x$, $\mathrm{si}\, x$ von BRETSCHNEIDER ziehen wir es aber vor, die Functionen

(10)
$$\varphi(x) = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{x} \frac{\cos z}{z}\, dz = -\int_{x}^{\infty} \frac{\cos z}{z}\, dz,$$

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\sin z}{z}\, dz = \pi - \int_{x}^{\infty} \frac{\sin z}{z}\, dz$$

zum Ausgangspunkt zu wählen. Dieselben unterscheiden sich nur durch hinzugefügte Constanten von den Functionen ci x, si x, und zwar ist

$$\varphi(x) = -\operatorname{ci} 1 - \int_1^\infty \frac{\cos z}{z}\, dz + \operatorname{ci} x\,,$$

$$\psi(x) = \operatorname{si} x + \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} + \operatorname{si} x\,.$$

Führen wir jetzt die Function

$$(11) \qquad f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xz}}{1+z^2}\, dz$$

ein, welche also nur für positive Werthe von x definirt ist, so erhalten wir unmittelbar

$$(12) \qquad f(x) + f''(x) = \frac{1}{x}\,,$$

und

$$(13) \qquad \begin{aligned} &\frac{d}{dx}(+f(x)\sin x + f'(x)\cos x) = \frac{\cos x}{x}\,,\\ &\frac{d}{dx}(-f(x)\cos x + f'(x)\sin x) = \frac{\sin x}{x}\,. \end{aligned}$$

Da sowohl $f(x)$ wie $f'(x)$ für $x = \infty$ den Werth Null annehmen, so erhält man hieraus

$$(14) \qquad \begin{aligned} \varphi(x) &= f(x)\sin x + f'(x)\cos x\,,\\ \psi(x) &= -f(x)\cos x + f'(x)\sin x + \pi\,. \end{aligned}$$

Während man für kleine Werthe von x die Functionen $\varphi(x) + \log x$, $\psi(x)$ berechnet, wird man für grössere Werthe des Argumentes vorziehen, die Functionen $f(x)$ und $-f'(x)$ zu tabuliren. Schreiben wir allgemein

$$y_{2n} = f^{2n}(x)\,,$$

$$y_{2n+1} = -f^{2n+1}(x),$$

so ist

$$y_n = \int_0^\infty \frac{z^n e^{-xz}}{1+z^2}\, dz \,, \tag{15}$$

also beständig positiv und abnehmend. Man hat übrigens die unmittelbar herzuleitende Ungleichung

$$y_n < \frac{\underline{|n}}{x^{n+1}} \,.$$

Für sehr grosse Argumentwerthe gelten die asymtotischen Formeln

$$\begin{aligned} y = f(x) &= \frac{1}{x} - \frac{\underline{|2}}{x^3} + \frac{\underline{|4}}{x^5} - \ldots - (-1)^n \frac{\underline{|2n-2}}{x^{2n-1}} + (-1)^n y_{2n} \\ y_1 = -f'(x) &= \frac{1}{x^2} - \frac{\underline{|3}}{x^4} + \frac{\underline{|5}}{x^6} - \ldots - (-1)^n \frac{\underline{|2n-1}}{x^{2n}} + (-1)^n y_{2n+1} \,. \end{aligned} \tag{16}$$

Für zwischenliegende Werthe des Argumentes kann man wieder die Entwickelung von Herrn DARBOUX benutzen, wiewohl dieselbe hier nicht ganz so einfache Formeln giebt wie früher. Wendet man sie nämlich auf die beiden Functionen y, y_1 an, so kommt man auf zwei lineare Gleichungen zur Bestimmung dieser Functionen, welche, wenn man zur Abkürzung schreibt

$$a_\nu = \frac{n(n-1)\ldots(n-\nu+1)}{2n(2n-1)\ldots(2n-\nu+1)} \frac{h^\nu}{\underline{|\nu}} ,$$

$$\eta_\nu = \frac{1}{x} - \frac{\underline{|2}}{x^3} + \ldots - (-1)^\nu \frac{\underline{|2\nu-2}}{x^{2\nu-1}} ,$$

$$\zeta_\nu = \frac{1}{x^2} - \frac{\underline{|3}}{x^4} + \ldots - (-1)^\nu \frac{\underline{|2\nu-1}}{x^{2\nu}} ,$$

die folgende Form annehmen:

$$\begin{aligned} &(y-y')(1-a_2+a_4-\ldots) + (y_1-y')(a_1-a_3+a_5-\ldots) \\ &\quad = 2a_1 y_1 + a_3(\zeta_1+\zeta'_1-2y_1) + a_5(2y'_1-\zeta_2-\zeta'_2) + \ldots \\ &\quad - a_2(\eta_1-\eta'_1) + a_4(\eta_2-\eta'_2) - \ldots \quad + R_n \,, \\ &-(y-y')(a_1-a_3+a_5-\ldots) + (y_1-y'_1)(1-a_2+a_4-\ldots) \\ &\quad = a_1(\eta_1+\eta'_1-2y) + a_3(2y-\eta_2-\eta'_2) + a_5(\eta_3+\eta'_3-2y)\ldots \\ &\quad - a_2(\zeta_1-\zeta'_1) + a_4(\zeta_2-\zeta'_2) - \ldots \quad + R'_n \,, \end{aligned} \tag{17}$$

mit

$$R_n = \frac{(-1)^n}{|2n} \int_0^h x^n (h - x)^n y_{2n+1} dx ,$$

$$R'_n = \frac{(-1)^n}{|2n} \int_0^h x^n (h - x)^n y_{2n+2} dx .$$

Die bisher betrachteten Functionen können als specielle Fälle gewisser allgemeineren Transcendenten betrachtet werden, über deren Berechnung wir jetzt einige Worte sagen wollen. In der That, man setze, indem $\varkappa$ einen reellen Parameter bezeichnet,

$$\varphi(\varkappa, x) = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{x} \frac{e^z \cos \varkappa z}{z} dz$$

(18) $$= \int_{-\infty}^{-x} \frac{e^z \cos \varkappa z}{z} dz + \int_{-x}^{+x} \frac{(e^z - 1) \cos \varkappa z}{z} dz \quad (x > 0)$$

$$\psi(\varkappa, x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^z \sin \varkappa z}{z} dz .$$

Dann ist, für $\varkappa = 0$,

$$\varphi(0, x) = \text{Li}\, e^x,$$

$$\psi(0, x) = 0 .$$

Ferner hat man

$$\varphi\left(\varkappa, \frac{x}{\varkappa}\right) = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{\frac{z}{\varkappa}} \cos z}{z} dz ,$$

$$\psi\left(\varkappa, \frac{x}{\varkappa}\right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{\frac{z}{\varkappa}} \sin z}{z} dz ,$$

und da die Integrale der rechten Glieder für unbegrenzt grosse Werthe von $\varkappa$ gleichmässig convergiren, wie sich durch Zerlegung des Integrationsintervalles in solche Teile, dass $\cos z$ resp.

$\sin z$ in jedem Teil das Vorzeichen nicht wechselt, und nachherige Zusammenschlagung je eines positiven und eines negativen Gliedes der erhaltenen unendlichen Reihe leicht zeigen lässt, so hat man

(19)
$$\lim_{\varkappa = \infty} \varphi\left(\varkappa, \frac{x}{\varkappa}\right) = \varphi(x),$$
$$\lim_{\varkappa = \infty} \psi\left(\varkappa, \frac{x}{\varkappa}\right) = \psi(x).$$

Die Functionen $\varphi(\varkappa, x)$, $\psi(\varkappa, x)$ lassen sich durch bestimmte Integrale auf viele verschiedene Weisen darstellen.

Wenn wir die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial \varkappa} \varphi(\varkappa, x) = -\int_{-\infty}^{x} e^z \sin \varkappa z \, dz$$
$$\frac{\partial}{\partial \varkappa} \psi(\varkappa, x) = \int_{-\infty}^{x} e^z \cos \varkappa z \, dz$$

durch Differentiation unter dem Integralzeichen bilden, was erlaubt ist, da die unendlichen Integrale, wie oben bemerkt, gleichmässig convergiren (es gilt dies nämlich auch für complexe Werthe von $\varkappa$ in der Umgebung der reellen Axe), so erhalten wir durch Ausführung der Integration auf der rechten Seite

$$\frac{\partial}{\partial \varkappa} \varphi(\varkappa, x) = \frac{e^x(\varkappa \cos \varkappa x - \sin \varkappa x)}{1 + \varkappa^2},$$
$$\frac{\partial}{\partial \varkappa} \psi(\varkappa, x) = \frac{e^x(\varkappa \sin \varkappa x + \cos \varkappa x)}{1 + \varkappa^2}.$$

Integriren wie diese Gleichungen unter Berücksichtigung der auf der vorigen Seite angegebenen Werthe für $\varkappa = 0$, so erhalten wir

(20)
$$\varphi(\varkappa, x) = \mathrm{Li}\, e^x + e^x \int_0^{\varkappa} \frac{z \cos xz - \sin xz}{1 + z^2} dz,$$
$$\psi(\varkappa, x) = e^x \int_0^{\varkappa} \frac{z \sin xz + \cos xz}{1 + z^2} dz.$$

Indem wir diese Gleichungen ein wenig umformen, erhalten wir

$$\varphi(\varkappa, x) = \mathrm{Li}\, e^x + e^x \cdot \Re \int_0^{\varkappa} \frac{i e^{xzi}}{1+zi}\, dz,$$

$$\psi(\varkappa, x) = e^x\, \Re \int_0^{\varkappa} \frac{e^{xzi}\, dz}{1+zi},$$

$$\varphi(\varkappa, x) + i\psi(\varkappa, x) = \mathrm{Li}\, e^x + e^x \int_0^{\varkappa} \frac{e^{xzi}\, i\, dz}{1+zi}$$

$$= \mathrm{Li}\, e^x + e^x \int_0^{\varkappa x} \frac{e^{zi}\, i\, dz}{x+zi}$$

oder

$$\varphi(\varkappa, x) + i\psi(\varkappa, x) = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{x} \frac{e^z}{z}\, dz + \int_x^{x+\varkappa x i} \frac{e^z}{z}\, dz$$

oder endlich

(21) $$\varphi(\varkappa, x) + i\psi(\varkappa, x) = \mathrm{Li}\, e^{x+\varkappa x i},$$

indem wir die Function $\mathrm{Li}\, e^{x+yi}$ so bestimmen, dass man zum Principalwerth des Integrales $\int_{-\infty}^{x} \frac{e^z}{z}\, dz$ den Werth des geradlinigen Integrals

$$\int_0^{y} \frac{e^{x+ti}}{x+ti}\, i\, dt$$

hinzufügt. Diese Function ist also längs der Geraden $x = 0$ discontinuirlich, indem ihr Werth sich plötslich mit $\pm \pi i$ ändert.

Man kann für die Functionen $\varphi(\varkappa, x)$, $\psi(\varkappa, x)$ noch andere Ausdrücke erhalten, welche sich besser als die bisher gefundenen für numerische Berechnung eignen. Aus der letzten Gleichung erhalten wir

$$\varphi\left(\frac{\varkappa}{x}, x\right) + i\psi\left(\frac{\varkappa}{x}, x\right) = \mathrm{Li}\, e^{x+\varkappa i}.$$

Also muss man haben

$$\frac{\partial}{\partial \varkappa}\varphi\left(\frac{\varkappa}{x}, x\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\psi\left(\frac{\varkappa}{x}, x\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \varkappa}\psi\left(\frac{\varkappa}{x}, x\right) = \quad \frac{\partial}{\partial x}\varphi\left(\frac{\varkappa}{x}, x\right).$$

Die Gleichungen (20) können geschrieben werden

$$\varphi\left(\frac{\varkappa}{x}, x\right) = \mathrm{Li}\, e^x + e^x \int\limits_0^{\varkappa} \frac{z \cos z - x \sin z}{x^2 + z^2}\, dz,$$

$$\psi\left(\frac{\varkappa}{x}, x\right) = e^x \int\limits_0^{\varkappa} \frac{z \sin z + x \cos z}{x^2 + z^2}\, dz.$$

Also erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi\left(\frac{\varkappa}{x}, x\right) = e^x\, \frac{\varkappa \sin \varkappa + x \cos \varkappa}{x^2 + \varkappa^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi\left(\frac{\varkappa}{x}, x\right) = -\, e^x\, \frac{\varkappa \cos \varkappa - x \sin \varkappa}{x^2 + \varkappa^2}.$$

Aus den Gleichungen (18) erhält man aber, sobald $\varkappa x > 0$ ist,

$$\varphi\left(\frac{\varkappa}{x}, x\right) = \text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{\varkappa} \frac{e^{\frac{x}{\varkappa} z} \cos z}{z}\, dz,$$

$$\psi\left(\frac{\varkappa}{x}, x\right) = \int\limits_{-\infty}^{\varkappa} \frac{e^{\frac{x}{\varkappa} z} \sin z}{z}\, dz.$$

Für $x = 0$ erhalten wir also

$$\lim_{x = 0} \varphi\left(\frac{\varkappa}{x}, x\right) = \varphi(\varkappa),$$

$$\lim_{\varkappa = 0} \psi\left(\frac{\varkappa}{x}, x\right) = \psi(\varkappa),$$

Gleichungen welche übrigens, von der Bezeichnung abgesehen, mit den Gleichungen (19) identisch sind. Also ergiebt die Integration der soeben hergeleiteten Gleichungen

$$\varphi\left(\frac{\varkappa}{x}, x\right) = \varphi(\varkappa) + \sin\varkappa \int_0^\varkappa \frac{e^z \varkappa\, dz}{\varkappa^2 + z^2} + \cos\varkappa \int_0^\varkappa \frac{e^z z\, dz}{\varkappa^2 + z^2},$$

$$\psi\left(\frac{\varkappa}{x}, x\right) = \psi(\varkappa) - \cos\varkappa \int_0^\varkappa \frac{e^z \varkappa\, dz}{\varkappa^2 + z^2} + \sin\varkappa \int_0^\varkappa \frac{e^z z\, dz}{\varkappa^2 + z^2},$$

oder, indem man $\varkappa x$ statt $\varkappa$ schreibt,

(22)
$$\varphi(\varkappa, x) = \varphi(\varkappa x) + \sin\varkappa x \int_0^1 \frac{e^{xz} \varkappa\, dz}{\varkappa^2 + z^2} + \cos\varkappa x \int_0^1 \frac{e^{xz} z\, dz}{\varkappa^2 + z^2},$$

$$\psi(\varkappa, x) = \psi(\varkappa x) - \cos\varkappa x \int_0^1 \frac{e^{xz} \varkappa\, dz}{\varkappa^2 + z^2} + \sin\varkappa x \int_0^1 \frac{e^{xz} z\, dz}{\varkappa^2 + z^2}.$$

Da die Gleichungen (14) geschrieben werden können

$$\varphi(\varkappa x) = \sin\varkappa x \int_{-\infty}^0 \frac{e^{xz} \varkappa\, dz}{\varkappa^2 + z^2} + \cos\varkappa x \int_{-\infty}^0 \frac{e^{xz} z\, dz}{\varkappa^2 + z^2},$$

$$\psi(\varkappa x) = \pi - \cos\varkappa x \int_{-\infty}^0 \frac{e^{xz} \varkappa\, dz}{\varkappa^2 + z^2} + \sin\varkappa x \int_{-\infty}^0 \frac{e^{xz} z\, dz}{\varkappa^2 + z^2},$$

so können die letzten Gleichungen auch auf die folgende Form gebracht werden

(23)
$$\varphi(\varkappa, x) = \sin\varkappa x \int_{-\infty}^1 \frac{e^{xz} z\, dz}{\varkappa^2 + z^2} + \cos\varkappa x \int_{-\infty}^1 \frac{e^{xz} z\, dz}{\varkappa^2 + z^2},$$

$$\psi(\varkappa, x) = \pi - \cos\varkappa x \int_{-\infty}^1 \frac{e^{xz} \varkappa\, dz}{\varkappa^2 + z^2} + \sin\varkappa x \int_{-\infty}^1 \frac{e^{xz} z\, dz}{\varkappa^2 + z^2}.$$

Für negative Werthe von x ist eine andere Unformung der Gleichungen (22) zu empfehlen. Man hat nämlich

$$\varphi(-\varkappa x) = \varphi(\varkappa x),$$

$$\psi(-\varkappa x) = \pi - \psi(\varkappa x).$$

Also werden die Gleichungen (22), wenn man $-x$ für x schreibt,

$$(24)\quad \begin{aligned} \varphi(\varkappa, -x) &= \sin \varkappa x \int_1^\infty \frac{e^{-xz}\,\varkappa\,dz}{\varkappa^2 + z^2} - \cos \varkappa x \int_1^\infty \frac{e^{-xz}\,z\,dz}{\varkappa^2 + z^2} \\ \psi(\varkappa, -x) &= \cos \varkappa x \int_1^\infty \frac{e^{-xz}\,\varkappa\,dz}{\varkappa^2 + z^2} + \sin \varkappa x \int_1^\infty \frac{e^{-xz}\,z\,dz}{\varkappa^2 + z^2}. \end{aligned}$$

Statt der Functionen $\varphi(\varkappa, x)$, $\psi(\varkappa, x)$, $\varphi(\varkappa, -x)$, $\psi(\varkappa, -x)$ kann man also die Functionen

$$\int_{-\infty}^1 \frac{e^{xz}\,\varkappa\,dz}{\varkappa^2 + z^2}, \quad \int_{-\infty}^1 \frac{e^{xz}\,z\,dz}{\varkappa^2 + z^2}, \quad \int_1^\infty \frac{e^{-xz}\,\varkappa\,dz}{\varkappa^2 + z^2}, \quad \int_1^\infty \frac{e^{-xz}\,z\,dz}{\varkappa^2 + z^2}$$

tabuliren. Wir wollen aber statt dieser Functionen lieber die folgenden beiden betrachten

$$(25)\quad \begin{aligned} f(\varkappa, x) &= e^{-x} \int_{-\infty}^1 \frac{e^{xz}\,\varkappa\,dz}{\varkappa^2 + z^2} = \int_0^\infty \frac{e^{-xz}\,\varkappa\,dz}{\varkappa^2 + (1 - z)^2}, \\ \bar{f}(\varkappa, x) &= e^{x} \int_1^\infty \frac{e^{-xz}\,\varkappa\,dz}{\varkappa^2 + z^2} = \int_0^\infty \frac{e^{-xz}\,\varkappa\,dz}{\varkappa^2 + (1 + z)^2}. \end{aligned}$$

$f(\varkappa, x)$ befriedigt die Differentialgleichung

$$(26)\quad \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + (1 + \varkappa^2)y = \frac{\varkappa}{x}$$

und $\bar{f}(\varkappa, x)$ ebenso die Differentialgleichung

$$(27)\quad \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + (1 + \varkappa^2)y = \frac{\varkappa}{x}.$$

Die beiden übrigen Integrale können durch diese Functionen dargestellt werden, nämlich

$$\int_{-\infty}^1 \frac{e^{xz}\,z\,dz}{\varkappa^2 + z^2} = e^x \int_0^\infty \frac{e^{-xz}(1 - z)\,dz}{\varkappa^2 + z^2} = \frac{e^x}{\varkappa}\left\{f(\varkappa, x) + \frac{df(\varkappa, x)}{dx}\right\},$$

$$\int_1^\infty \frac{e^{-xz} z\,dz}{\varkappa^2 + z^2} = e^{-x} \int_0^\infty \frac{e^{-xz}(1+z)\,dz}{\varkappa^2 + z^2} = \frac{e^{-x}}{\varkappa}\left\{\bar{f}(\varkappa, x) - \frac{d\bar{f}(\varkappa, x)}{dx}\right\}.$$

Die Integraldarstellungen der Functionen $f(\varkappa, x)$ und $\bar{f}(\varkappa, x)$ führen ohne Schwierigkeit auf asymtotische Formeln, welche ihre Werthe für grosse x-Werthe geben. Ebenso kann man wie in den früheren Fällen für mässige x-Werthe die Entwickelung von Herrn DARBOUX benutzen um die Rechnungen zu verkürzen. Um den Raum zu sparen schreiben wir aber diese Formeln hier nicht aus.

Unter der Voraussetzung dass die Wurzeln α der RIEMANN'schen Gleichung

$$\xi(t) = 0$$

sämmtlich reell sind, kann die RIEMANN'sche Primzahlformel geschrieben werden

$$(28) \qquad f(e^x) = \operatorname{Li} e^x - 2\sum_\alpha \varphi\left(2\alpha, \frac{x}{2}\right) + \int_x^\infty \frac{1}{e^{2x}-1}\frac{dx}{x} - \log 2\,,$$

wenn man mit GENOCCHI das constante Glied $\log \xi(0)$ von RIEMANN in $-\log 2$ verändert.[1])

Sind also die Wurzeln α bekannt, so können die einzelnen Glieder dieser Reihe nach dem obigen sehr leicht tabulirt werden.

Die Function $\psi(\varkappa, x)$ hat auch eine häufige Anwendung. Der Grenzausdruck

$$\lim_{\varkappa=\infty} \psi(\varkappa, x)$$

ist nämlich einer der gewöhnlichsten Discontinuitätsfactoren. Der von Herrn J. P. GRAM[2]) vorgeschlagene Beweis der RIEMANN'schen Gleichung

---

[1]) Formole per determinare quanti siano i numeri primi etc. Annali da Tortolini, t. 3, 1860.

[2]) a. a. O.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\log \zeta(s)}{s} x^s \, ds$$

z. B. basirt sich auf die Eigenschaften dieses Discontinuitäts-factors. Mit Hülfe der oben hergeleiteten Formeln ist es leicht diesen Beweis völlig streng durchzuführen. Man hat ja (vgl. oben S. 736).

$$\psi(\varkappa, x) = \frac{e^x}{2} \int_{-\varkappa}^{+\varkappa} \frac{e^{xzi}}{1+zi} dz = \frac{1}{2} \int_{-a\varkappa}^{+a\varkappa} \frac{e^{\frac{x}{a}(a+zi)}}{a+zi} dz \,,$$

also

$$\frac{1}{\pi} \psi\left(\frac{b}{a}, \; a \log \frac{x}{p^\nu}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-bi}^{a+bi} \frac{x^s}{s} \frac{1}{p^{\nu s}} ds \,.$$

Da

$$\frac{\log \zeta(s)}{s} = \Sigma \frac{1}{\nu} \frac{1}{p^{\nu s}}$$

ist, so ist also

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-bi}^{a+bi} \frac{\log \zeta(s)}{s} x^s \, ds = \frac{1}{\pi} \Sigma \frac{1}{\nu} \psi\left(\frac{b}{a}, \; a \log \frac{x}{p^\nu}\right).$$

Wir haben nur den Grenzwerth der rechten Seite für $b = \infty$ zu untersuchen. Zu diesem Zweck leiten wie zuerst einige leicht zu beweisende Ungleichheiten ab. Die Gleichung (24), welche geschrieben werden kann

$$\psi(\varkappa, -x) = \int_1^\infty e^{-xz} \frac{\varkappa \cos \varkappa x + z \sin \varkappa x}{\varkappa^2 + z^2} dz$$

giebt uns leicht eine obere Grenze für $\psi(\varkappa, -x)$. Die Identität

$$(\varkappa \cos \varkappa x + z \sin \varkappa x)^2 + (\varkappa \sin \varkappa x - z \cos \varkappa x)^2 = \varkappa^2 + z^2$$

giebt nämlich

$$|\varkappa \cos \varkappa x + z \sin \varkappa x| < \sqrt{\varkappa^2 + z^2} \,.$$

Also ist auch

$$|\psi(\varkappa, -x)| < \int_1^\infty \frac{e^{-xz} dz}{\sqrt{\varkappa^2 + z^2}} < \frac{1}{\sqrt{\varkappa^2 + 1}} \frac{e^{-x}}{x} < \frac{e^{-x}}{\varkappa x} \,.$$

Andererseits kann aber $\psi(\varkappa, -x)$ den Werth $\frac{\pi}{2}$ nie übersteigen. Die Maxima und Minima dieser Function finden nämlich für

$$\frac{\sin \varkappa x}{x} = 0$$

statt. Also ist für ein Maximum oder Minimum $\cos \varkappa x = \pm 1$, und

$$|\psi(\varkappa, -x)| < \int_1^\infty \frac{\varkappa dz}{\varkappa^2 + z^2} = \operatorname{arc\,tg} \varkappa < \frac{\pi}{2}.$$

Wenigstens bis zu

$$\varkappa x = \frac{\pi}{2}$$

bleibt $\psi(\varkappa, -x)$ positiv.

Für positive Werthe von x hat man

$$\psi(\varkappa, x) - \pi = \int_{-\infty}^1 \frac{e^{xz}(-\varkappa \cos \varkappa x + z \sin \varkappa x)}{\varkappa^2 + z^2} dz,$$

also

$$|\psi(\varkappa, x) - \pi| < \int_{-\infty}^1 \frac{e^{xz}}{\sqrt{\varkappa^2 + z^2}} dz < \frac{e^x}{\varkappa x}.$$

Andererseits kann man auch schreiben

$$\psi(\varkappa, x) - \pi = -\int_0^\infty \frac{e^{-\varkappa xz} dz}{1 + z^2} \cdot \cos \varkappa x - \int_0^\infty \frac{e^{-\varkappa xz} z\, dz}{1 + z^2} \cdot \sin \varkappa x$$

$$+ \int_0^1 \frac{e^{xz}(-\varkappa \cos \varkappa x + z \sin \varkappa x)}{\varkappa^2 + z^2} dz.$$

Die Derivirte der Summe der beiden Glieder in der ersten Zeile verschwindet nur wenn $\sin \varkappa x = 0$. Also ist der numerisch grösste Werth dieser Summe

$$-\frac{\pi}{2},$$

welcher dem Werthe $x = 0$ entspricht. Negativ bleibt diese Summe wenigstens so lange als

$$\varkappa x < \frac{\pi}{2}.$$

Das letzte Glied ist offenbar seinem absoluten Betrage nach kleiner als

$$\frac{e^x}{\varkappa}.$$

Aus diesen Ungleichungen folgert man leicht, indem man die Primzahlpotenzen p^ν in drei verschiedene Gruppen teilt, jenachdem sie kleiner als $xe^{-\sqrt{\frac{a}{b}}}$, oder zwischen $xe^{-\sqrt{\frac{a}{b}}}$ und $xe^{\sqrt{\frac{a}{b}}}$ gelegen, oder endlich grösser als $xe^{\sqrt{\frac{a}{b}}}$ sind, dass man schreiben kann

$$\frac{1}{\pi}\Sigma\frac{1}{\nu}\psi\left(\frac{b}{a}, a\log\frac{x}{p^\nu}\right) = f(x) + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4\,,$$

wo $|\delta_1|$ kleiner ist als die halbe Summe der inversen Werthe der Exponenten für diejenigen Primzahlpotenzen welche zwischen

$$xe^{-\sqrt{\frac{a}{b}}} \text{ und } xe^{\sqrt{\frac{a}{b}}}$$

fallen, $|\delta_2|$ kleiner als die Summe

$$\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{a}{b}} + \Sigma\frac{1}{\nu}\left(\frac{x}{p^\nu}\right)^a, \quad \left(p^\nu < xe^{-\sqrt{\frac{a}{b}}}\right),$$

$|\delta_3|$ kleiner als die Summe

$$\frac{a}{\pi b}\Sigma\frac{1}{\nu}\left(\frac{x}{p^\nu}\right)^a \qquad \left(xe^{-\sqrt{\frac{a}{b}}} \leqq p^\nu \leqq x\right)$$

und endlich $|\delta_4|$ kleiner als die Summe

$$\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{a}{b}}\,\Sigma\frac{1}{\nu}\left(\frac{x}{p^\nu}\right)^a. \qquad \left(p^\nu > xe^{\sqrt{\frac{a}{b}}}\right)$$

Man kann also, wie man leicht sieht, eine von a und b unabhängige Grösse A finden, so dass

$$|\delta_2| + |\delta_3| + |\delta_4| < Ax^a\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}. \qquad (b > a)$$

Wählen wir

$$b \geqq a(2x+1)^2$$

so ist

$$xe^{\sqrt{\frac{a}{b}}} - xe^{-\sqrt{\frac{a}{b}}} < 1$$

und $|\delta_1|$ ist also höchstens gleich $\frac{1}{2}$. δ_1 ist übrigens negativ oder positiv oder null, jenachdem das Intervall

$$xe^{-\sqrt{\frac{a}{b}}} \ldots \; xe^{\sqrt{\frac{a}{b}}}$$

in seiner ersten Hälfte, in seiner zweiten Hälfte, oder gar nicht eine Primzahlpotenz enthält. Ist x selbst die ν:te Potenz einer Primzahl, so ist

$$\lim \delta_1 = \frac{1}{2\nu}.$$

Durch diese Betrachtungen kann man es als völlig ausgemacht betrachten, in welchem Sinn die RIEMANN'sche Gleichung (29) Geltung hat.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1891. N:o 10.
Stockholm.

Meddelanden från Stockholms Högskola, N:o 124.

Sur le principe de DIRICHLET.

Par E. PHRAGMÉN.

[Présenté le 9 décembre 1891 par D. G. LINDHAGEN.]

Parmi les démonstrations rigoureuses du principe de DIRICHLET qu'on connaît jusqu'ici, il n'y a que deux, autant que je sais, où l'on ne fait pas des hypothèses très particulières au sujet du domaine pour lequel on veut établir le principe en question. HARNACK, dans un travail publié aux *Berichte der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften* en 1886,[1]) a donné un théorème important sur la convergence uniforme des séries infinies dont les termes sont des fonctions harmoniques. Il a tiré de ce théorème une démonstration très simple de l'existence de la fonction de GREEN pour un domaine de caractère très général. Puis, il a cherché à tirer parti de ce résultat pour établir le principe de DIRICHLET dans la même étendue. Cette démonstration, cependant, donne lieu à une objection à laquelle il semble difficile de donner une réponse satisfaisante. Je parle de l'assertion que toute dérivée partielle de la fonction de GREEN tend uniformément vers la dérivée correspondante de $\log\frac{1}{r}$ quand on se rapproche du contour qui limite le domaine, assertion que ni HARNACK lui-même, ni M. JULES RIEMANN qui a exposé la même méthode dans une thèse présentée à la facultée des sciences de Paris en 1888, n'ont fait de tentative sérieuse pour démontrer. D'un autre côté, il est

[1]) Voir aussi son ouvrage *Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales*, Leipzig 1887.

facile de trouver une démonstration valable dans des cas très étendus, en combinant les méthodes de M.M. SCHWARZ et C. NEUMANN avec la transformation par rayons réciproques, comme cela a été proposé entre autres par M. KLEIN dans ses leçons.[1]) Enfin M. POINCARÉ a repris la question dans son travail important *sur les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique* inséré au t. 12 du journal americain de mathématiques, et l'a traité par une nouvelle méthode dont il dit lui-même qu'elle ne laisse rien à désirer comme méthode de démonstration. Aussi est-il parvenu à démontrer très simplement le principe de DIRICHLET sous des conditions tellement générales qu'il peut paraître inutile pour les applications de demander plus encore. Toutefois, il me semble que cette démonstration de M. POINCARÉ est encore susceptible de quelques simplifications qui permettent à l'étendre à des domaines encore plus généraux, en même temps qu'elles la mettent à la portée de tout le monde.

La partie principale de la démonstration que je vais exposer ci-dessous est, au fond, identique à la démonstration de HARNACK pour l'existence de la fonction de GREEN. L'artifice très simple qui permet d'étendre cette démonstration au cas général, est emprunté au mémoire cité de M. POINCARÉ.

Le principe de DIRICHLET peut être énoncé dans ces termes:

Soit donnée l'équation aux derivées partielles

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n^2}=0;$$

il existera toujours une solution de cette équation qui est régulière à l'intérieur d'un domaine donné et qui tend uniformément vers des valeurs données continues quand on s'approche de la limite du domaine.

Pour simplifier le language, nous ne traiterons ici que le cas de $n=2$. Du reste il est facile de voir comment la démonstration peut être étendue au cas général.

---

[1]) Cfr POCKELS, *Über die partielle Differentialgleichung* $\Delta u+k^2u=0$ etc., Leipzig 1891, pag. 262.

Nous désignerons par S une aire plane donnée telle que les points à l'extérieur de S forment un nombre fini de pièces continues, et que tout point à la limite de S ait dans son voisinage immédiat d'autres points qui sont extérieurs à S. Nous précisons encore, en exigeant qu'il existe un triangle rectiligne qui puisse être appliqué à chaque point à la limite de S de manière qu'un sommet du triangle coïncide avec ce point et que tout le reste du triangle soit extérieur à S. Nous désignerons de plus par s l'ensemble des contours qui limitent cette aire plane, et par u des valeurs données sur s et continues sur chaque contour spécial.

Nous nous proposons de démontrer qu'il existe une fonction $U(x,y)$ qui est *harmonique* à l'intérieur de S, et qui tend uniformément vers les valeurs données u quand on s'approche de s.

Nous diviserons la démonstration en trois parties. En premier lieu nous montrerons comment on peut trouver une fonction V régulière dans un domaine qui renferme l'aire S, et dont les valeurs sur s diffèrent des valeurs données u de moins d'une quantité donnée. Puis nous donnerons l'expression d'une fonction harmonique à l'intérieur de S et qui devient égale à V sur s. Enfin on formera la fonction qui donne la solution du problème proposé.

Qu'il existe une fonction V telle que nous venons de la caractériser, cela paraîtra presque évident à la plupart des lecteurs. Toutefois je pense devoir en donner une démonstration précise. Prenons arbitrairement une droite $x = x_0 =$ const. qui traverse l'aire S, ou plutôt le plan correspondant $x = x_0$ dans un espace à trois dimensions où nous désignerons la troisième coordonnée par z, de manière que $z = 0$ sera l'équation du plan dans lequel est situé l'aire S. Pour chaque valeur de y, $y = \overline{y}$, on pourra trouver une infinité de droites contenues dans le plan $y = \overline{y}$ et qui, de l'un et de l'autre côté du plan $x = x_0$, passent entre les deux courbes $z = u - \delta$ et $z = u + \delta$. Si nous écrivons l'équation de ces droites

$$z = \varphi(y)(x - x_0) + \psi(y),\ y = \overline{y},$$

cette condition sera remplie si nous assujettissons les fonctions $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ chacune à deux inégalités

$$f(y) < \psi(y) < f_1(y),$$
$$g(y) < \varphi(y) < g_1(y),$$

dont il est inutile d'insister sur la signification, qui ressort immédiatement à l'inspection d'une figure.

Il est évident qu'on peut trouver deux fonctions $\psi(y)$ et $\varphi(y)$ régulières pour les valeurs de y dont il est question et satisfaisant à ces inégalités. On pourra même, si on veut, prendre pour $\psi(y)$ et $\varphi(y)$ deux fonctions rationnelles et entières. Cela posé, la fonction

$$z = \varphi(y)(x - x_0) + \psi(y)$$

est une fonction qui satisfait aux conditions que nous avons imposées à la fonction V.

Comme

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

est une fonction régulière dans un domaine qui contient l'aire S, il est clair qu'on pourra écrire

$$V = W' - W''$$

et faire de manière qu'on ait

$$\frac{\partial^2 W'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W'}{\partial y^2} < 0 \quad \text{aussi bien que} \quad \frac{\partial^2 W''}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W''}{\partial y^2} < 0$$

partout dans l'aire S.

Or, on sait qu'une fonction Φ, telle que

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} < 0$$

dans l'aire S, ne peut avoir de minimum à l'intérieur de S.

Construisons par la pensée une suite infinie d'aires de polygones S_n, telles que S_{n+1} renferme toujours S_n à son intérieur,

et que chacune d'elles est contenue à l'intérieur de S. Soit s_n le polygone formant le contour de l'aire S_n, et supposons que s_n tombe tout entière dans le voisinage δ_n de s et que $\lim \delta_n = 0$ pour $n = \infty$.

Soit U'_n une fonction harmonique en S_n et égale à W' sur s_n; la fonction

$$\Phi_n = W' - U'_n$$

tendra vers zéro quand on s'approche de s_n et on aura

$$\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 W'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W'}{\partial y^2} < 0$$

à l'intérieur de S_n. Par conséquent, Φ_n n'ayant pas de minimum à l'intérieur de S_n et s'annulant sur le contour, cette fonction sera positive à l'intérieur de S_n. Donc, sur s_n, Φ_n est nul et Φ_{n+1} est positif. Comme $\Phi_n - \Phi_{n+1}$ est harmonique en S_n, on en conclut qu'on a

$$\Phi_{n+1} > \Phi_n \text{ ou } U'_{n+1} < U'_n$$

dans S_n.

Appliquant le principe de HARNACK, on en conclut que

$$U' = \lim U'_n \qquad (n = \infty)$$

est une fonction harmonique à l'intérieur de S. De même

$$\Phi = \lim \Phi_n = W' - U'$$

satisfait à l'équation $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y} = \frac{\partial^2 W'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W'}{\partial y^2}$ et par conséquent à l'inégalité

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} < 0$$

à l'intérieur de S. Elle n'a donc pas de minimum dans cette aire.

Comme on a $\Phi > \Phi_n$ pour toute valeur de n et que Φ_n soit positif à l'intérieur de S_n, Φ est nécessairement positif dans tout point à l'intérieur de S.

De l'autre côté, si α est une constante positive, la courbe

$$\Phi = \alpha$$

est située tout entière à l'intérieur de S. Car, supposons que la limite inférieure β de la distance d'un point de s à un point de la courbe $\Phi = \alpha$ soit nulle, il existera un point p de s tel que dans tout voisinage de ce point il y ait des points de la courbe $\Phi = \alpha$. Or on peut construire un polygone σ qui passe par ce point p, qui est situé tout entier à l'intérieur du domaine dans lequel la fonction V est régulière, et dont aucune partie n'appartient à l'intérieur de S. Soit Σ l'aire limité par ce polygone, S sera une partie de Σ. On sait construire une fonction Ψ qui est nulle sur σ et qui satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 W'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W'}{\partial y^2}$$

à l'intérieur de Σ. On aura

$$\Psi > \Phi_n$$

à l'intérieur de S, pour toutes les valeurs de n, et par conséquent

$$\Psi \geqq \Phi .$$

Or la fonction Ψ tend uniformément vers zéro quand on s'approche de σ. On peut même, comme on le voit facilement, indiquer un voisinage de p dont le rayon est indépendant de la situation particulière de ce point sur s, et dans lequel Ψ, et par conséquent Φ, reste plus petit que α. Donc il est démontré que β, la limite inférieure des distances entre deux points dont l'un appartient à s et l'autre à la courbe $\Phi = \alpha$, est différent de zéro. Or c'est dire que pour toute valeur positive α on peut trouver une autre valeur positive β telle qu'au voisinage β de s on a

$$\Phi \leqq \alpha .$$

Donc Φ tend uniformément vers zéro, et par conséquent U' vers W' quand on s'approche de s.

De même il existe une fonction U'' harmonique en S et tendant uniformément vers W'' quand on s'approche de s.

La différence $U = U' - U''$ est alors une fonction harmonique en S et égale à V sur s. On a donc trouvé une fonction harmonique en S et dont les valeurs sur s diffèrent des valenrs données de moins de δ.

Choisissons une suite infinie de quantités positives δ_n telles que $\lim \delta_n = 0$ pour $n = \infty$, et soit U_n une fonction harmonique en S et qui diffère des valeurs données sur s de moins de δ_n. L'expression

$$\lim U_n \, (n = \infty)$$

convergera uniformément sur s, et représentera, par conséquent, une fonction harmonique en S qui tend uniformément vers les valeurs données quand on s'approche de s.

Elle donne la solution du problème de DIRICHLET.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts. fr. sid. 682.)

Mount Hamilton. *Lick observatory.*
Report on the observation of the total eclipse of the sun 1889 $^{21-22}/_{11}$ . . . Sacramento 1891. 8:o.

München. *K. Bayerische Akademie der Wissenschaften.*
Denkschriften. Bd. 63: Abth. 2; 64: 1. 1891. 4:o.
= Abhandlungen. Math.-phys. Kl. Bd. 17: 2.
» Philos.-philol. » Bd. 19: 1.
Sitzungsberichte. Math.-phys. » Jahr 1890: H. 4. 8:o.
» Philos.-philol.-hist. Kl. Jahr 1890: Bd. 2: H. 2—3. 8:o.
GREGOROVIUS, F. v., Die grossen Monarchien oder die Weltreiche in der Weltgeschichte. Rede. München 1890. 4:o.
PETTENKOFER, M. v., Rerum cognoscere causas. Ansprache. München 1890. 4:o.

New York. *New York Academy of sciences.*
Transactions. Vol. 10(1890/91): N:o 2—6. 8:o.
Annals. Vol. 5: Extra nrs. 1—3. 1891. 8:o.
— *New York microscopical society.*
Journal. Vol. 7(1891): N:o 1—4. 8:o.

Nordamerikas Förenta Stater. *American association for the advancement of science.*
Proceedings. Meeting 39(1890). Indianopolis. 8:o.

Odessa. *Société des naturalistes de la Nouvelle-Russie.*
Sapiski. — Mémoires. T. 16: B. 1. 1891. 8:o.
» » Section mathématique. T. 13. 1891. 8:o.

Ottawa. *Ottawa Field-naturalists' club.*
Ottawa naturalist. Vol. 3(1889/90): N:o 4; 4(1890/91): 1—5; 7; 9—12. 8:o.

Philadelphia. *Academy of natural sciences.*
Proceedings. Year 1891: P. 2. 8:o.

Paris. Ministère des travaux publics.
Annales des mines. (8) T. 18(1890); 19(1891). 8:o.
— *Comité international des poids et mesures.*
Procès-verbaux des séances. Année 1890. 8:o.
Rapports aux gouvernements signataires de la convention du mètre. 14(1890). 4:o.

Riga. *Naturforscher-Verein.*
Arbeiten. (2) H. 7. 1891. 8:o.
Korrespondenzblatt. 34. 1891. 8:o.

Roma. *K. Italienska regeringen.*
GALILEI, G., Opere. Edizione nazionale. Vol. 2. Firenze 1891. 4:o.

Salem. *Essex institute.*
Bulletin. Vol. 21(1889): N:o 7—12; 22(1890): 1—9. 8:o.

(Forts. å sid. 791.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1891. N:o 10.
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska laboratorium.

201. Om etylendiamins inverkan på rubeanväte. I.

Af G. Forssell.

[Meddeladt den 9 December 1891 genom P. T. Cleve.]

Om etylendiaminanhydrid vid vanlig temperatur blandas med rubeanväte (ditiooxamid), uppstår omedelbart en häftig utveckling af ammoniak och svafvelväte. Reaktionen försiggår enligt schemat:

$$NH_2\,CS\,CS\,NH_2 + 2\,C_2H_4\,(NH_2)_2 = 2\,NH_3 + 2\,H_2\,S + C_6\,H_{10}\,N_4.$$

För uppställandet af den uppkomna föreningens konstitutionsformel erbjuder sig knappt mer än två möjligheter:

$$\begin{array}{l} CH_2 - NH\ \boxed{H \quad H_2N} - CS \\ | \qquad\qquad\quad + \qquad\qquad | \\ CH_2 - NH\ \boxed{H \quad H_2N} - CS \end{array} - 2NH_3 = \begin{array}{c} \diagup NH \diagdown \\ CH_2 \qquad CS \\ | \qquad\quad | \\ CH_2 \qquad CS \\ \diagdown NH \diagup \end{array};$$

$$\begin{array}{l} \ \diagup NH \diagdown \\ CH_2 \quad C\boxed{S \quad H_2}N - CH_2 \\ | \qquad\quad | \quad + \qquad\qquad | \\ CH_2 \quad C\boxed{S \quad H_2}N - CH_2 \\ \ \diagdown NH \diagup \end{array} - 2H_2S = \begin{array}{l} \ \diagup NH \diagdown \diagup\!\!\diagup N \diagdown \\ CH_2 \qquad C \qquad\quad CH_2 \\ | \qquad\quad\ \ | \qquad\qquad | \\ CH_2 \qquad C \qquad\quad CH_2 \\ \ \diagdown NH \diagup \diagdown\!\!\diagdown N \diagup \end{array}$$

eller:

$$\begin{array}{l} CH_2 - NH\boxed{H \quad H_2N} \\ | \qquad\qquad\quad + \\ CH_2 - \quad N\boxed{H_2 \qquad S} \end{array} \!\!>\! C - C \!<\! \begin{array}{l} \boxed{NH_2 \quad H}HN - CH_2 \\ \qquad\qquad\qquad\quad | \\ \boxed{S \qquad H_2}N \ \ - CH_2 \end{array} -$$

$$- 2NH_3 - 2H_2S = \begin{array}{l} CH_2 - NH \\ | \\ CH_2 - \quad N \end{array} \!\!>\! C - C \!<\! \begin{array}{l} NH - CH_2 \\ \qquad\ \ | \\ N \ \ - CH_2 \end{array}$$

För den senare formeln talar den omständigheten, att jag af etylendiamin och tiobenzamid erhållit den förut af v. HOFMANN framstälda etylenbenzenyldiamin,[1]) hvilken ej kan ha annan sammansättning än:

$$\begin{array}{l} CH_2 - NH \\ | \qquad\qquad\quad > C - C_6H_5 \\ CH_2 - \quad N \end{array}$$

Föreningen framstäldes på följande sätt. En del pulveriseradt rubeanväte blandades med två delar (ungefär $1^1/_2$ gånger beräknade mängden) etylendiaminhydrat, hvarpå blandningen värmdes på vattenbad, tills den i början under stark pösning försiggående gasutvecklingen upphört. Reaktionsprodukten utrördes med litet vatten, befriades därifrån genom afsugning' ströks på lertallrik, där den fick torka, samt omkristalliserades ur kokande alkohol. På detta sätt erhölls 60 à 70 % af det beräknade utbytet.

Vid neutralisering af tvättvattnet med saltsyra uppstod en gul fällning, bestående dels af svafvel, dels af en eller tvenne i vatten lösliga svafvelhaltiga kroppar, som ännu ej äro analyserade, men hvilkas närmare undersökning torde kunna ge upplysning om hufvudproduktens konstituton.

Föreningen $C_6H_{10}N_4$ är en utpräglad bas. Den är olöslig i benzol och eter, svårlöslig i vatten och kall alkohol, temligen löslig i kokande alkohol. I vattenlösning blånar den rödt lackmuspapper. Ur kokande alkohol kristalliserar den i mjuka, sammanfiltade nålar, som vid rifning bli starkt elektriska. Föreningen tyckes ej uthärda kokning med vatten. Klorhydratets vattenlösning kan däremot, åtminstone utan fullständig sönderdelning, afdunstas till torrhet på vattenbad. Vid upphettning med syror i öfverskott eller alkalier sönderdelas den i etylendiamin och oxalsyra.

Af de nedanför meddelade analyserna äro I och II verkstälda på ur alkohol en gång omkristalliseradt material, som tyckes ha varit temligen orent. Till analyserna III och IV be-

[1]) Ber. d. Deutsch. chem. Ges. XXI, p. 2332.

reddes material genom råproduktens omkristallisering ur alkohol, lösning i svafvelsyra, sulfatets fällning med alkohol, förnyad lösning i vatten och fällning med alkohol, lösning i vatten och fällning med sodalösning samt slutlig omkristallisering ur kokande alkohol. På detta sätt erhölls i det närmaste färglösa nålar, som vid upphettning utan färgförändring började vekna vid 240—250° C. Ännu vid 290° var substansen endast delvis svartnad och smält.

Analyserna gåfvo följande värden:

	Beräknadt för $C^6H^{10}N^4$:	Funnet: I.	II.	III.	IV.
C	52,17	52,78	—	52,10	—
H	7,25	7,41	—	7,42	—
N	40,58	—	40,22	—	40,93

Basen lemnar i vatten lättlösliga, i alkohol olösliga eller åtminstone ytterst svårlösliga väl kristalliserade salter med klorvätesyra, svafvelsyra och salpetersyra.

Klorhydratet.

$C_6 H_{10} N_4 . 2 H Cl.$

Bereddes genom basens lösning i saltsyra och fällning med alkohol. Färglösa nålar. En klorvätebestämning gaf i procent:

	Beräknadt:	Funnet:
HCl	34,60	34,62.

Kloroplatinatet.

$C_6 H_{10} N_4 . H_2 Pt Cl_6.$

Halmgula nålar. En platinabestämning gaf i procent:

	Beräknadt:	Funnet:
Pt	35,70	35,31

Pikratet.

$C_6 H_{10} N_4 . 2 C_6 H_2 (NO_2)_3 OH$.

Ljust gröngul fällning, som vid rifning blir elektrisk. Förlorade ej i vikt vid upphettning till öfver 100° C.

En kväfvebestämning gaf:

	Beräknadt:	Funnet:
N	23,49	23,79.

För att erhålla benzoylderivat behandlades några decigram af föreningen med utspädd natronlut och benzoylklorid under lindrig upphettning. Den så erhållna produkten var lättlöslig i kall isättika. Den fäldes därur kristallinisk och färglös genom försiktig tillsats af vatten. En kväfvebestämning gaf 10,80 % kväfve. För dibenzoyletylendiamin beräknas kväfvehalten till 10,45 %. Då föreningen äfven i öfrigt visar temligen stor öfverensstämmelse med HOFFMANS dibenzoyletylendiamin[1]) kan föreningen med största sannolikhet anses med denna identisk.

[1]) Ber. d. Deutsch. chem. Gesellsch. XXI, p. 2334.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1891. N:o 10.
Stockholm.

Meddelanden från Upsala kemiska Laboratorium.

202. Om azthinderivat. I.

Af N. A. Langlet.

[Meddeladt den 9 December 1891 genom P. T. Cleve.]

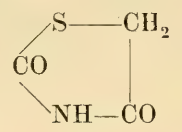
Under det att, i synnerhet på allra senaste tiden ett mycket stort antal föreningar blifvit framstälda, hvilka derivera från femledade kärnor, innehållande kol, qväfve och svafvel, äro deremot jemförelsevis få sådana kända, som innehålla samma element i sexledig sluten bindning. Orsaken till detta förhållande ligger utan tvifvel i den svårighet, hvarmed atomerna sammansluta sig till en sådan kärna, och skälet härtill har man naturligtvis att söka i den omständigheten, att svaflet, då det ingår i slutna bindningar, i allmänhet ersätter två metingrupper, hvarföre en sexledig kärna med en svafvelatom måste motsvara en 7-ledig kolkärna.

Om man således använder en metod, enligt hvilken en azthiolförening lätt bildas, för att framställa ett azthinderivat, så erhålles i allmänhet ej någon fullständig sammanslutning. Som bekant ger t. ex. svafvel-urinämne med monoklorättiksyra särdeles lätt thiohydantoin, under det att enligt Andreasch [1]) med β-jodpropionsyra intet motsvarande derivat (lactylsvafvel-urinämne) erhålles; reaktionen stannar vid bildningen af den med thiohydantoinsyran analoga imidokarbamin-β-thiomjölksyran H_2N-C(NH)-S-CH_2CH_2COOH, och hos denna kan på intet sätt åstadkommas en sammanslutning genom vattenafspaltning.

---

[1]) Monatshefte f. Chemie VI: 831.

Ehuru således denna väg till erhållande af ett azthinderivat syntes stängd, har jag dock sökt att med användande af en liknande reaktion framställa en analogt sammansatt förening, dertill föranledd af en tillfälligtvis funnen syntes af sinapanättiksyra



ur xantogenamid och monobromättiksyra. Genom inverkan af β-jodpropionsyra på xantogenamid har jag lyckats erhålla så väl det karbaminthioglykolsyran motsv. mjölksyrederivatet som äfven dess inre anhydrid, den sökta sinapanpropionsyran

Karbamin-β-thiomjölksyra,

$$H_2N—CO—S—CH_2—CH_2\,COOH,$$

erhålles vid direkt upphettning af xanthogenamid med β-jodpropionsyra utan lösningsmedel. 10,5g xanthogenamid och 20g β-jodpropionsyra smältes tillsammans på vattenbad, hvarefter blandningen upphettades öfver fri eld i en fraktionerkolf, tills gasblåsor visade sig, då lågan genast aflägsnades. En liflig reaktion inträdde, hvarunder en färglös vätska destillerade öfver i förlaget. Genom kokpunkt och öfriga egenskaper visade den sig vara jodetyl. Den i kolfven befintliga flytande reaktionsprodukten uthälldes i en skål, hvarest den genast stelnade till en hvit, porslinslik, illaluktande massa. Denna löstes i hett vatten, och vid afsvalning afsattes små värtlika sammangyttringar af otydliga kristaller. Efter fyra omkristalliseringar erhöllos fortfarande endast otydligt utbildade kristaller utan konstant smältpunkt. Den obehagliga lukten (thiomjölksyreeter?) häftade envist fast vid föreningen. För att befrias från denna pulvriserades massan och tvättades med eter, som dervid starkt brunfärgades. Efter utpressning mellan filtrerpapper omkristalliserades ur kokande vatten. Vid afsvalning ansköto glänsande hvita blad, till det yttre liknande β-jodpropionsyra, hvilka smälte vid 147°,5. Analys:

	Beräknadt för ofvanstående formel.	Funnet.
C	32,21	31,83
H	4,70	4,98
N	9,40	9,76
S	21,48	21,64

Reaktionsförloppet torde kunna åskådliggöras medelst följande eqvationer

1) $$C_2H_5O . C(=NH)—S\boxed{H + J}CH_2CH_2COOH =$$

$$=HJ + C_2H_5OC(=NH)—S—CH_2CH_2COOH.$$

2) $$HOOC—CH_2—CH_2—C(=NH)(—O\boxed{C_2H_5 \quad H + J}) =$$

$$= C_2H_5J + HOOC—CH_2—CH_2—S—CO—NH_2.$$

Föreningen är en tydligt utpräglad karbonsyra med sur smak och reaktion. Af salterna, hvilka äro framstälda af syran och motsvarande karbonat, äro endast barium-, calcium- och silfversaltet närmare undersökta. Alkalimetallernas salter äro ytterligt deliqvescenta och omöjliga att erhålla i analysdugligt tillstånd.

Af alkalier sönderdelas syran ytterst lätt i kolsyra, ammoniak och β-thiomjölksyra.

$$H_2N—CO—S—CH_2—CH_2—COOH + H_2O =$$
$$= NH_3 + CO_2 + HS—CH_2CH_2COOH.$$

De flesta af salterna undergå till ringa del vid upphettning samma sönderdelning (lätt märkbar genom lukten af β-thiomjölksyra) en omständighet som gör att kristallvattenbestämningen genom upphettning ofta utfaller något för högt.

Bariumsaltet Ba $(OOC—C_2H_4SCONH_2)_2 + 2H_2O$ är ytterst lättlösligt; kristalliserar vid vattenlösningens afdunstning öfver svafvelsyra i bländande hvita luftbeständiga nålar. Sönderdelas ytterst lätt. Kristallvattnet afgår vid 100°.

	Beräknadt.	Funnet.
Ba	29,06	29,89
H_2O	7,69	7,29
N	5,98	6,68

Calciumsaltet $Ca(OOCC_2H_4SCONH_2)_2 + 3H_2O$ liknar till det yttre fullständigt bariumsaltet, är lättlösligt i vatten, olösligt i alkohol.

	Beräknadt.	Funnet.
Ca	10,26	10,25
H_2O	13,85	14,82

Silfversaltet $AgHN—CO—S—C_2H_4COOAg$, i hvilket äfven en af de vid qväfvet stående väteatomerna är utbytt mot silfver faller vid tillsats af syran till en lösning af silfvernitrat (äfven om den är surgjord med HNO_3) såsom ett olösligt gulhvitt pulver. Om lösningen, hvaruti det är uppslammadt värmes, så mjuknar det och bakar sig tillsammans i en klump.

	Beräknadt.	Funnet.
Ag	59,51	60,37

Oxidation af karbamin-β-thiomjölksyra

5g af syran löstes i stark saltsyra och upphettades på vattenbad under småningom skeende tillsats af beräknad mängd $KClO_3$. Oxidationen försiggick under ymnig kolsyreutveckling. Vätskan afdunstades på vattenbad för att aflägsna öfverskott af saltsyra, hvarefter neutraliserades med $BaCO_3$ i värme. Vid afkylning kristalliserade fettglänsande blad af bariumsaltet af β-sulfonpropionsyra $HOSO_2—CH_2CH_2COOH$ (förut erhållen af ANDREASCH[1]) genom oxidation af imidokarbamin-β-thiomjölksyra $H_2N—C(NH)—SC_2H_4COOH$). En bariumbestämning gaf följande resultat.

	Beräknadt.	Funnet.
Ba	47,40	47,02

Reaktionen förlöper således enligt följande eqvation:

$$H_2N—CO—S—CH_2—CH_2COOH + O_3 + H_2O =$$
$$= NH_3 + CO_2 + HO—SO_2—CH_2CH_2COOH.$$

[1]) Monatshefte f. Chemie VI: 837.

Sinapanpropionsyra,

$$CO\begin{cases}S-CH_2 \\ \\ NH-CO\end{cases}\!\!>CH_2\,,$$

erhålles om β-jodpropionsyra får inverka på xantogenamid vid närvaro af acetanhydrid. 10,5g xantogenamid och 20g β-jodpropionsyra löstes i 11g acetanhydrid och upphettades på asbestbad tills reaktion inträdt. Reaktionsprodukten afdunstades derefter på vattenbad tills lukten af ättiksyra försvunnit. Efter några timmar hade rikligt med kristaller afsatt sig, hvilkas mängd ökades vid tillsats af eter. Vätskan affiltrerades, och kristallerna tvättades med eter utpressades och löstes i kokande vatten hvarur vid afsvalning föreningen afskildes i små färglösa rombiska taflor som smälte vid 159°. Analys: (S-best. enligt CLAËSSON).

	Beräknadt för ofvanstående formel.	Funnet. I.	II.	III.	IV.
C	36,64	36,74	36,53	—	—
H	3,81	4,31	3,87	—	—
N	10,69	—	—	10,71	—
S	24,43	—	—	—	23,90

Reaktionen försiggår sannolikt enligt följande eqvationer

1) $$C_2H_5O-C\begin{cases}NH \quad HOOC \\ \quad\quad + \\ SH \quad J-CH_2\end{cases}\!\!>CH_2 =$$

$$= H_2O + HJ + C_2H_5OC\begin{cases}N-CO \\ S-CH_2\end{cases}\!\!>CH_2$$

2) $$CH_2\begin{cases}CO-N \cdots\cdots H \\ \\ CH_2-S\end{cases}\!\!>CO\,C_2H_5 + J = C_2H_5J + CH_2\begin{cases}CO-NH \\ \\ CH_2-S\end{cases}\!\!>CO.$$

Föreningen är mycket beständig, sublimerar oförändrad vid högre temperatur och påminner till sina fysikaliska egenskaper öfver hufvud mycket om den isomera föreningen: thiodiglykol-

syrans imid $S\begin{matrix}\diagup CH_2—CO\diagdown \\ \diagdown CH_2—CO\diagup\end{matrix}NH$. Den reagerar fullkomligt neutralt; att den dock är en syra bevisas deraf att den, ehuru svårlöslig i kallt vatten, ytterst lätt löses i kall utspädd kalilut. Härvid bildas intet salt af karbaminthiomjölksyran, hvilket bevisas dels deraf att vid lösningen ingen ammoniak utvecklas dels deraf att vid tillsats af syra ingen lukt af β-thiomjölksyra förmärkes. Vid kokning med HgO i neutral eller sur lösning bildas en svårlöslig kristallinisk förening (troligen merkaptiden af β-thiomjölksyra) i alkalisk lösning afskiljes småningom HgS.

Som bekant bildas sinapanättiksyra lätt genom kokning af rhodanättiksyra $HOOC—CH_2—SCN$ med klorvätesyra (CLAËSSON[1]) derigenom att denna upptager vatten och öfvergår till karbaminthioglykolsyra, $HOOC \cdot CH_2 — S — CO — NH_2$ ur hvilken sedermera genom vattenafspaltning uppstår sinapanättiksyra $CO\begin{matrix}\diagup S—CH_2 \\ \quad\quad | \\ \diagdown N—CO\end{matrix}$. På samma sätt har det lyckats mig att ur β-rhodanpropionsyra erhålla ofvan beskrifna föreningar ehuru i så små mängder att metoden ej har något intresse annat än i och för beviset af deras konstitution.

En alkohollösning af β-jodpropionsyreeter upphettades några timmar på vattenbad med beräknad mängd rhodankalium. Efter afsvalning afhäldes lösningen från afskildt jodkalium och indunstades i lindrig värme. Återstoden utdrogs med eter och efter dennas afdunstning kokades den qvarblifna brunaktiga oljan (β-rhodanpropionsyreeter) med klorvätesyra tills fullständig lösning inträdt. Derefter afdunstades på vattenbad till torrhet och den starkt salmiakblandade återstoden omkristalliserades ur kokande vatten. De erhållna, svagt brunaktiga kristallerna smälte vid 147°,5 och visade sig fullständigt identiska med den af xantogenamid framstälda karbaminthiomjölksyran. En kol- och vätebest. gaf följande resultat:

[1]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. X: 1352; Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1877, N:o 5.

	Beräknadt.	Funnet.
C	32,21	32,68
H	4,70	4,65

Vid ett försök erhölls utom de ofvannämda bruna kristallerna, en liten klump af en substans, kristalliserande i gulaktiga rombiska fjäll, hvilka smälte vid 159° och för öfrigt visade fullkomligt samma egenskaper som sinapanpropionsyran. Materialet räckte ej till analys.

Genom denna syntes kan den ofvan uppstälda konstitutionsformeln:

$$\begin{array}{l} \diagup S\text{---}CH_2 \\ CO \qquad \diagdown CH_2 \\ \diagdown NH\text{---}CO \diagup \end{array}$$

anses bevisad, och sinapanpropionsyran kan följaktligen betraktas såsom ett fullständigt hydreradt mazthinderivat.

Ehuru det visat sig att svafvelurinämne på β-jodpropionsyra endast reagerar med SH-gruppen, och sålunda ingen ringformig sammanslutning sker, kunde man ju vänta sig att med användande af motsvarande aldehyd erhålla ett annat resultat, då syret hos aldehyderna är vid lättrörligare än hos karbonsyrorna. Reaktionen skulle då förlöpa på samma sätt som vid bildningen af de af TRAUMANN [1]) beskrifna amidothiazolerna (azthiolerna). Efter flere fåfänga försök har det verkligen lyckats mig att af svafvelurinämne och β-chlorpropaldehyd erhålla en förening, som att döma af analysen (som dock är verkstäld å sannolikt ej fullt rent material) är amidomazthin af sammansättningen:

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\quad \diagup NH_2 \\ \diagup S\text{---}C \\ CH_2 \qquad \diagdown\!\diagdown N \\ \diagdown CH = CH \diagup \end{array} .$$

Den erhålles genom kokning af en isättiklösning af svafvelurinämne och β-klorpropaldehyd och fällning med ammoniak i form af ett gulhvitt pulver, ytterst svårlösligt i alla lösnings-

[1]) Annalen d. Ch. u. Pharm. 249: 31.

medel (utom i syror, som lösa den under bildning af motsvarande salt) och derför särdeles svår att erhålla ren. Analysen gaf följande värden:

	Beräknadt.	Funnet.
C	42,11	42,62
H	5,26	5,96
N	24,56	24,70
S	28,07	27,88

Salterna med vanliga syror synas vara amorfa och deliqvescenta. Med pikrinsyra, platinaklorid och qvicksilfverklorid erhållas olösliga dubbelsalter. Då jag nu erhållit tillräckligt material för vidare undersökning, så hoppas jag att snart kunna meddela utförligare underrättelser om denna förening och dess derivat.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1891. N:o 10.
Stockholm.

Pflanzenphysiologische Mitteilungen.

1. Über caloritropische Erscheinungen bei einigen Keimwurzeln.

Von JOHN AF KLERCKER.

[Mitgetheilt den 9 December 1891 durch A. G. NATHORST.]

Die Erscheinung der durch einseitige Wärmezufuhr bedingten Krümmungsbewegungen pflanzlicher Organe wurde bekanntlich zuerst durch JULIUS WORTMANN[1]) eingehender studiert. Derselbe untersuchte zunächst das Verhalten der Sporangienträger von *Phycomyces nitens*, sowie der Keimpflänzchen von *Lepidium sativum* und *Zea mais*, wenn dieselben einem von einer erhitzten Eisenplatte ausgehenden Strom strahlender Wärme ausgesetzt wurden. Er stellte hierbei fest, dass falls die in der Nähe der Versuchsobjekte herrschende Temperatur etwa 20° C. überstieg, eine Krümmung, und zwar von der erhitzten Platte weg, eintrat. Diese Erscheinung wurde von ihm, im Anschluss an einen Vorschlag VAN TIEGHEM's mit dem Namen negativer Thermotropismus belegt.

Seine weiteren Experimente bezogen sich auf Keimwurzeln, die, in feuchten Sägespänen wachsend, einer einseitigen Erwärmung unterlagen. Dabei wurde konstatiert, dass die eintretenden thermotropischen Krümmungen erheblich verschieden ausfielen, je nachdem die Temperatur der die Wurzel unmittelbar berüh-

[1]) WORTMANN, J.: Über den Einfluss der strahlenden Wärme auf wachsende Pflanzentheile (Bot. Ztg. Jahrg. 41, N:o 28—29. Leipzig 1883); derselbe: Über den Thermotropismus der Wurzeln. (Bot. Ztg. Jahrg. 43, N:o 13—15, 1885.)

renden Sägespänenschichten eine hohe oder niedrige war. Im ersten Falle traten negative, im zweiten positive Richtungsbewegungen auf. Bei einer mittleren Temperatur, von ihm mit dem Namen Grenztemperatur bezeichnet, erfolgte die Krümmung bald in positivem bald in negativem Sinne. Diese Grenztemperatur, die in den nachgewiesenen Fällen einige Centigraden *über* dem Optimum der Wachsthumsgeschwindigkeit lag, betrug bei den Keimwurzeln von *Ervum Lens* 27° C., *Pisum sativum* 32°—33° C. (Opt. 26° C.) und *Zea mais* 37°—38° C. (Opt. 33,7° C.), Bei *Phaseolus multiflorus* (Opt. 33,7° C.) konnten überhaupt keine positiv thermotropische Krümmungen nachgewiesen werden; erfolgte eine Krümmung — und dies war zwischen 22°—50° sicher der Fall — so geschah es immer im negativen Sinne.

Auf diesen experimentellen Daten gestützt, gelangt WORTMANN zu einer absoluten Verwerfung der von VAN TIEGHEM zunächst, wie es scheint, aus rein theoretischen Erwägungen abgeleiteten Theorie der thermotropischen Erscheinungen. Dieselbe geht von der Voraussetzung aus, in einem auf beiden Seiten ungleich erwärmten Pflanzenorgan sei das Wachstum am ausgiebigsten auf derjenigen Seite, deren Temperatur dem Optimumtemperatur des Wachstums bei dem betreffenden Pflanzenteil am nächsten liegt. Nach dieser Auffassung müssten einseitig erwärmte Wurzeln bei Temperaturen oberhalb des Wachstumsoptimums stets positive, bei Temperaturen, die unter dem Optimum liegen, immer negative Krümmungen ausführen; und ferner die Grenztemperatur, wo ein Übergang von negativem zu positivem Thermotropismus stattfindet, mit dieser Optimumtemperatur identisch sein. Da nun die Wurzeln ein gerade umgekehrtes Verhalten zeigten; dort negative Krümmungen ausführen, wo sie positiv sein sollten, und vice versâ, so folgert WORTMANN, dass die von VAN TIEGHEM aufgestellte Hypothese überhaupt hinfällig sei.

Ehe wir zu der Besprechung einiger Versuche übergehen, die ich vor Jahren im Tübinger Institut ausführte und die ich hier hauptsächlich aus dem Grunde anführe um zu weiteren experi-

mentellen *Ziffernbestimmungen* über diese Fragen anzuregen, wollen wir zunächst diese Schlussfolgerungen WORTMANNS etwas näher in's Auge fassen. Hierbei ist erstens die Thatsache hervorzuheben, dass die Versuchsbedingungen bei den beiden von ihm ausgeführten Gruppen von Versuchen derart verschieden waren, dass es durchaus notwendig erscheint, die experimentellen Ergebnisse beider streng auseinander zu halten. In beiden wurden zwar die Pflanzenorgane einer einseitigen Zufuhr von Energie in der Form von Wärme ausgesetzt, allein während in den ersteren die Zuleitung durch Wärmestrahlung geschah, haben wir es im zweiten Falle wol zum grössten Teile mit einer Zufuhr durch Leitung zu thun. Im ersteren Falle befanden sich die Versuchspflanzen m. a. W. in einem Wärmestrahl, im Zweiten in einem Wärmestrom. Dass die dunklen Wärmestrahlen einen dem Heliotropismus an die Seite zu stellenden richtenden Einfluss auf Pflanzenorgane ausüben können, ist ja übrigens bekanntlich in neuerer Zeit durch Untersuchungen H. VÖCHTINGS[1]) wahrscheinlich gemacht, und für die auf solche Weise entstehenden Krümmungen wäre wol die Bezeichnung thermotropische (in Analogie mit heliotropisch) am zweckmässigsten zu reservieren.

Für diejenigen Bewegungen aber, die ein Pflanzenorgan unter dem Einfluss eines zugeleiteten Wärmestroms ausführen, sollte ein besonderer Name eingeführt werden, und könnte man dieselben vielleicht zweckmässig als *caloritropische* bezeichnen.

Sehen wir jetzt etwas näher zu, welche Faktoren die WORTMANNschen Krümmungen haben veranlassen können. In der ersten Versuchsserie mit *Phycomyces*, *Lepidium*, *Linum* und *Zea* befanden sich die Objekte in der Luft in einer gewissen Entfernung von einer erhitzten, berussten Eisenplatte. Sie empfingen also eine dunkle Wärmebestrahlung, deren Intensität mit der Entfernung von der heissen Platte abfiel. Die eintretende Krümmung könnte nun entweder thermotropischer Natur sein, d. h. aus einer durch den Anprall der Wärmewellen erzeugten un-

---

[1]) H. VÖCHTING, Pringsheim's Jahrbücher, Bd XXI, 1889, p. 285—297.

mittelbaren Reizung des Protoplasten resultieren, oder sie könnten ihren Grund haben in der durch einseitig gesteigerte Wärmeabsorption entstehenden Temperaturdifferenz zwischen den beiden antagonistischen Seiten des Organs.

Aus seinen Versuchsergebnissen folgert WORTMANN, dass die zweite Möglichkeit ausgeschlossen sei, weil die Objekte stets negative Bewegungen ausführten auch in dem Falle, dass die an der bestrahlten Seite derselben herrschende Temperatur oberhalb der Optimumtemperatur lag. Hier ist nun zu bemerken, dass die Temperaturmessungen in hohem Grade unzuverlässig waren, da die erzielte Temperatur bekanntlich, ausser von der Intensität der Bestrahlung auch von dem Absorptionsvermögen der Oberfläche, von der spezifischen Wärme der bestrahlten Substanz und von der Schnelligkeit des Wasseraustausches innerhalb des Organs abhängig ist. Hätte WORTMANN, statt der gewöhnlichen, benetzte Thermometerkugeln verwendet, so wären ganz andere Temperaturangaben herausgekommen. Aus diesen Gründen gebe ich auf die aus denselben gezogenen Schlüsse im Bezug auf die Natur der Krümmungen wenig Wert, obgleich ich aus der Analogie mit den heliotropischen durchaus geneigt bin, dieselben ebenfalls als durch die direkte Bestrahlung induziert, als thermotropische, zu bezeichnen.

In der zweiten Versuchsanordnung dürfte die Zufuhr durch strahlende Wärme mehr weniger ausgeschlossen sein, obgleich bei der heterogenen Zusammensetzung des Mediums, das aus durch Lufträume geschiedenen befeuchteten Sägespänen bestand, die Möglichkeit einer auf sehr kurzen Abständen wirkenden Ausstrahlung der auf der einen Seite der Wurzeln erhitzten Holzpartikeln allerdings in's Auge zu fassen sei. Hier tritt übrigens ein anderer möglicherweise mitwirkender Faktor hinzu. Da die eine Seite des die lockeren Sägespäne fassenden Metallkastens konstant erwärmt, die andere abgekühlt wurde, so ist mit dem Zustandekommen von Luftströmungen zu rechnen, die wenigstens an dem Boden des Gefässes von der kalten zur warmen Wand gerichtet sein müssten. Infolge der Temperaturdifferenzen der

verschiedenen Schichten des Kulturmediums müssen aus diesem Grunde sehr bald Unterschiede in dem Wassergehalt derselben eintreten, wodurch die Möglichkeit hinzukommt, dass hydrotropische Erscheinungen ebenfalls ins Spiel treten.

Die bei dieser Versuchsanordnung möglicherweise mitwirkenden Faktoren sind also die folgenden: 1) Der Wärmestrom; 2) Eventuelle Strahlung von den erhitzten Sägespänen; 3) Direkte Reizwirkung der entstehenden Luftströmungen und 4) Hydrotropische Wirkung infolge partiellen Austrocknens. Es wäre ja nun möglich, dass mehrere dieser Faktoren wirklich von Belang wären, dass ferner einige bei niederen, andere bei höheren Temperaturen überwiegen würden; und in der That scheinen die Versuchsergebnisse für ein derartiges Verhalten zu sprechen. Augenblicklich mit dem Versuch einer Isolierung der Einwirkungen dieser verschiedenen Agentien beschäftigt, teile ich hier die der Gesammterscheinung betreffenden Beobachtungen mit.

Versuchsanordnung. Als Versuchsapparate dienten teils ein modifizierter Wortmannscher Apparat des Tübinger Instituts, wo anstatt der durch Flammen erhitzten Wand des die Sägespäne fassenden Gefässes, ein Zinkkasten als Wärmequelle diente, worin mit Hülfe eines REICHERT'schen Thermoregulators für Gas eine Quantität Wasser auf eine konstante, erhöhte Temperatur gehalten wurde; teils ein für den vorliegenden Zweck besonders konstruirter Apparat. Da die betreffende Konstruktion vielleicht auch für andere Zwecke mit Erfolg zu verwenden wäre, so wird dieselbe hier in aller Kürze mitgeteilt (Fig. 1). Der Apparat besteht aus drei in einander gestellten Zinkkästen. Die Äussere A stellt ein doppelwandiges unten offenes Trog dar, das durch eine senkrechte Wand W geteilt wird. Auf jeder Seite der Wand befinden sich oben zwei angelöthete Röhre r und r_1, von denen das eine mit der Wasserleitung in Verbindung gesetzt wird, das andere als Abflussrohr dient. Hierdurch entsteht ein konstanter Strom kalten Wassers, wodurch die Innenwand des Gefässes stets abgekühlt gehalten wird. In der mittleren Öffnung von A steht ein zweites Trog B derselben Form, das mit angefeuchteten Säge-

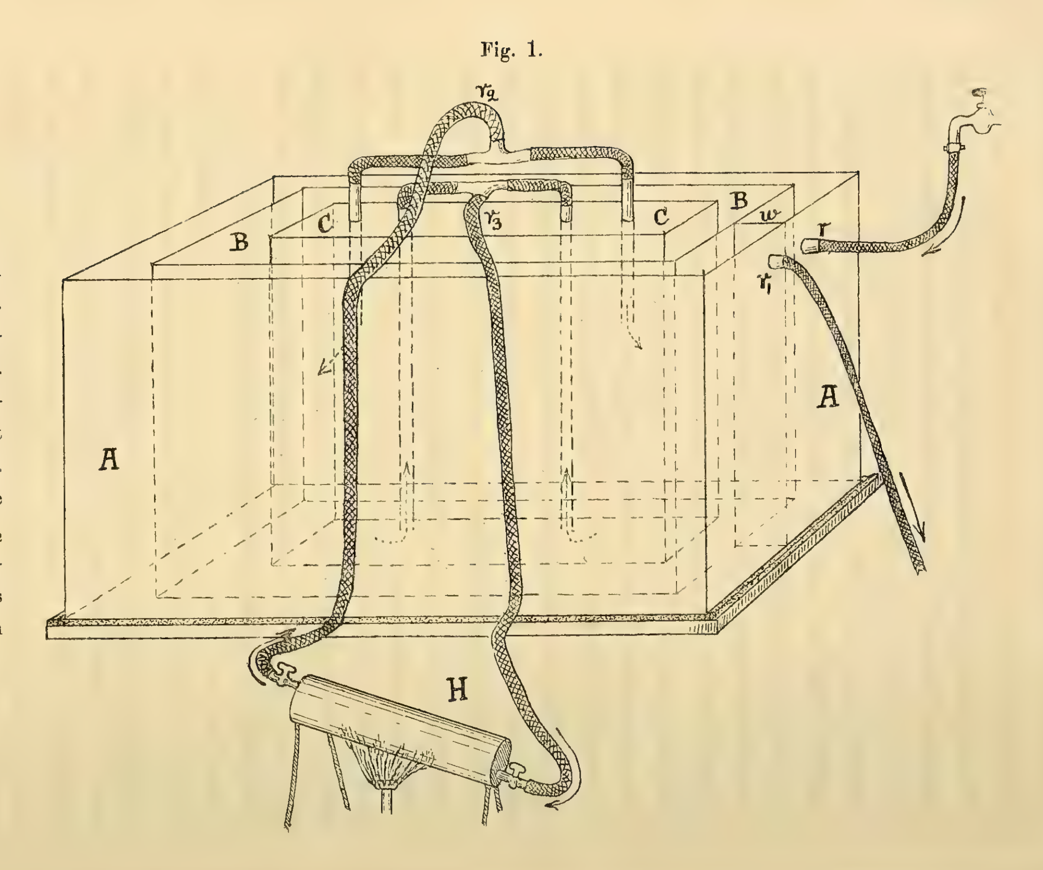


Fig. 1.

A Abkühlungskasten, durch eine Scheidewand *w* abgegrenzt. *r* und r_1 Zufluss- bzw. Abflussleitungen des kalten Wassers. *B* mit Sägespänen gefüllter Kasten, wo die Objekte angebracht werden. *C* Erwärmungskasten. Die darin enthaltene Wassermenge zirkuliert durch die Leitungen r_2 r_3 und wird in der Heizvorrichtung *H* stetig erwärmt. Das Ganze ruht auf einer isolierenden Unterlage von Filz.

spänen angefüllt wird. Die Wärmequelle schliesslich, welche die Mitte des ganzen Systems einnimmt, besteht aus einem parallelipedischen, mit abhebbarem Deckel versehenen Zinkkasten *C*. Derselbe ist mit Wasser gefüllt und steht durch zwei Röhrensysteme r_2 und r_3 mit dem auf den Boden des Zimmers aufgestellten Heizungsapparat *H* in Verbindung. Dieser, ein schräg angebrachter Wasserkessel, wird durch eine Gasflamme erhitzt, und hierbei entsteht, wie aus der Figur ersichtlich, eine Wassercirkulation, wodurch die Wassermenge in *C* nach einiger Zeit auf eine von dem Grade der Wärmezufuhr in *H* abhängige Temperatur gebracht wird. Auf die Sägespäne in *B* wird ein die ganze Breite desselben einnehmender Streifen Pappe gelegt, dass mit mehreren längsgehenden, zur Aufnahme der Versuchswurzeln bestimmten, Reihen von kleinen Löchern versehen ist. Diese befinden sich in einem gegenseitigen Abstand von je 1 Cm. In jeder zweiten Reihe ist ein Thermometer angebracht, die dazwischenliegenden Temperaturen werden durch Interpolation bestimmt.

Nachdem die Temperaturverhältnisse konstant geworden, stellt der Temperaturfall eine Kurve dar, die annähernd als eine gerade Linie behandelt werden kann, wie aus der nachfolgenden Bestimmung des Versuchs XXVI erhellt.

Temperatur in Centigraden.

	12^h m.	1^h p. m.	2^h p. m.	3^h30 p. m.	4^h p. m.	7^h p. m.
Lufttemp. =	16°,2	16°,2	17°	16°,8	16°,8	17°,1
T_k .... =	15°,4	15°,8	16°	16°,1	16°,1	16°,2
t_1 .... =	20°,9	23°,1	23°,5	23°	23°	23°,6
t_2 .... =	25°	28°,2	28°,5	27°,9	27°,7	28°,5
t_3 .... =	29°	32°,8	32°,8	31°,7	31°,3	32°,3
t_4 .... =	34°	37°,9	37°,6	36°,1	36°	37°,3
T_v .... =	44°	46°	45°,6	44°	43°,8	46°

T_k und T_v bedeuten hier die resp. Temperaturen der Gefässe *A* und *C*; $t_1 \ldots\ldots t_4$ sind die successiven Temperaturen der 1 Cm. entfernten Sägespänenschichten. Der mittlere Wärmefall betrug folglich in diesem Versuch 4° C. per Centimeter (4 °C./Cm.).

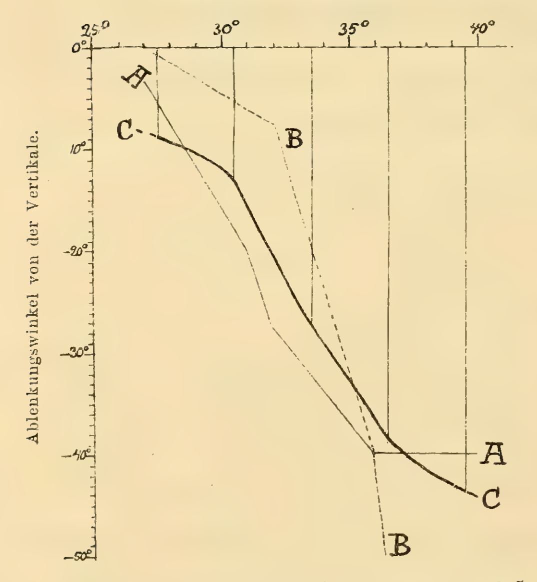
Um ein Mass der erzielten Wirkung zu erhalten, wurden die Wurzeln nach Verlauf der Versuchszeit aus den Sägespänen mit Hülfe einer Pinzette gehoben, auf einer aufgelegten Glasplatte gezeichnet, und schliesslich der Ablenkungswinkel gemessen.

Bei zarteren Wurzeln verfuhr ich in der Weise, dass die Wurzeln, in Sägespänen eingepackt, zwischen Glasplatten angebracht waren, die senkrecht zu den Wänden des Gefässes in die Masse der Sägespäne eingebettet wurden. Die Temperaturen wurden hier, durch die Abstände von den resp. Wänden, aus der an den Thermometern abgelesenen Kurve des Wärmefalls bestimmt.

Versuchsergebnisse.

Zunächst machte ich mit den von WORTMANN untersuchten Wurzeln von *Pisum sativum* einige Versuche, die seine Versuchsergebnisse der Hauptsache nach zu bestätigen scheinen.

Fig. 2. Caloritropische Kurve von *Pisum sativum*.



A Reaktion nach Verlauf von 1. Stunde. *B* Nach 5. Stunden. *C* *Mittelwerte* aus 28 Bestimmungen. Mittlerer Wärmefall 4 °C./Cm.

Tabelle 1.

Pisum sativum. Mittel aus 28 Beobachtungen. Wärmefall 4 °C/Cm.

Temper.-Intervall.	Krümmung.
26°—29° C.	— 8°,9
29°—32° C.	— 12°,9
32°—35° C.	— 27°,2
35°—38° C.	— 38°,4
38°—41° C.	— 43°,9

Reaktion der Wurzeln von Pisum sativum.

Von *Pisum sativum* wurden in 4 Versuchen 28 Pflanzen untersucht. Die Versuche, die nicht weiter ausgedehnt wurden, erstreckten sich der Hauptsache nach nur auf den Temperaturen zwischen 27°—40° C. In der Figur 2 gebe ich die Ergebnisse graphisch dar. *A* ist die Kurve der in einem Versuch nach Verlauf einer Stunde erzielten Krümmungen, *B* dieselbe der in einem anderen Fall nach Verlauf von 4 Stunden erzielten Reaktion. *C* schliesslich stellt eine aus den sämmtlichen 28 Beobachtungen mit Hülfe der kleinsten Quadratmethode für je 3-gradige Temperaturintervalle konstruierte Kurve dar. Wie aus der graphischen Darstellung ersichtlich, zeigen die Kurven einen befriedigend übereinstimmenden Verlauf. Nach einstündiger Einwirkung wird bei einseitiger Erwärmung auf die zwischen 30° und 40° liegenden Temperaturen eine mit der Höhe der Temperatur wachsende, stark negativ caloritropische Krümmung erzielt. Unter 30° bis gegen 27° wird die Stärke der Reaktion immer kleiner, was mit den WORTMANNschen Angaben stimmt, dass hier ein Übergang zu positiver Reaktion stattfindet. Dies habe ich übrigens in isolierten Versuchen bei niederen Temperaturen ebenfalls gefunden.

Ob dem aus Kurve *B* ersichtlichen, bei längerer Einwirkung stattfindenden Zurückgang in der Intensität der Reaktion bei den Temperaturen zwischen 27° und 35° irgend welche allgemeinere Bedeutung zuzumessen sei, wage ich aus diesen nur eine beschränkte Zahl von Versuchspflanzen umfassenden Beobachtungen nicht mit Bestimmtheit zu behaupten, wir werden indessen später bei anderen Versuchsobjekten etwas ähnliches finden.

Die Kurve *C* dürfte, weil von den Unregelmässigkeiten der Einzelnerscheinungen befreit, ein einigermassen befriedigendes Bild des Verlaufs der caloritropischen Krümmungen bei *Pisum sativum* geben, wenigstens für das Stück zwischen 27° und 38° C. Nach dem Verlauf derselben zu urteilen, würde deren Schneidepunkt mit der Abscissenachse, oder m. a. W. der Übergang von negativer

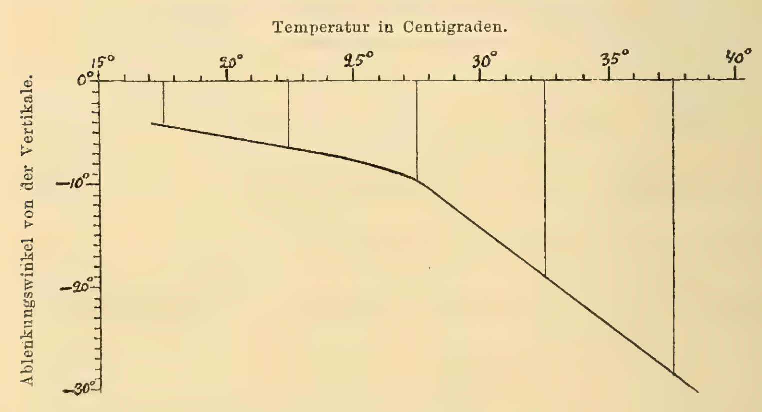
zu positiver Reaktion etwas niedriger ausfallen, als in den WORTMANNschen Versuchsergebnissen der Fall. Ob dies daraus sich erklären lässt, dass seine Thermometerangaben weniger zuverlässig waren, weil, wie aus seinen Versuchsbeschreibungen ersichtlich, die Thermometer nur nach Augenmass in einer Linie mit den Versuchsobjekten in die Sägespäne eingestellt wurden, oder ob er mit einem anderen Temperaturfall gearbeitet hat, was aus seinen Versuchen nicht ersichtlich, lasse ich dahingestellt. Hauptsache ist vorläufig, dass die Kurve stets fällt, dass also die erzielte Grösse der Krümmung wirklich eine bestimmte, relativ einfache Funktion der einseitigen Temperatur darstellt.

Meine Hauptbeobachtungen beziehen sich auf die bisher im Bezug auf Caloritropismus nicht untersuchten Keimwurzeln von *Helianthus annuus*, *Faba vulgaris* und *Sinapis alba*.

Versuche mit Faba vulgaris.

Mit *Faba* führte ich 7 Versuche aus, die 43 Versuchsobjekte umfassen. *Bei dieser Pflanze wurden zwischen den Temperaturen 16° und 40° C.*, ganz vereinzelten Beobachtungen ausgenommen, *lauter negativ caloritropische Krümmungen beobachtet.*

Fig. 3. Caloritropische Kurve von *Faba vulgaris.*



Mittelwerte aus 43 Bestimmungen.
Mittlerer Wärmefall 4,5 °C./Cm.

Tabelle 2. *Faba vulgaris.* Versuchsdauer 3—5 Stunden. Mittel aus 43 Beobachtungen.

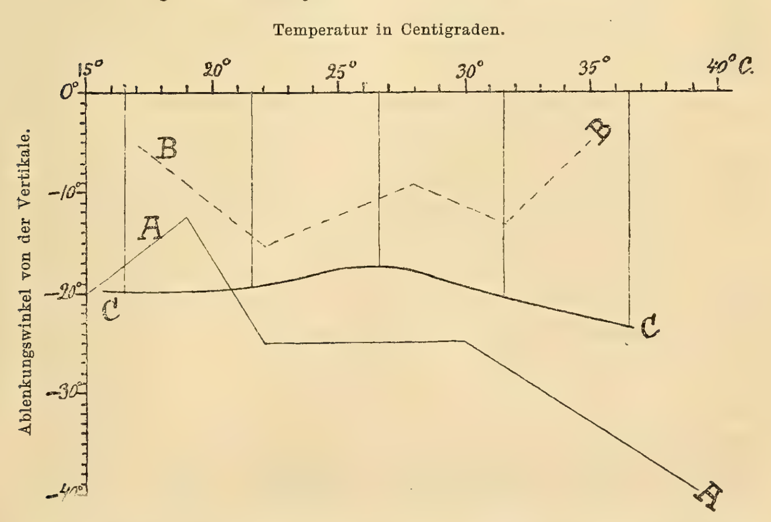
Temp.-intervall.	Zahl der Beobacht.	Krümmung.
15°—20°	13	— 4°,3
20°—25°	6	— 6°,5
25°—30°	8	— 9°,8
30°—35°	5	— 19°,1
35°—40°	11	— 28°,9

Tab. 2 und Fig. 3 geben die für 5-gradige Temperaturintervalle nach der Methode der kleinsten Quadrate konstruierte Kurve der Krümmungen. Auch hier zeigt diese von den Abweichungen der einzelnen Objekte befreite Kurve einen durchaus regelmässigen Verlauf, der sich nur durch eine kleine Depression auf der Strecke zwischen 25° und 30° C. auszeichnet; und auch hier stellt sich die Stärke der Krümmung als eine Funktion der auf der einen Seite des Objekts herrschenden Temperatur dar.

Versuche mit Helianthus annuus.

Hier treten ebenfalls zwischen 15° und 40° C. nur negative Krümmungen ein, und schliesst sich die Pflanze der von WORTMANN beobachteten *Phaseolus*, sowie *Faba* in dieser Beziehung an.

Fig. 4. Caloritropische Kurve von *Helianthus annuus.*



A Nach einer Stunde. *B* Nach 5. Stunden. *C* *Mittelwerte* aus 55 Bestimmungen. Mittlerer Temperaturfall 4 °C./Cm.

Tabelle 3. *Helianthus annuus.* Mittel aus 55 Beobachtungen.

Temperatur-intervall.	Zahl der Beobacht.	Krümmung.
14°—19° C.	12	— 20°
19°—24° C.	13	— 19°,4
24°—29° C.	11	— 17°,5
29°—34° C.	12	— 20°,1
34°—39° C.	7	— 23°,5

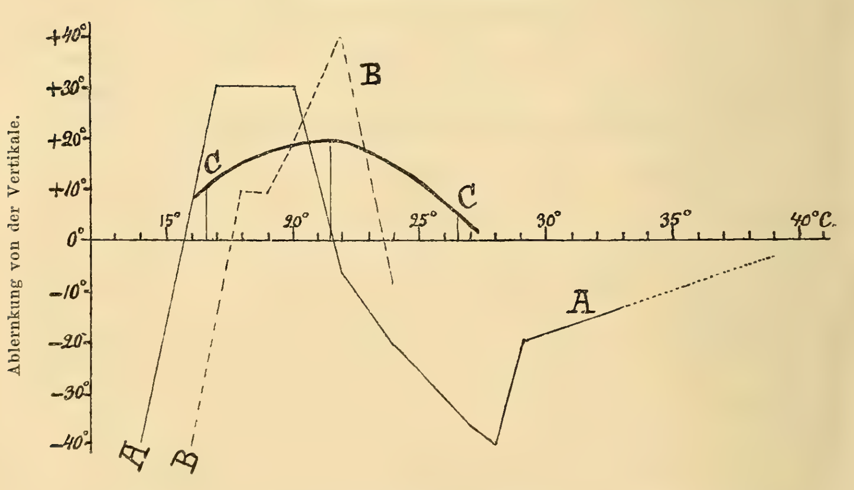
In Fig. 4 geben *A* und *B* zwei Reihen Versuchsergebnisse nach 1- resp. 5-stündiger Einwirkung an. Auch hier scheint ein Zurückgang der Reaktion nach Verlauf der ersten Stunde einzutreten. In *C* ist das in oben angegebener Weise erhaltene Mittel aus 55 Beobachtungen (Tab. 3) dargestellt. Hier finden wir ebenfalls zwischen 25° und 30° eine ähnliche Depression wie auf der Kurve *C* von *Faba* wieder, sonst hält sich dieselbe in weit höherem Grade, als bei dieser der Fall, von der Abscissenachse entfernt.

Versuche mit Sinapis alba.

Von *Sinapis* habe ich 22 Beobachtungen. Die Kurve der nach einstündiger Einwirkung erzielten Krümmungen giebt *A*,

Fig. 5. Caloritropische Kurve von *Sinapis alba.*

Temperatur in Centigraden.



A Nach einer Stunde. *B* Nach 5 Stunden. *C Mittelwerte* aus 22 Bestimmungen. Mittlerer Wärmefall 4 °C./Cm.

Tabelle 4. *Sinapis alba.* Mittel aus 22 Beobachtungen.

Temperatur-intervall.	Krümmung.
14°—19° C.	+ 10°,5
19°—24° C.	+ 19°
24°—29° C.	+ 2°,4

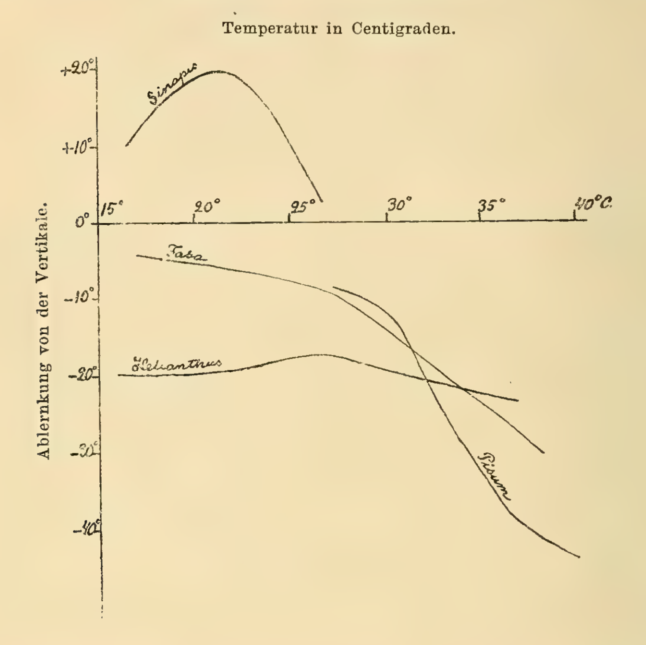
die der 5-stündigen *B* an. In beiden treten bei den Temperaturen um 20° positive Krümmungen ein, gegen 25° fangen negative an, was auch bei niederen Temperaturen der Fall; auch hier bemerkt man eine ähnliche Verschiebung der Kurve der mehrstündigen Einwirkung nach Rechts wie die früher bei *Pisum* und *Helianthus* besprochene. Die kalkulierte Kurve habe ich hier leider nur auf der kurzen Strecke 14°- - - - - 29° konstruieren können, weil die Angaben der höheren Temperaturen zu spärlich waren, um bei dieser Berechnung mit hineingezogen zu werden. Der Verlauf der Kurve *A* bei den höheren Temperaturen dürfte deswegen etwas unsicher sein, doch besitze ich mehrere Beobachtungen, die hier nicht gebraucht werden können, weil die Zahlenwerte der Krümmung nicht angegeben sind, die aber alle einen Verlauf der Kurve oberhalb der Abscissenachse bei diesen höheren Temperaturen anzeigen. Wie die Kurve *C* anzeigt, dürfte eine der Grenztemperaturen für *Sinapis* bei etwa 28° C. liegen.

Diskussion der Versuchsergebnisse.

Aus dem Verlauf der oben mitgeteilten Kurven liessen sich vielleicht einige Schlussfolgerungen ableiten, die allerdings auf ein weit grösseres statistisches Material gestützt sein dürften, um Anspruch auf absolute Sicherheit zu erheben, die indessen an Wahrscheinlichkeit dadurch gewinnen, dass die Resultate der an den 4 Pflanzenarten angestellten Versuche in dieser Beziehung übereinstimmen.

Oberhalb 28° bis gegen 40° zeigen die drei Kurven für *Pisum*, *Faba* und *Helianthus* (Fig. 6) insofern Übereinstimmung, als bei allen mit steigender Temperatur erhöhte Intensität der caloritro-

Fig. 6. Caloritropische Kurven (Mittelwerte) von *Pisum sativum*, *Faba vulgaris*, *Helianthus annuus* und *Sinapis alba*.



pischen Reaktion eintritt. Bei *Pisum* ist die Kurve am steilsten, darnach folgen *Faba* und *Helianthus*. Auf irgend einer Strecke zwischen 15° und 22° treten Störungen in der Weise ein, dass die Kurve eine Tendenz zeigt sich der Abscissenachse zu nähern, die bei *Pisum* und *Sinapis* so weit geht, dass dieselbe auf einer gewissen Strecke positive Werte erhält. Diese Verhältnisse scheinen mir davon Zeugniss abzulegen, dass diese, vorläufig als Ganzes caloritropisch genannten Erscheinungen thatsächlich komplizierterer Natur sind, also durch wenigstens zwei wahrscheinlich antagonistisch wirkende Faktoren erzeugt werden. Am deutlichsten tritt dies bei *Helianthus* hervor, wo die Kurve zu beiden Seiten der erwähnten Depression einen fast horizontalen Verlauf nimmt.

Wir wollen jetzt die die Wurzeln möglicherweise influierenden Faktoren etwas näher betrachten. Zuerst haben wir dann die hypothetische Krümmung von VAN TIEGHEM. Dieselbe würde, wie schon oben erwähnt, oberhalb des Wachstumsoptimums, das

ja um 30° herum liegt, positive, unterhalb desselben negative Krümmung bewirken.

Da die in gegebener Zeit auf dieser Weise erzielte Krümmung bei einem und demselben Objekt — d. h. bei konstant bleibender Dicke des Organs und konstanter Länge der wachsenden Zone desselben — alleinig von dem Unterschiede in der Zuwachsschnelligkeit abhängig sein muss, welcher durch den Unterschied der an den beiden antagonistischen Seiten des Objekts herrschenden Temperaturen erzeugt wird, so folgt, dass wir die Grösse dieser hypothetischen Krümmung aus der das Wachstum bei verschiedenen Temperaturen angebenden Kurve direkt ableiten können.

Es sind ja, gleichmässige Verteilung des Wachsens innerhalb der Krümmungszone vorausgesetzt, die resp. Bogenlängen oder m. a. W. die Längen von der konvexen resp. konkaven Flanke der gekrümmten Wachstumszone L_1 und L_2 gleich

$$L_1 = k \cdot (\varrho\varphi + D\varphi)$$
$$L_2 = k \cdot \varrho\varphi$$

wo φ der Ablenkungswinkel, ϱ der Krümmungsradius der Konkaven Seite, D die Dicke der Wurzel bedeutet, und k eine von der Einheit für φ abhängige Konstante darstellt (Fig. 7). Durch Elimination von ϱ ergiebt sich der Ablenkungswinkel φ

$$\varphi = k_1 \cdot \frac{L_1 - L_2}{D} \quad . \; . \; . \; . \; (1)$$

Fig. 7.

War die ursprüngliche Länge der wachsenden Zone — vor der Krümmung — L; und bezeichnen wir mit i_1 und i_2 die resp. Wachstumsintensitäten der beiden Seiten, so ist, falls diejenige Wachtumsbewegung, wodurch die Krümmung zu Stande gebracht ward, den Zeitabschnitt τ in Anspruch genommen hat,

$$L_1 = L(1 + i_1 \tau)$$
$$L_2 = L(1 + i_2 \tau);$$

folglich

$$L_1 - L_2 = t \cdot L \cdot (i_1 - i_2)$$

und (1)

$$\varphi = k_1 \cdot \tau \cdot L \cdot \frac{i_1 - i_2}{D} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

Da die Zahl D im gegebenen Versuchsfalle, ausser der Dicke des Objekts auch einen Abstand zweier Isothermflächen repräsentiert, so ist derselbe dem Temperaturfall $\Theta_1 - \Theta_2$ zwischen den beiden Seiten proportional und wir erhalten

$$\varphi = k_2 \cdot \tau \cdot L \cdot \frac{i_1 - i_2}{\Theta_1 - \Theta_2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

Im Grenzfalle, d. h. für hinreichend dünne Objekte bei mässigem Wärmefalle, kann man für $\frac{i_1 - i_2}{\Theta_1 - \Theta_2}$ den Differentialkoeffizienten $\frac{di}{d\Theta}$ substituieren und erhält dann

$$\varphi = k_2 \cdot t \cdot L \cdot \frac{di}{d\Theta} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

Dass die Einfühung von $\Theta_1 - \Theta_2$ resp. $d\Theta$ erlaubt ist, wird sofort klar, wenn man die Kurve des Wachstums bei verschiedenen Temperaturen in ein Koordinatensystem hineinkonstruiert, dessen Abscissen die gegenseitigen Abstände der im Substrat herrschenden Isothermflächen sind.

Wenn das Wachstum in verschiedenen Punkten der Krümmungszone einen verschiedenen Verlauf nimmt, so gilt obige Gleichung (4) nur für unendlich kleine Stücke derselben, also

$$d\varphi = k_2 \cdot \tau \cdot dL \frac{di}{d\Theta} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

und φ wird erhalten durch Integration

$$\varphi = k_2 \cdot \tau \int_0^L \frac{di}{d\Theta} \cdot dL \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (6)$$

Wenn aber hier für die mit L wechselnden Werte von $\frac{di}{d\Theta}$ ein Mittelwert eingeführt wird, verwandelt sich dieser Ausdruck auch hier in

$$\varphi = k_1 \tau L \cdot \left|\frac{di}{d\Theta}\right|_m \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

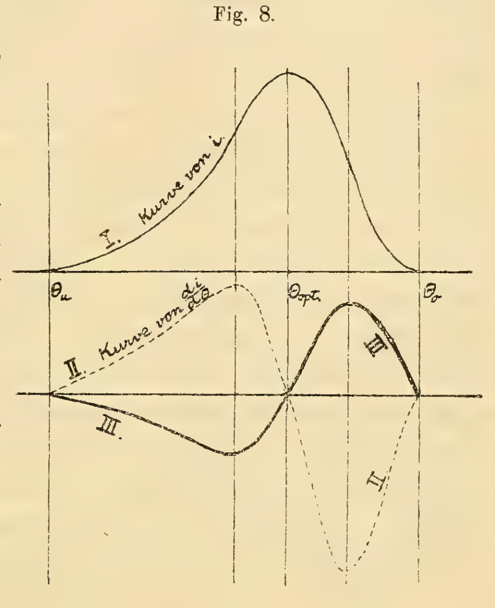


Fig. 8.

Es sei Fig. 8 eine Wachstumskurve mit den Kardinalpunkten Θ_u = untere Grenztemperatur (»Minimum»), Θ_{opt} = Optimum und Θ_o = obere Grenztemperatur (»Maximum»).[1]) Für ein Objekt, das in der bei diesen Versuchen herrschenden Weise unter dem Einfluss eines konstanten Temperaturfalls zwischen den beiden Seiten von $(\Theta_1 - \Theta_2)$ Centigraden sich befindet, würde nun (3) die VAN TIEGHEMsche Krümmung auf verschiedene Stellen der Kurve von der Wachstumsdifferenz $\frac{i_1 - i_2}{\Theta_1 - \Theta_2}$ oder allgemein (4, 7) von der ersten Derivate $\frac{di}{d\Theta}$ der Kurve in den verschiedenen Punkten in der Weise abhängig sein, dass wo letztere positiv ist, die Krümmung negativ sei und vice versa, und wo die Derivate ein Maximum resp. Minimum hat, auch die Grösse der Krümmung ein entsprechendes Maximum oder Minimum zeigen

---

[1]) Es dürfte sich empfehlen statt der Bezeichnungen Minimum und Maximum, welche, da Beide einen Minimumspunkt der Kurve darstellen, irreleitend sind, die obigen Bezeichnungen zu verwenden.

würde. Die Kurve der ersten Derivate der Kurve I hat nun die Form von II. Weil die Kurve I zwischen Optimum und oberer Grenze einen steileren Verlauf hat, wie zwischen unterer Grenze und Optimum, so muss, wie leicht ersichtlich, die Kurve II in ihrem positiven Teil höher aufsteigen, wie sie in dem negativen untersinkt. Die Kurve der VAN TIEGHEMschen Krümmung sollte folglich den Verlauf von III zeigen; in Worten ausgedrückt: auf der kurzen Strecke zwischen Optimum und oberer Grenze würde die VAN TIEGHEMsche Einwirkung die Tendenz haben, den Wurzeln eine energischere Krümmung in positivem Sinne zu geben als der negativen zwischen unterer Grenze und Optimum. Hiervon zeigen die vorhandenen Kurven aber nichts.

Ein anderer Faktor, die bei den Versuchen in's Spiel tritt, ist der *Geotropismus.* Derselbe muss natürlicher Weise jeder caloritropischen Krümmung, sei es eine negative oder eine positive, entgegenwirken. Da das Maximum der geotropischen Einwirkung, nach allen bekannten Thatsachen zu urteilen, auf diejenige Temperatur fällt, wo Maximum der Wachstumsbewegung überhaupt eintritt, m. a. W. beim Optimum, so würde dieser Faktor bestrebt sein die Krümmungs-Kurve in der Nähe des Optimums abzuflachen. Hierdurch wäre möglicher weise die Depression der Kurve von *Helianthus* und *Faba* zu erklären. Aber zu dem Übergang von negativer zu positiver Krümmung kann der Geotropismus natürlicherweise keineswegs die Ursache sein.

Im Bezug auf *Hydrotropismus* und *Einwirkung von Strömungen der Luft* liegen keine Beobachtungen über die abhängigkeit der durch diese Faktoren möglicherweise erzeugten Krümmungsbewegungen von der Temperatur vor, die irgend einen Schluss auf die etwaige Einwirkung derselben erlauben; die diesbezüglichen Erscheinungen müssen zuerst speziell nach dieser Seite hin studiert werden, worüber ich mir späteren Untersuchungen vorbehalte.

So viel ist aber aus den Kurven anzunehmen, dass ein durch die Wurzeln geleiteter Wärmestrom, dessen Intensität durch den Wärmefall p. Cm. im Substrat, oder anders ausgedrückt, durch

die gegenseitigen Abstände der successiven Isothermflächen in demselben bemessen werden kann, bei *Helianthus*, *Faba*, *Pisum* und *Sinapis* das Bestreben hat den Wurzeln eine negativ caloritropische Krümmung mitzuteilen, die wenigstens bis gegen 40° C. stetig zunimmt; dass ferner bei den gegebenen Versuchsbedingungen irgend ein anderer oder mehrere Faktoren mitspielen, die dieser Krümmung entgegenwirken. Bei *Sinapis* resultiert diese antagonistische Wirkung in die Erzeugung eines positiven Zweiges der Krümmungskurve zwischen etwa 15° und 22° C., bei *Pisum* scheint dasselbe in Übereinstimmung mit den WORTMANNschen Ergebnissen für eine Strecke unterhalb 30° C. ebenfalls der Fall zu sein; bei *Faba* und *Helianthus* schliesslich machten sich die entgegenwirkenden Faktoren nur durch Erzeugung von zwischen 25° und 30° C. liegenden Depressionen der Kurve kund. Hiernach würde, falls wir annehmen, dass die Haupteinwirkung die caloritropische sei, dieselbe nur negative Bewegungen erzielen können.

Ferner scheinen die Beobachtungen bei *Pisum*, *Helianthus* und *Sinapis* dafür zu sprechen, dass wenigstens bei dem Wärmefall von etwa 4°—5° C. p. Cm., diese caloritropische Reaktion *schneller* eintritt wie der Gegenwirkung. Hier ist übrigens eine andere Thatsache mit im Betracht zu ziehen. Wenn man Wurzeln der genannten Pflanzen eine längere Zeit sich caloritropisch krümmen lässt, so bemerkt man, aber gewöhnlich nur bei den *höheren* Temperaturen, wie die negativ gekrümmten Wurzeln eine Zeit lang durch Isothermflächen stetig abnehmender Temperatur in der durch die erzielte Krümmung bestimmten Neigung zur Vertikale weiterwachsen, bis plötzlich die Spitze abwärts sich krümmt und öfters vertikal weiterwächst. Es wäre nun vielleicht zu erwarten, dass die Wurzeln so lange schräg weiterwachsen würden, bis die Isothermfläche der Grenztemperatur erreicht wird. Dies ist aber keineswegs der Fall, denn erstens tritt die Abwärtskrümmung der Wurzelspitze auch bei *Faba* und *Helianthus* auf, die innerhalb der beobachteten Temperaturen überhaupt keine Grenztemperatur aufweisen, zweitens biegt die gekrümmte Wurzel geotropisch abwärts, nachdem sie eine Isothermfläche

erreicht hat, wo eine andere Wurzel noch energische Krümmung zeigt. Diese Thatsache scheint mir einen wichtigen Aufschluss auf die Natur der caloritropischen Krümmung geben zu können, weil dadurch die, übrigens durch die auffallende Schnelligkeit des Eintretens der caloritropischen Reaktion gestützten, Möglichkeit angezeigt wird, dass diese Krümmung keine direkte Wachstumskrümmung, der Geotropischen vergleichbar, vorstellt. Wenn wir nämlich annehmen, die plötzlich unter dem Einfluss des Wärmefalls gebrachte Wurzel würde in der Wachtumszone sehr schnell caloritropisch gebeugt, so wurde die weiterwachsende Spitze nunmehr dem Einfluss des Geotropismus ausgesetzt werden. Da indessen, während mit wachsender Ablenkungswinkel die Einwirkung des Caloritropismus abnehmen muss, ersterer bekanntlich eine längere latente Wirkungszeit erfordert, so würde die Wurzel Gelegenheit haben ein Stück weiter zu wachsen, bis die geotropische Krümmung zum Vorschein gelangen kann. Wenn diese nun an Intensität überwiegt, so vermag dieselbe trotz des sogleich entgegenwirkenden Einflusses des Caloritropismus die Wurzel wieder abwärts zu krümmen. Wenn die genannte Voraussetzung aber richtig ist, so würde nunmehr, da die Einwirkung des Geotropismus bei erlangter vertikaler Lage allmählich wieder erlischt, der Caloritropismus nochmals überwiegen können, und auf's Neue zu einer Ablenkung der nunmehr wachsenden Partie von der Vertikale Veranlassung geben können. Eine längere Zeit in konstantem Wärmefall wachsende Wurzel würde folglich eine zickzackförmige Gestalt annehmen. Dies ist nun in der That der Fall, wie mehrfache Beobachtungen gelehrt haben.[1])

Aus diesen aufeinander folgenden hin und zurück gerichteten Krümmungen wäre es übrigens bei Kenntniss der Wachstumsschnelligkeit des Organs möglich die Unterschiede der Reaktionsschnelligkeit der caloritropischen und geotropischen Reaktionen zu berechnen.

---

[1]) Z. B. bei *Sinapis alba* wo bei einer Ausgangstemperatur von 24° eine Wurzel die successiven Krümmungen — 20(+ 20 — 20 + 20) oder eine andere bei 39° — 20(+ 30 — 20 + 30) nach 5 Stunden zeigte.

Über die etwaige Einwirkung der Höhe des Temperaturfalls auf die Grösse der caloritropischen Reaktion liegen keine Angaben vor, rein theoretisch genommen ist aber anzunehmen, dass dieselbe von grossem Einflusse auf die Kurve derselben sein muss.

In der vorhergehenden Darstellung ist es mir vor allem daran gelegen, in bescheidenem Masse darzuthun, wie es auch bei den Krümmungserscheinungen immer möglich sein wird, dass, wenn man den Versuch macht, die Werte derselben numerisch auszudrücken, unter Verwendung eines umfangsreichen statistischen Materials zu einer matematischen oder graphischen Darstellung der Abhängigkeit der Erscheinung von einem gewissen äusseren Agenz zu gelangen, woraus sich Schlüsse auf die Natur derselben ableiten lassen. Wie in einer der Akademie hoffentlich nächstens zu unterbreitenden ausführlicheren Darstellung des Näheren entwickelt werden soll, ist dies meines Erachtens der einzige Weg, worauf wir hoffen können stichhaltige Schlüsse über die innere Natur der Lebenserscheinungen zu erhalten. Was aber hierzu unbedingt nötig, ist ein weit umfassendes Material von numerischen Bestimmungen zu bekommen, das gerade in der Biologie um so umfangreicher sein muss, als hier wie in der Meteorologie und verwandten statistischen Disciplinen die zahlreichen Einzelabweichungen erst durch die Menge der Bestimmungsdaten eliminiert werden können.

Einige Versuchsprotokolle.

Es werden für jeden Pflanzenspezies nur solche Versuchsergebnisse mitgeteilt, die eine grössere Zahl von Objekten umfassten, oder sonst ein besonders Interesse darboten.

L bedeutet die Länge der Versuchswurzel, $\triangle$ deren Zuwachse, in Mm. ausgedrückt; φ ist der beobachtete Ablenkungswinkel, der positiv gezählt wird, falls die Krümmung gegen die warme Wand gerichtet war. T_k und T_v bedeuten überall abgelesene Temperaturen des kalten resp. warmen Wasserbehälters.

In den Versuchen XXIV—XXVI, die mit dem Fig. 1 abgebildeten Apparat ausgeführt wurden, bedeuten $t_1 \dots t_4$ direkt abgelesene Thermometerangaben, in XIV—XVIII sind nur t_1, t_3 und t_5 direkt abgelesen, t_2 und t_4 dagegen durch Interpolation bestimmt.

In den Versuchen VII, XIII und XXI schliesslich, die in dem WORTMANN'schen Apparat erfolgten, sind diese Temperaturangaben (der Sägespänenschichten) sämmtlich durch Rechnung erhalten.

Pisum sativum.

13 Juni. Lufttemp. = 23°,9. *Versuch XXIV.*

Versuchsdauer 1 Stunde. 4 Objekte.

	12ʰ m.			12ʰ15 p.m.	12ʰ45 p.m.	1ʰ p. m.			
	Temp. °C.	N.	L. Mm.	Temp. °C.	Temp. °C.	Temp. °C.	L. Mm.	△ Mm.	φ.
T_k =	17°,2			17°,3	17°,5	17°,8			
t_1 =	26°,1	1	48	26°,7	27°,2	27°,5	49	+1	—20°
t_2 =	31°	2	46	32°	32°,8	33°	48	+2	—30°
t_3 =	35°,2	3	50	36°,2	37°,1	37°,6	50	0	—30°
t_4 =	40°,6	4	61	40°,7	41°,6	42°	61	0	—40°
T_v =	50°			50°,8	51°,8	52°			

Mittlerer Wärmefall = 4,7° C./Cm.

19 Juni. {4 tägige Keimpfl., Keimungstemp. = 15° C.} *Versuch XXVI.*

Versuchsdauer 4 Stunden. 12 Objekte.

	12ʰ m.			1ʰ p. m.				4ʰ p. m.			
	Temp. °C.	N.	L. Mm.	Temp. °C.	L. Mm.	△ Mm.	φ.	Temp. °C.	L. Mm.	△ Mm.	φ.
T_k =	15°,4			15°,8				16°,1			
t_1 =	20°,9			23°,1				23°,0			
t_2 =	25°	1	21	28°,2	22	+1	0°	27°,7	25	+4	0°
		2	28,5		30	+1,5	—20°		33	+4,5	—20°
		3	29		30	+1	0°		33	+4	0°
		3	31,5		33	+1,5	0°		36	+4,5	+20°

	12h m.			1h p. m.				4h p. m.			
	Temp. °C.	N.	L. Mm.	Temp. °C.	L. Mm.	Δ Mm.	φ.	Temp. °C.	L. Mm.	Δ Mm.	φ.
t_3 =	29°	5	27	32°,8	29	+2	—20°	31°,3	29,5	+2,5	—20°
		6	36		38	+2	—20°		38,5	+2,5	+10°
		7	39,5		42	+2,5	—20°		44	+4,5	—20°
		8	40		42	+2	—20°		44	+4	0°
t_4 =	34°	9	29	37°,9	31,5	+2,5	—60°	36°	33	+4	—80°
		10	30		33	+3	—40°		35	+5	—40° (+40°)
		11	35		37	+2	—40°		38	+3	—50°
		12	35		36,5	+1,5	—30°		38	+3	—30° (+10°)
T_v =	44°			46°				43°,6			
Luft-temp. =	16°,2			16°,2				16°,8			

Mittlerer Wärmefall = 4° C./Cm.

Faba vulgaris.

21 Nov. *Versuch XVIII.*

Versuchsdauer 6 Stunden. 10 Objekte.

	11h a. m.		1h p. m.	4h p. m.		5h p. m.	
	Temp. °C.	N.	Temp. °C.	Temp. °C.	φ.	Temp. °C.	φ.
T_k =	16°,2		14°,7	15°,2		15°,2	
t_1 =	16°,25	1 2	15°,8	16°,8	—10° — 5°	16°,85	—10° + 10° (—10°)
t_2 =	...	3 4	...	19°,7	0° —10°	19°,7	+ 30° [1] + 10°
t_3 =	19°,2	5 6	21°	23°,4	—80° (+20°) —30°	23°,45	—80° (+60°) [2] —40°
t_4 =	...	7 8	...	28°,2	—20° —20°	28°,2	+ 10° 0°
t_5 =	29°,2	9 10	30°,6	34°,1	—20° (+50°) —20° (+30°)	33°,9	—20° (+40°) —10° (+10°)
T_v =	39°,2		45°,6	49°,5		49°,5	

[1]) Nach Plasmolyse = + 50°.
[2]) » » = —120° (+50°).

Mittlerer Wärmefall = 4,1° C./Cm.

5 Dec. *Versuch XXI.*

Versuchsdauer 3 Stunden. 15 Objekte.

	1h p. m.		4h p. m.	
	Temp. °C.	N.	Temp. °C.	φ.
Tk =	8°,3		...	
t_1 =	13°,3		13°,8	
t_2 =	25°,5	1	27°,8	— 40°
		2		0°
		3		0°
		4		0°
t_3 =	35°,6	5	37°,8	— 50°
		6		+ 30°
		7		0°
		8		— 50°
		9		0°
		10		— 50°
		11		— 40° (+ 40°)
		12		— 30°
		13		— 20° (+ 20°)
		14		— 40°
		15		— 40°
Tv =	47°,2		...	

Helianthus annuus.

14 Nov. *Versuch XIII.*

Versuchsdauer 2 St. 30 Min. 11 Objekte.

	5h30-8h p. m.		
	Temp. °C.	N.	φ.
Tk =	12°		
t_1 =	14°,2	1	— 30° (+ 30)°
		2	— 30°
t_2 =	15°	3	— 10°
t_3 =	16°	4	+ 20° (— 20°)
		5	— 60°
t_4 =	17°	6	— 10°
t_5 =	18°	7	— 20°
t_6 =	21°,2	8	— 40°
t_7 =	26°	9	— 60°
t_8 =	33°	10	— 40°
		11	— 20°
Tv =	37°		

Wärmefall cka 3° C./Cm.

18 Nov. *Versuch XIV.*

Versuchsdauer 1 Stunde. 7 Objekte.

	6h45 p. m.		7h15 p. m.	7h45 p. m.	
	Temp. ° C.	N.	Temp. ° C.	Temp. ° C.	φ.
T_k =	13°,2		13°,2	13°,4	
t_1 =	14°,8	1	15°,2	15°,6	—40°
t_2 =		2		18°,5	—30°
		3			—20°
t_3 =	21°,2	4	22°	23°	—50°
t_4 =		5		30°	—30°
		6			—70°
t_5 =	38°	7	39°	39°	—80°
T_v =	59°,4		56°,6	56°,2	

Mittlerer Wärmefall = 6,2° C./Cm.

21 Nov. *Versuch XVII.*

Versuchsdauer 6 Stunden. 16 Objekte.

	11h a. m.		1h p. m.	4h p. m.		5h p. m.	
	Temp. ° C.	N.	Temp. ° C.	Temp. ° C.	φ.	Temp. ° C.	φ.
T_k =	16°,2		14°,7	15°,2		15°,2	
t_1 =	16°,25	1	15°,8	16°,8	—20°	16°,8	...
		2			0°		...
		2			—10°		—10°
t_2 =	...	4	...	19°,7	0°	19°,7	0°
		5			0°		—20°
		6			+ 20°		—10°
t_3 =	19°.2	7	21°	23°,4	—30°	23°,45	...
		8			—30°		...
		9			—30°		...
		10			—30°		...
t_4 =	...	11	...	28°,2	—20°	28°,2	0°
		12			—20°		—30°
		13			—20°		—20°
t_5 =	29°,2	14	30°,6	34°,1	—20° (+10°)	33°,9	—20° (+20°)
		15			—30° (+30°)		—30°
		16			—30° (+10°)		...
T_v =	39°,2		45°,6	49°,5		49°,5	

Mittlerer Wärmefall 4,1° C./cm.

15 Juni. *Versuch XXV.*

Versuchsdauer 4 St. 30 Min. 8 Objekte.

	2h p. m.		4h30 p. m.			6h30 p. m.		
	Temp. ° C.	N.	Temp, ° C.	△ Mm.	φ.	Temp. ° C.	△ Mm.	φ.
T_k =	17°,5		16°			16°,8		
t_1 =	24°	1	25°	2	0°	26°,6	3	0°
		2		2	0°		...	...
t_2 =	28°,2	3	30°	4,5	0°	32°	7	— 30°
		4		3	0°		4	0°
t_3 =	32°,2	5	34°	4,5	0°	36°,5	6,5	— 10°
		6		4	0°		6	...
t_4 =	36°,7	7	38°,5	5	— 50° (+20°)	41°,2	...	...
		8		6	0°		...	...
T_v =	46°,8		48°,6			51°,7		

Mittlerer Wärmefall = 4,5° C./Cm.

Sinapis alba.

19 Nov. *Versuch XVI.*

Versuchsdauer 5 Stunden. 10 Objekte.

	2h p. m.		7h p. m,	
	Temp. ° C.	N.	Temp. ° C.	φ.
T_k =	...		...	
t_1 =	16°,3	1	16°,4	0°
		2		— 40°
t_2 =	...	3	18°	+ 10°
		4		+ 10°
t_3 =	21°	5	19°,8	+ 40°
		6		+ 10°
t_4 =	...	7	21°,7	+ 70°
		8		+ 10°
t_5 =	29°	9	23°,8	+ 50°
		10		— 50°
T_v =	40°,2		...	

Mittlerer Wärmefall = 2,5° C./mC.

14 Nov. *Versuch VII.*

Versuchsdauer 1 Stunde. 7 Objekte.

5h15-6h15 p. m.		
N.	Temp. ° C.	φ.
1	14°	— 40°
2	17°	+ 30°
3	18°,5	+ 30°
4	20°	+ 30° (— 30°)
5	24°	— 20° (+ 20°)
6	28°	— 40°
7	29°	— 20° (+ 30°)

Mittlerer Wärmefall = 5,1 C./Cm.

Till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts. fr. sid. 752.)

St. Petersburg. *Société Imp. Russe de géographie.*
Beobachtungen der Russischen Polarstation auf Nowaja Semlja Th. 1. Magnetische Beobachtungen. 1882/1883. 4:o.
— *Societas entomologica Rossica.*
Trudi. — Horæ. T. 25 (1890/91). 8:o.
Santiago. *Deutscher wissenschaftlicher Verein.*
Verhandlungen. Bd. 2: H. 3. 1891. 8:o.
Saõ Paulo. *Commissão geographica e geologica do estádo de Saõ Paulo.*
Boletim. N:o 6. 1890. 8:o.
SAMPAIO, TH. F., Exploração dos rios Itapetininga e Parapanema. Rio de Janeiro 1890. Tvfol.
Strassburg. *Kaiser Wilhelms-Universität.*
Akademiskt tryck. År 1890/91. 111 häften. 4:o & 8:o.
Sydney. *Department of mines.*
Annual report. Year 1890. Fol.
— *Australian museum.*
Records. Vol. 1: N:o 8—9. 1891. 8:o.
Tacubaya. *Observatorio astronómico nacional.*
Anuario. Año 12 (1892). 16:o.
Torino. *R. Accademia delle scienze.*
Memorie. (2) T. 41. 1891. 4:o.
Atti. Vol. 26 (1890/91): Disp. 1—15. 8:o.
Osservazioni meteorologiche fatte all' osservatorio della R. università. Anno 1890. 8:o.
Venezia. *R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti.*
Memorie. Vol. 23. 1887. 4:o.
Atti. (7) T. 1 (1889/90): Disp. 10; 2 (1890/91): 1—9. 8:o.
Washington. *U. S. National museum.*
Proceedings. Vol. 13 (1890). 8:o.
— *U. S. Naval observatory.*
Observations. Year 1886. 4:o.
— *U. S. Department of agriculture.*
North American fauna. N:o 5. 1891. 8:o.

Wien. *K. Akademie der Wissenschaften.*
Denkschriften. Math.-naturwiss. Klasse. Bd. 57. 1890. 4:o.
» Philos.-hist. » Bd. 38—39. 1890—91. 4:o.
Sitzungsberichte. Math.-naturwiss. » Abth. **1.** Bd. 99: H. 4—10; **2a.** Bd. 99: 4—10; **2b.** Bd. 99: 4—10; **3.** Bd. 99: 4—10.
» Philos.-hist. Klasse. Bd. 122—123. 1890. 8:o.
Mittheilungen der prähistorischen Commission. Bd. 1: N:o 2 (1890). 4:o.
Almanach. Jahrg. 40 (1890). 8:o.

Archiv für Oesterreichische Geschichte. Bd. 76: H. 1—2; 77: 1. 1890 —91. 8:o.

Fontes rerum Austriacarum. Abth. 2: Bd. 45: H. 2. 1891. 8:o.

— (Währing.) *K. K. Universitäts-Sternwarte.*

Annalen. Bd. 7. 1891. 4:o.

Wiesbaden. *Nassauischer Verein für Naturkunde.*

Jahrbücher. Jahrg. 44. 1891. 8:o.

Utgifvarne.

Flora oder allgemeine botanische Zeitung. Jahrg. 74 (1891): H. 1—5. 8:o.

Rassegna delle scienze geologiche in Italia. Redattori M. Cerminati, A. Tellini. Anno 1 (1891): F. 1—2. Roma. 8:o.

Revista Argentina de historia natural. T. 1 (1891): Entr. 2—3; 5. 8:o.

Författarne.

Appellöf, A., Teuthologische Beiträge. 2. Bergen 1891. 8:o.

Ljungman, A. W., Upplysningar och handlingar rörande Svenska fiskerinäringens . . . . understöd och administration 1841—1891. Göteb. 1891. 8:o.

— 1 Småskrift. 8:o.

Malm, A. H., Om sillsaltning. Göteb. 1891. 8:o.

— Berättelse öfver Göteborgs och Bohusläns hafsfiskar under 1889/90, 1890/91. Göteb. 1891. 8:o.

Nathorst, A. G., Den arktiska florans forna utbredning i länderna öster och söder om Östersjön. Sthm. 1891. 8:o.

— Om bernstenens bildning. Sthm. 1891. 8:o.

Nystedt, Th., Reseberättelse. Afd. 1. Sthm. 1891. 4:o.

Arnold, F., Zur Lichenflora von München. München 1891. st. 8:o.

Holm, Th., A study on some natural characters of N. American Gramineæ. 1—3. 1891. 8:o.

— 1 småskrift. 8:o.

Wille, N., Morphologiske og physiologiske Studier over Alger. Kra. 1891. 8:o.

— 1 Småskrift. 8:o.

Stockholm, 1892. Kungl. Boktryckeriet.

